1 Limite, continuitate, proprietatea lui Darboux - clasa a XI-a

1.1 Elemente de topologie pe $\mathbb{R}$

În dezvoltarea conceptelor de analiză matematică vom utiliza diverse noţiuni topologice, toate acestea sprijinindu-se pe cea de vecinătate a unui punct. Vom da în cele ce urmează definiţia acesteia pe $\mathbb{R}$ şi vom enumera câteva proprietăţi de bază.

Definiţia 1.1 *Fie $x_0 \in \mathbb{R}$.*

*(i) Se numeşte **interval deschis centrat în** x_0 un interval de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, unde $\varepsilon > 0$.*

*(ii) O mulţime $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte **vecinătate** pentru $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$.*

Notăm cu $\mathcal{V}(x)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui x.

Exemplul 1.2 Intervalul $(0, 2)$ este deschis, centrat în 1. Acest interval este vecinătate pentru orice punct din $(0, 2)$, dar nu este vecinătate pentru 0 sau pentru 2.

Exemplul 1.3 Mulţimea numerelor raţionale nu este vecinătate pentru niciun punct $x_0 \in \mathbb{Q}$ deoarece orice interval de numere reale conţine şi numere raţionale, şi iraţionale.

Teorema 1.4 *Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \neq y$, atunci există o vecinătate U pentru x şi o vecinătate V pentru y astfel încât $U \cap V = \emptyset$.*

Mulţimea vecinătăţilor unui punct are următoarele proprietăţi.

Propoziţia 1.5 *Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Atunci:*

(i) pentru orice $V \in \mathcal{V}(x_0)$, $x_0 \in V$;

(ii) orice supramulţime a unei vecinătăţi pentru x_0 este de asemenea vecinătate pentru x_0;

(iii) dacă U şi V sunt două vecinătăţi ale lui x_0, atunci $U \cap V$ este vecinătate a lui x_0.

(iv) dacă V este vecinătate pentru x_0, atunci există o vecinătate W pentru x_0 astfel încât V este vecinătate pentru orice $y \in W$.

1.2 Dreapta reală încheiată

Facem convenţia de a adăuga mulţimii $\mathbb{R}$ două elemente care nu fac parte din $\mathbb{R}$, notate cu $+\infty$ şi $-\infty$. Mulţimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o vom nota cu $\overline{\mathbb{R}}$ şi o vom numi **dreapta reală încheiată** sau **compactificată**. Uneori vom nota, pentru simplitate, ∞ în loc de $+\infty$.

Prelungim şi operaţiile algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, fără a fi însă definite peste tot:

$x + \infty = \infty + x = \infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$

$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$

$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty, \quad$ pentru $x > 0$ şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty, \quad$ pentru $x < 0$ şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Următoarele operaţii sunt nedefinite (se mai numesc şi **nedeterminări**):

$$\infty + (-\infty), \quad (-\infty) + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Definiţia 1.6 *Numim **vecinătate** a punctului $+\infty$ (respectiv $-\infty$) orice mulţime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(a, +\infty]$ (respectiv $[-\infty, a)$), unde $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Conform acestei definiţii, orice interval de forma $(a, +\infty]$ este vecinătate a punctului $+\infty$, în timp ce orice interval de forrma $[-\infty, a)$ este vecinătate a punctului $-\infty$.

1.3 Puncte interioare. Mulţimi deschise

Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi un punct $x_0 \in A$.

Definiţia 1.7 *Un punct $x_0 \in A$ se numeşte* ***punct interior*** *al mulţimii A dacă există o vecinătate V a lui x_0 conţinută în mulţimea A, adică $x_0 \in V \subset A$.*

A spune că x_0 este punct interior al lui A înseamnă că A este o vecinătate a lui x_0.

Definiţia 1.8 *Mulţimea punctelor interioare ale mulţimii A se numeşte* ***interiorul*** *lui A şi se notează cu* $\operatorname{int} A$ *sau* $\overset{\circ}{A}$.

Evident interiorul lui A este conţinut în A, $\overset{\circ}{A} \subset A$.
Interiorul mulţimii vide este mulţimea vidă.

Definiţia 1.9 *Mulţimea A se numeşte* ***mulţime deschisă*** *dacă este egală cu interiorul său: $A = \mathring{A}$, adică toate punctele sale sunt interioare.*

Propoziţia 1.10 *(i) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;*
(ii) Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;

1.4 Puncte aderente. Mulţimi închise

Definiţia 1.11 *Un punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte* ***punct aderent*** *al mulţimii A dacă în orice vecinătate V a lui x_0 există cel puţin un punct din A, (eventual numai x_0, dacă $x_0 \in A$), adică $A \cap V \neq \emptyset$.*

Definiţia 1.12 *Mulţimea punctelor aderente mulţimii A se numeşte* ***aderenţa*** *lui A sau* ***închiderea*** *lui A şi se notează* $\operatorname{cl} A$ *sau* $\overline{A}$.

Orice $x_0 \in A$ este punct aderent al lui A, deoarece în orice vecinătate a lui x_0 se găseşte cel puţin punctul x_0 în A. Deci mulţimea A este conţinută în închiderea sa: $A \subset \overline{A}$.
O mulţime poate avea puncte aderente care să nu-i aparţină.

Propoziţia 1.13 (Caracterizarea cu şiruri) *$x_0 \in \overline{A}$ dacă şi numai dacă există $(a_n) \subset A$ astfel încât $a_n \to x_0$.*

Definiţia 1.14 *O mulţime se numeşte* ***închisă*** *dacă este egală cu aderenţa sa.*

Propoziţia 1.15 *(i) Orice reuniune finită de mulţimi închise este o mulţime închisă;*
(ii) Orice intersecţie (finită sau infinită) de mulţimi închise este o mulţime închisă.

Observaţia 1.16 *Legătura dintre mulţimi deschise şi închise: o mulţime este închisă dacă şi numai dacă complementara sa este o mulţime deschisă.*

1.5 Puncte de acumulare

Definiţia 1.17 *Un punct* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte* ***punct de acumulare*** *al mulţimii* $A \subset \mathbb{R}$ *dacă orice vecinătate a punctului* x_0 *conţine puncte din* A*, diferite de* x_0*. Cu alte cuvinte pentru orice* $V \in \mathcal{V}(x_0)$*, avem* $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Definiţia 1.18 *Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii* A *se numeşte* ***mulţimea derivată*** *asociată lui* A *şi se notează* A'.

Intuitiv, un punct x_0 este punct de acumulare pentru o mulţime dacă există puncte din acea mulţime diferite de x_0, oricât de aproape de x_0. Calitatea unui punct de a fi punct de acumulare pentru o mulţime nu se schimbă dacă punctul respectiv se adaugă sau se scoate din mulţime. În general, un punct de acumulare poate să aparţină sau să nu aparţină mulţimii respective.

Propoziţia 1.19 (Caracterizarea cu şiruri) $x_0 \in A'$ *dacă şi numai dacă există* $(a_n) \subset A \setminus \{x_0\}$ *astfel încât* $a_n \to x_0$.

Definiţia 1.20 *Un punct* x_0 *se numeşte* ***punct izolat*** *dacă nu este punct de acumulare.*

Propoziţia 1.21 *Mulţimile finite nu au puncte de acumulare.*

1.6 Limite de funcţii

1.6.1 Definiţie. Proprietăţi generale

Definiţia 1.22 *Fie* $A \subset \mathbb{R}$ *o mulţime nevidă,* $f : A \to \mathbb{R}$ *o funcţie şi* $a \in A'$*. Spunem că funcţia* f ***are limita*** ℓ ***în punctul*** a*, şi notăm*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \text{ sau } f(x) \to \ell \text{ pentru } x \to a,$$

dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$*, există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât, pentru orice* x *din* $U \cap A$ *diferit de* a*, să avem* $f(x) \in V$*, sau, formalizat,*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset V. \tag{1.1}$$

Observaţia 1.23 *Punctul* a *nu trebuie să aparţină neapărat mulţimii* A*, însă trebuie să existe puncte în mulţimea* A *oricât de apropiate de* a*, noţiunea de limită exprimând intuitiv faptul că, atunci când punctele din domeniul funcţiei se apropie de punctul* a*, atunci valorile funcţiei* f *în aceste puncte se apropie oricât de mult de punctul limită* ℓ*.*

Teorema 1.24 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$**)** *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}$*. Atunci* f *are limita* ℓ *în punctul* a *dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, |x - a| < \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Teorema 1.25 (Caracterizarea cu şiruri) *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}$*. Atunci* f *are limita* ℓ *în punctul* a *dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to \ell. \tag{1.3}$$

Observaţia 1.26 *Uneori, una din relaţiile (1.2), respectiv (1.3), se consideră a fi definiţia limitei funcţiei f în punctul a, numite şi* ***definiţia*** $\varepsilon-\delta$ ***a limitei unei funcţii într-un punct,*** *respectiv* ***definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct.***

Teorema 1.25 ne permite să arătăm în anumite cazuri că nu există limita unei funcţii într-un punct. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Corolarul 1.27 *Dacă există* $(x_n),(u_n) \subset A \setminus \{a\}$ *astfel încât* $x_n \to a, u_n \to a$, *iar* $f(x_n) \to \ell_1, f(u_n) \to \ell_2$, *cu* $\ell_1 \neq \ell_2$, *atunci nu există limita funcţiei* f *în punctul* a.

Definiţia 1.28 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ *şi* $a \in A'$. *Spunem că funcţia* f *are limita* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) în punctul* a, *dacă pentru orice* $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ *(respectiv* $V \in \mathcal{V}(-\infty)$*), există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in U \cap A$, $x \neq a$, *are loc* $f(x) \in V$. *În acest caz vom scrie* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$*).*

Teorema 1.29 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ *şi* $a \in A'$. *Atunci există* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$*), dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta_\varepsilon > 0$, *astfel încât dacă* $|x-a| < \delta_\varepsilon$, $x \in A, x \neq a$ *are loc* $f(x) > \varepsilon$ *(respectiv* $f(x) < -\varepsilon$*).*

Definiţia 1.30 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, *astfel încât* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) este punct de acumulare pentru* A. *Spunem că elementul* $\ell \in \mathbb{R}$ *este limita functiei* f *în punctul* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*), dacă pentru orice* $V \in \mathcal{V}(\ell)$, *există* $U \in \mathcal{V}(+\infty)$ *(respectiv* $U \in \mathcal{V}(-\infty)$*) astfel încât pentru orice* $x \in U \cap A$, *are loc* $f(x) \in V$. *În acest caz vom scrie* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$*).*

Teorema 1.31 *Fie* $\ell \in \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, *astfel încât* ∞ *(respectiv* $-\infty$*) este punct de acumulare pentru* A. *Atunci există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$*) dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta > 0$, *astfel încât dacă* $x > \delta$ *(respectiv* $x < -\delta$*),* $x \in A$ *are loc*

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Definiţia 1.32 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, *astfel încât* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) este punct de acumulare pentru* A. *Spunem că limita functiei* f *în punctul* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$ *) este* $+\infty$, *dacă pentru orice* $V \in \mathcal{V}(+\infty)$, *există* $U \in \mathcal{V}(+\infty)$ *(respectiv* $U \in \mathcal{V}(-\infty)$*) astfel încât pentru orice* $x \in U \cap A$, *are loc* $f(x) \in V$. *În acest caz vom scrie* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$*).*

Teorema 1.33 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, *astfel încât* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) este punct de acumulare pentru* A. *Atunci există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$*) dacă şi numai dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta_\varepsilon > 0$, *astfel încât dacă* $x > \delta_\varepsilon$ *(respectiv* $x < -\delta_\varepsilon$*),* $x \in A$ *are loc* $f(x) > \varepsilon$.

Teorema 1.34 *Fie* $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$ *şi există* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$*). Dacă există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât oricare ar fi* $x \in U \cap A$, $x \neq a$, $f(x) \leq g(x)$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$*).*

Teorema 1.35 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ *astfel încât* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) este punct de acumulare pentru* A. *Spunem că dreapta* $y = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, *este asimptotă orizontală la* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) pentru funcţia* f *dacă există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$*).*

Definiţia 1.36 *Fie $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A. Spunem că dreapta $y = mx+n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, este asimptotă oblica la $+\infty$ (respectiv $-\infty$) pentru funcţia f, dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x) - mx - n| = 0$).*

Teorema 1.37 *Fie $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A. Dreapta $y = mx + n, m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, este asimptotă oblică la $+\infty$ (respectiv $-\infty$) pentru funcţia f dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = n$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = n$).*

Definiţia 1.38 *(i) Spunem că dreapta $x = a$ este asimptotă verticală la stânga (respectiv dreapta) pentru funcţia $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'_s$ ($a \in A'_d$) dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ sau $-\infty$ (respectiv $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ sau $-\infty$).*

(ii) Spunem că dreapta $x = a$ este asimptotă verticală pentru funcţia $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$ dacă ea este asimptotă verticală la stânga sau asimptotă verticală la dreapta pentru f.

Observaţia 1.39 *Avem următoarele limite fundamentale:*

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$;

(ii) $\lim\limits_{x\to0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;

(iii) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$;

(iv) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$;

(v) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

(vi) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

(vii) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$;

(viii) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;

(ix) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$;

(x) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

(xi) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$;

(xii) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$;

(xiii) $\lim\limits_{x\to\pi/2, x<\pi/2} \operatorname{tg} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\pi/2, x>\pi/2} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Observaţia 1.40 *Eliminarea nedeterminărilor se face, de obicei, astfel:*

(i) Cazurile $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se elimină fie folosind limitele fundamentale, fie cu regula lui L'Hôpital.

(ii) Cazurile $0\cdot\infty, 0\cdot(-\infty)$ se reduc la cazurile $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ astfel: fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, astfel încât există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty(-\infty)$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$, $\forall x \in$

$U \setminus \{a\}$; putem scrie $f(x)g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ şi astfel nedeterminarea dată se reduce la o nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ sau $f(x)g(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ şi vom obtine o nedeterminare $\dfrac{\infty}{\infty}$.

(iii) Cazul $\infty - \infty$ se reduce, de obicei, la cazul $0 \cdot \infty$ astfel: fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, astfel încât există $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \neq 0, \forall x \in U \setminus \{a\}$; putem scrie $(f(x) - g(x)) = f(x)(1 - \dfrac{g(x)}{f(x)})$. Dacă $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, atunci nedeterminarea dată se reduce la o nedeterminare $0 \cdot \infty$; dacă $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} > 1 (< 1)$, atunci $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = -\infty (+\infty)$.

(iv) Cazurile $0^0, \infty^0$ se reduc la cazul $0 \cdot \infty$ astfel: fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, astfel încât există $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ $(+\infty)$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ şi e-xistă $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) > 0$, $\forall x \in U \cap A \setminus \{a\}$. Putem scrie $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ şi limita de la exponent este o nedeterminare $0 \cdot (-\infty)$ (respectiv $0 \cdot \infty$).

(v) Cazul 1^∞ se reduce tot la cazul $0 \cdot \infty$ fie prin metoda de la punctul iv), fie astfel: dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, astfel încât există $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât , $f(x) \neq 1$, $\forall x \in U \setminus \{a\}$, atunci vom scrie $f(x)^{g(x)} = \{[1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\}^{g(x)(f(x)-1)}$. Avem $\lim_{x\to a} [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} = e$, iar $\lim_{x\to a} g(x)(f(x) - 1)$ este o nedeterminare $0 \cdot \infty$.

1.6.2 Limite laterale

Definiţia 1.41 *Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A \subset \mathbb{R}$. Vom nota*

$$A_s = A \cap (-\infty, a], \quad A_d = A \cap [a, \infty).$$

*Punctul a se numeşte **punct de acumulare la stânga** (respectiv **dreapta**) pentru A dacă este punct de acumulare pentru mulţimea A_s (respectiv A_d). Vom nota mulţimea punctelor de acumulare la stânga (respectiv dreapta) cu A'_s (respectiv A'_d). Cu alte cuvinte,*

$$\begin{aligned} a \in A'_s &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(a), (V \cap A_s) \setminus \{a\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, (a - r, a + r) \cap A \cap (-\infty, a) \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, (a - r, a) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Analog,

$$a \in A'_d \Leftrightarrow \forall r > 0, (a, a + r) \cap A \neq \emptyset.$$

Definiţia 1.42 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

*(i) Dacă $a \in A'_s$, spunem că elementul $\ell_s \in \mathbb{R}$ este **limită la stânga** a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_s)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_s) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \ell_s$ sau $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \ell_s$.*

*(ii) Dacă $a \in A'_d$, spunem că elementul $\ell_d \in \mathbb{R}$ este **limită la dreapta** a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_d)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_d) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \ell_d$ sau $\lim_{x \searrow a} f(x) = \ell_d$.*

Teorema 1.43 *(i) Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A'_s$. Atunci f are limita la stânga în a egală cu ℓ_s dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A_s \setminus \{a\} \text{ crescător, convergent la } a, \text{ avem că } f(x_n) \to \ell_s. \tag{1.4}$$

(ii) Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A'_d$. Atunci f are limita la dreapta în a egală cu ℓ_d dacă şi numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A_d \setminus \{a\} \text{ descrescător, convergent la } a, \text{ avem că } f(x_n) \to \ell_s. \tag{1.5}$$

Are loc următoarea caracterizare a limitei unei funcţii prin intermediul limitelor laterale.

Teorema 1.44 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A'_s \cap A'_d$. Atunci f are limită în punctul a dacă şi numai dacă există limitele la stânga şi la dreapta în punctul a şi sunt egale. În acest caz,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

1.6.3 Proprietăţi ale funcţiilor cu limită

Vom discuta în cele ce urmează diverse proprietăţi care apar în acest cadru al funcţiilor care au limită.

Definiţia 1.45 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $B \subset A$. O funcţie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **mărginită pe** B dacă mulţimea*

$$f(B) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in B\}$$

este mărginită. Cu alte cuvinte, f este mărginită pe B dacă există $r > 0$ astfel încât $f(B) \subset (-r, r)$ sau, echivalent, dacă există $r > 0$ astfel încât $|f(x)| < r$ pentru orice $x \in B$.
*Mulţimea $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$ se va nota uneori cu $\operatorname{Im} f$ şi se va numi **imaginea** funcţiei f. În cazul în care o funcţie este mărginită pe întregul său domeniu de definiţie, se va numi simplu **mărginită**.*

Exerciţiul 1 Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nu este mărginită deoarece, dacă am presupune că există $r > 0$ astfel încât $|f(x)| < r$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ ar rezulta că $\dfrac{1}{r} < x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Luând $x := \dfrac{1}{r} \in (0, \infty)$, obţinem în mod evident o contradicţie.

Teorema 1.46 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $a \in A'$. Dacă există $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$.*

Teorema 1.47 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in A'$. Dacă există $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, $\ell > 0$ (respectiv $\ell < 0$), atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).*

Teorema 1.48 *Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A'$. Dacă există $\ell \in \mathbb{R}$ şi $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ şi $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, atunci există $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.*

Teorema 1.49 *(i) Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) \leq g(x)$, atunci $\ell_1 \leq \ell_2$.*

(ii) Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A', \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ atunci $\alpha \leq \ell \leq \beta$.

Teorema 1.50 *Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in A'$. Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât g este mărginită pe U, atunci există $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = 0$.*

Rezultatul următor se referă la calculul limitelor în cazul compunerii de funcţii.

Teorema 1.51 *Fie $A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}, a \in A', b \in B'$ şi funcţiile $f : B \to \mathbb{R}$, $g : A \to B \setminus \{b\}$. Dacă $\lim\limits_{y\to b} f(y) = \ell$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, atunci*

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \ell.$$

Observaţia 1.52 *Ipoteza $g : A \to B \setminus \{b\}$ este esenţială în teorema de mai sus. Într-adevăr, să considerăm funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin*

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } y \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } y = 0 \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să luăm $a = b = 0$. Avem $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$ şi $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Funcţia $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată prin

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aşadar, $\lim\limits_{x\to 0} (f \circ g)(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{y\to 0} f(y)$.

Putem arăta rezultate referitoare la operaţii cu limite de funcţii. Demonstraţia se va realiza folosind, în fiecare situaţie în parte, caracterizările cu siruri formulate anterior. Astfel, considerând $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, putem defini funcţiile $f + g$, αf, $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$, $\dfrac{f}{g} : A \setminus \{x \in A \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, $f^g : D \subset A \to \mathbb{R}$ prin

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha \cdot f(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \text{ şi} \\ (f^g)(x) &:= f(x)^{g(x)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

pentru fiecare x din domeniul de definiţie al fiecărei funcţii.

Teorema 1.53 *Fie funcţiile $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $a \in A'$. Presupunem că există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Dacă suma $\ell_1 + \ell_2$ a limitelor are sens, atunci funcţia $f + g$ are limită în a şi are loc relaţia:

$$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2 = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

(caz exceptat: una dintre limitele ℓ_1, ℓ_2 este egală cu $+\infty$, iar cealaltă cu $-\infty$).

(ii) Funcţia αf are limită în a şi au loc relaţiile:

$$\lim_{x \to a}(\alpha f)(x) = \alpha \cdot \ell_1 = \alpha \cdot \lim_{x \to a} f(x), \text{ dacă } \alpha \neq 0,$$
$$\lim_{x \to a}(\alpha f)(x) = 0, \text{ dacă } \alpha = 0.$$

(iii) Dacă produsul $\ell_1 \cdot \ell_2$ al limitelor are sens, atunci funcţia $f \cdot g$ are limită în a şi are loc relaţia:

$$\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2 = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

(cazuri exceptate: una dintre limitele ℓ_1, ℓ_2 este egală cu 0, iar cealaltă este $+\infty$ sau $-\infty$).

(iv) Dacă raportul $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ al limitelor are sens şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât funcţia $\dfrac{f}{g}$ este bine definită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$, atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită în a şi are loc relaţia:

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

(cazuri exceptate: $\ell_2 = 0$, sau ambele limite ℓ_1, ℓ_2 sunt infinite).

(v) Dacă $\ell_1^{\ell_2}$ are sens şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât funcţia f^g este bine definită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$, atunci funcţia f^g are limită în a şi are loc relaţia:

$$\lim_{x \to a}\left(f^g\right)(x) = \ell_1^{\ell_2} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

(cazuri exceptate: $(\ell_1, \ell_2) = (0, 0)$, $(\ell_1, \ell_2) = (+\infty, 0)$, $(\ell_1, \ell_2) = (1, +\infty)$).

Teorema 1.54 (Limitele funcţiilor monotone) *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotonă şi $a \in A' \cap \mathbb{R}$. Atunci există limitele laterale $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell_s$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell_d$, finite sau infinite.*

Observaţia 1.55 *Să observăm că dacă în cadrul teoremei anterioare avem că $a \in A$, atunci limitele laterale în a sunt finite. Acest lucru se întâmplă deoarece, dacă se consideră spre exemplu funcţia f crescătoare şi un şir crescător $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a$, atunci şirul crescător $(f(x_n))$ are proprietatea că $f(x_n) \leq f(a)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, deci limita acestuia, egală după cum am văzut cu ℓ_s, are proprietatea $\ell_s \leq f(a) \in \mathbb{R}$. Cum şirul $(f(x_n))$ este crescător, el nu poate avea limita $-\infty$ în mod evident. Am arătat deci că $\ell_s \in \mathbb{R}$. Pentru $\ell_d \in \mathbb{R}$ demonstraţia este analoagă. În cazul în care f este descrescătoare, rezultatul se păstrează cu modificări evidente.*

1.7 Continuitate

1.7.1 Definiţie. Proprietăţi generale

Definiţia 1.56 *Spunem că funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* ***este continuă în punctul*** *$a \in A$ dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice x din $U \cap A$, să avem $f(x) \in V$, sau, formalizat,*

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A) \subset V. \tag{1.7}$$

Dacă funcţia f nu este continuă în punctul $a \in A$, vom spune că f este ***discontinuă în punctul*** *a, sau că a este un* ***punct de discontinuitate*** *pentru funcţia f.*

Vom spune că funcţia f este ***continuă pe o mulţime*** *$B \subset A$ dacă f este continuă în orice punct $x \in B$.*

Observaţia 1.57 *Remarcăm mai întâi faptul că noţiunea de continuitate, spre deosebire de cea de limită, nu are sens decât pentru punctele mulţimii A, domeniul de definiţie al funcţiei f.*

Observaţia 1.58 *De asemenea, să observăm că, dacă a este un punct izolat al mulţimii A, atunci funcţia f este continuă în a. Într-adevăr, în acest caz există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $U \cap A = \{a\}$. Atunci, $f(U \cap A) = \{f(a)\} \subset V$, pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$.*

Aşadar, problema continuităţii se va pune doar în punctele de acumulare ale mulţimii A. Examinând definiţia de mai sus, observăm similitudinea cu definiţia limitei unei funcţii într-un punct, ceea ce ne permite enunţarea următoarei teoreme de caracterizare.

Teorema 1.59 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A' \cap A$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Teorema 1.60 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$) *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Atunci f este continuă în punctul a dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Teorema 1.61 (Caracterizarea cu şiruri) *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$. Atunci f este continuă în punctul a dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to f(a). \tag{1.9}$$

Observaţia 1.62 *Uneori, ca în cazul limitei, una din relaţiile (1.8), respectiv (1.9), se consideră a fi definiţia continuităţii funcţiei f în punctul a, numite şi* ***definiţia $\varepsilon - \delta$ a continuităţii unei funcţii într-un punct,*** *respectiv* ***definiţia cu siruri a continuităţii unei funcţii într-un punct.***

Teorema 1.63 (Carcterizarea continuităţii globale) *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f este continuă pe $\mathbb{R}$;
(ii) pentru orice mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}$, avem că $f^{-1}(D)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}$;
(iii) pentru orice mulţime închisă $F \subset \mathbb{R}$, avem că $f^{-1}(F)$ este mulţime închisă în $\mathbb{R}$.

Teorema 1.64 *Dacă $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$ şi există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, atunci funcţia*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{a\} \\ \ell, & x = a \end{cases}$$

*este continuă în a ($\widetilde{f}$ se numeşte **prelungirea prin continuitate** a funcţiei f).*

Exemplul 1.65 Funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ se poate prelungi prin continuitate în 0, deoarece $0 \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})'$ şi există $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$.

1.7.2 Continuitate laterală. Discontinuităţi

Asemănător cu cazul limitelor de funcţii, pentru a putea vorbi de continuitate laterală, avem nevoie de funcţii de variabilă reală.

Definiţia 1.66 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$.*
*(i) Spunem că f este **continuă la stânga** în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_s$, să avem $f(x) \in V$.*
*(ii) Spunem că f este **continuă la dreapta** în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_d$, să avem $f(x) \in V$.*

Ţinând seama de definiţia de mai sus şi de definiţiile limitelor laterale, deducem uşor următoarea teoremă de caracterizare a continuităţii laterale.

Teorema 1.67 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$.*
(i) Dacă $a \in A'_s$, atunci f este continuă la stânga în a dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.
(ii) Dacă $a \in A'_d$, atunci f este continuă la dreapta în a dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

De asemenea, se poate formula o caracterizare a continuităţii laterale prin intermediul sirurilor.

Teorema 1.68 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$.*
(i) Dacă $a \in A'_s$, atunci f este continuă la stânga în a dacă şi numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A_s \text{ crescător, convergent la } a, \text{ avem că } f(x_n) \to f(a).$$

(ii) Dacă $a \in A'_d$, atunci f este continuă la dreapta în a dacă şi numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A_d \text{ descrescător, convergent la } a, \text{ avem că } f(x_n) \to f(a).$$

Ţinând cont de caracterizarea limitei prin intermediul limitelor laterale, obţinem de asemenea următorul rezultat.

Teorema 1.69 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A \cap A'$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă f este continuă la stânga şi la dreapta în a.*

Noţiunile de limite laterale ne permit de asemenea, clasificarea punctelor de discontinuitate în mai multe categorii.

Definiţia 1.70 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A$ punct de discontinuitate pentru f. Punctul a se numeşte* ***punct de discontinuitate de specia I*** *dacă există limitele laterale în a şi sunt finite. În caz contrar vom spune că a este* ***punct de discontinuitate de specia a II-a****.*

Teorema 1.71 *Dacă $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie monotonă, atunci f poate avea doar discontinuităţi de specia I.*

1.7.3 Proprietăţi ale funcţiilor continue

Teorema 1.72 (Compunerea funcţiilor continue) *Fie $A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$ şi funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$.*

(i) Dacă f este continuă în $a \in A$, iar g este continuă în $f(a)$, atunci $g \circ f$ este continuă în a.

(ii) Dacă f este continuă pe A, iar g este continuă pe B, atunci $g \circ f$ este continuă pe A.

Teorema 1.73 (Operaţii cu funcţii continue) *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue pe A. Atunci:*

(i) $f + g$, λf sunt funcţii continue pe A;

(ii) $f \cdot g$ este continuă pe A;

(iii) $\dfrac{f}{g}$ este continuă pe mulţimea $A \setminus \{x \in A \mid g(x) = 0\}$;

(iv) $|f|, \min(f, g), \max(f, g)$ sunt funcţii continue pe A.

Teorema 1.74 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $a \in A$. Dacă f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe $U \cap A$.*

Teorema 1.75 (Păstrarea semnului) *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in A$. Dacă f este continuă în a şi $f(a) > 0$ (respectiv, $f(a) < 0$), atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).*

Teorema 1.76 *Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime compactă şi $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci $f(A)$ este compactă.*

Teorema 1.77 (Weierstrass) *Dacă $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă şi A este o mulţime compactă, atunci f este mărginită pe A şi îsi atinge marginile: există $a, b \in A$, astfel încât $\sup\limits_{x \in A} f(x) = f(a)$ şi $\inf\limits_{x \in A} f(x) = f(b)$.*

1.8 Proprietatea lui Darboux

Funcţiile continue pe un interval au proprietatea importantă că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare, adică dacă iau două valori diferite atunci iau toate valorile cuprinse între ele. Această proprietate a funcţiilor continue se numeşte proprietatea lui Darboux.

Definiţia 1.78 *O funcţie f definită pe un interval I* ***are proprietatea lui Darboux*** *dacă, oricare ar fi punctele $a, b \in I$, $a < b$, şi oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există un punct c_λ cuprins între a şi b astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.*

Altfel spus, $f : E \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe E dacă şi numai dacă imaginea oricărui interval $I \subset E$ prin funcţia f este un interval.

Teorema 1.79 *Fie $f : E \to \mathbb{R}$. Dacă f are proprietatea lui Darboux pe intervalul $I \subset E$, atunci $f(I)$ este un interval.*

Teorema 1.80 (Cauchy) *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă, astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.*

Ca o consecinţă a acestei teoreme avem următoarea proprietate: dacă o funcţie este continuă pe un interval şi nu se anulează pe acel interval, atunci păstrează acelaşi semn pe interval. Această proprietate este un instrument puternic în rezolvarea unor inecuaţii.

Condiţia ca funcţia să fie definită pe un interval este esenţială. Dacă funcţia este definită pe o mulţime care este o reuniune de intervale disjuncte, este posibil ca funcţia să ia valori diferite, dar să nu aibă nici o valoare intermediară.

Exemplul 1.81 Funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to R$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ este continuă pe domeniul ei de definiţie, ia numai valorile -1 şi 1 şi nu mai ia nicio valoare intermediară.

Teorema 1.82 *Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.*

Teorema 1.83 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă f are proprietatea lui Darboux, atunci f poate avea numai discontinuităţi de specia a II-a.*

Observaţia 1.84 *Proprietatea lui Darboux nu este caracteristică numai funcţiilor continue.*

Darboux a dat un exemplu de funcţie care are această proprietate şi care nu este continuă în nici un punct. Dăm un exemplu simplu de funcţie discontinuă într-un punct şi care are proprietatea lui Darboux:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Teorema 1.85 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este injectivă şi continuă, atunci f este strict monotonă pe I.*

Teorema 1.86 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $J = f(I)$. Atunci f este bijectivă de la I la J dacă şi numai dacă este strict monotonă. În acest caz, $f^{-1} : J \to I$ este strict monotonă şi continuă.*

Observaţia 1.87 *Prin intermediul teoremei anterioare, putem arăta continuitatea inverselor principalelor funcţii elementare. Spre exemplu, deoarece funcţia* $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *este bijectivă şi continuă, putem deduce că inversa sa,* $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *este strict crescătoare şi continuă.*

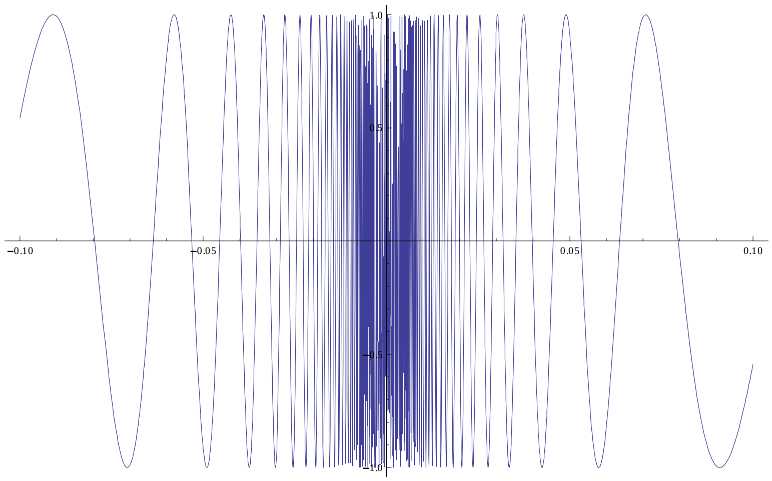

Figure 1: Graficul funcţiei f

1.9 Probleme

1.9.1 Limite

Exerciţiul 2 Să se calculeze limitele:

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+5x^2+4x-4}{x^2+5x+6}$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-5x^4+3x^2-2}{4x^4+x+1}$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+1}{-6x^3-3x^2-x+2}$. 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2+5x-3}$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+3}{2x^5+4}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x^2+3x-1}{7x+1}$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-3x+5}+x)$. 8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3x^3+x+3}{3x^3+x^2+1}\right)^{\frac{5x^2-1}{-x+3}}$.
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(\sqrt{x^2+2x+7}+x)$. 10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$. 12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\sqrt{3}\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} 3x}$.

Exerciţiul 3 Calculaţi limitele laterale ale următoarelor funcţii în punctele precizate:

(i) $f(x)=e^{\frac{1}{1-x^2}}$ în 1; (ii) $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right]$ în 0; (iii) $f(x)=\frac{1}{x^2(x-2)}$ în 0 şi 2;
(iv) $f(x)=\frac{1}{1-\cos x}$ în 2π; (v) $f(x)=\frac{1}{-3+3^{\frac{1}{x^2}}}$ în 0 şi 1.

Exerciţiul 4 Să se determine numerele reale a,b,c astfel încât să fie verificate relaţia:

$$\lim_{x\to-\infty} x\ln(\sqrt{x^2+bx+c}+ax)=5.$$

Exerciţiul 5 Să se arate că funcţiile următoare nu au limită în punctele specificate:

1. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, în $x_0 = 0$.
2. $f(x) = \cos x$, la $+\infty$.

Exerciţiul 6 Determinaţi asimptotele funcţiei $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Problema 1 Fie f, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât $\lim_{x\to 0+} g(x) = 0$ şi există $\alpha > 0$ şi $m, M > 0$ astfel încât $m \leq \frac{f(x)}{x^\alpha} \leq M$ pentru orice $x > 0$ dintr-o vecinătate a originii. Să se arate că dacă $\alpha \lim_{x\to 0+} g(x) \ln x = \gamma$ atunci $\lim_{x\to 0+} f(x)^{g(x)} = e^\gamma$ (considerăm $e^{+\infty} = \infty$ şi $e^{-\infty} = 0$). Ca aplicaţie, să se calculeze

$$\lim_{x\to 0+} \left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x.$$

Problema 2 Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $a \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} f(a+n) = 0$. Este adevărat că există $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Problema 3 Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $a \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} f(an) = 0$. Este adevărat că există $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

Problema 4 Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $a \geq 0$, $b > 0$ $\lim_{n\to\infty} f(a+bn) = 0$. Este adevărat că există $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

1.9.2 Continuitate

Exerciţiul 7 Să se studieze continuitatea funcţiilor. În caz de discontinuitate, precizaţi tipul acesteia:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+\operatorname{arctg} 3x)}{\sin 2x},\ x < 0 \\ \frac{3}{2},\ x = 0 \\ \frac{1}{\ln 5} \cdot \dfrac{5^{\sin(3x^2)} - 1}{1 - \cos 2x},\ x > 0 \end{cases}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \in \mathbb{Q} \\ x + 6,\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

Exerciţiul 8 Studiaţi continuitatea funcţiilor:
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} + x}{e^{nx} + 1};$$

(ii) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n + 1}.$$

Problema 5 Găsiţi toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$ să avem $f(x) + f(2x) = 0$.

Problema 6 Fie $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f^2(x) = 1$ pentru orice $x \in (0,1)$. Arătaţi că $f = 1$ sau $f = -1$.

Problema 7 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât

$$f\left(r + \frac{1}{n}\right) = f(r), \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că f este constantă.

Problema 8 Fie (a_n) un şir de numere strict pozitive, $a_n \to 0$. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă astfel încât $f(x + a_n) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că f este o funcţie constantă.

Problema 9 (a) Să se arate că nu există $f : [0,1] \to (0,1)$ continuă şi surjectivă.

(b) Daţi exemplu de o funcţie $f : (0,1) \to [0,1]$ continuă şi surjectivă. Arătaţi că o asemenea funcţie nu poate fi injectivă.

Problema 10 Fie $K \subset \mathbb{R}$ o mulţime compactă şi $f : K \to K$ cu proprietatea că

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \ \forall x, y \in K, x \neq y.$$

Să se arate că f are punct fix unic.

Problema 11 Studiaţi continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x = \frac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*, \ (m,n) = 1 \\ 0, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Problema 12 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ o funcţie astfel încât $f(2024) = 1 - f(2023)$ şi

$$\begin{vmatrix} 1 + f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1 + f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & 1 + f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & 1 + f(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

unde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sunt numere reale diferite, iar n este un număr natural. Arătaţi că f nu este continuă.

Problema 13 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, periodică de perioadă 1 (adică $f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

(i) Să se arate că f este mărginită şi îsi atinge marginile.

(ii) Să se arate că există $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

1.9.3 Proprietatea lui Darboux

Problema 14 Arătaţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ a, & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă $a\in(-1,1)$.

Problema 15 Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcţie continuă astfel încât $f\circ f=f$. Definim

$$E_f:=\{x\in[0,1]\mid f(x)=x\}.$$

(i) Arătaţi că $E_f\neq\emptyset$;
(ii) Arătaţi că E_f este un interval;
(iii) Găsiţi toate funcţiile cu proprietăţile de mai sus.

Problema 16 Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcţie astfel încât pentru orice $x\in(a,b)$, există un interval nedegenerat $[a_x,b_x]$ astfel încât $a<a_x<x<b_x<b$ astfel încât f este constantă pe $[a_x,b_x]$.
(i) Arătaţi că imaginea lui f este cel mult numărabilă.
(ii) Găsiţi toate funcţiile cu proprietatea lui Darboux care satisfac proprietatea de mai sus.

1.10 Limite, continuitate, PD la olimpiade

Problema 17 Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $g(x)=2f(x)+f(x^2)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că, dacă f este mărginită într-o vecinătate a originii, iar g este continuă în origine, atunci f este continuă în origine.

b) Daţi un exemplu de funcţie f, discontinuă în origine, pentru care funcţia g este continuă în origine.

O.N.M. 2024, Etapa naţională, P4

Problema 18 Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde f este continuă. Presupunem că, pentru oricare numere reale $a<b<c$, există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent la b pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$ şi are loc relaţia

$$f(a)<\lim_{n\to\infty} g(x_n)<f(c).$$

a) Daţi un exemplu de astfel de funcţii, pentru care g este discontinuă în orice punct real.

b) Arătaţi că, dacă g este monotonă, atunci $f=g$.

O.N.M. 2024, Etapa judeţeană, P4

Problema 19 Spunem că o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă oricare ar fi un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este convergent, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Demonstraţi că o funcţie surjectivă cu proprietatea (P) este continuă.

O.N.M. 2017, Etapa naţională, P1