1 Şiruri de numere reale - clasa a XI-a

Definiţia 1.1 *Un **şir de numere reale** este o funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *În acest caz* $f(n) = x_n$ *şi notăm şirul prin* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sau* (x_n).

x_n *se numeşte **termenul de rang*** n *al şirului.* $x_0, x_1, x_2, x_3, ...$ *se numesc termenii şirului.*

Definiţia 1.2 *Fie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *un şir. Se numeşte **subşir** restricţia lui* f *la o submulţime numărabilă* $N_1 \subset \mathbb{N}$.

Observaţia 1.3 *Pentru orice şir* (x_n) *de numere reale, un subşir al său va fi dat prin*

$$y_k = x_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

unde (n_k) *este un şir strict crescător de numere naturale.*

Deoarece n_k *este un şir strict crescător de numere naturale, se arată imediat că* $n_k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}$. *Pentru* $n_k = k$ *pentru orice* $k \in \mathbb{N}$ *subşirul* x_{n_k} *coincide cu şirul* x_k.

1.1 Modalităţi de definire a unui şir

I. Şiruri definite prin formula termenului general x_n.

$$x_n = \frac{n+1}{n^2}, n \geq 1.$$

II. Şiruri definite printr-o relaţie de recurenţă: un termen al şirului se exprimă în funcţie de k termeni anteriori, $k \geq 1$. În acest caz trebuie precizaţi şi primii k termeni ai şirului.

$$\begin{aligned}
&x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, n \geq 1, x_1 = \sqrt{2}\,(k = 1);\\
&x_{n+2} = x_n^2 - 3x_{n+1} + 2, n \geq 0, x_0 = 1, x_1 = 2\,(k = 2);\\
&x_0 = x, x_{n+1} = x_n + r, \text{ numerele } x, r \in \mathbb{R} \text{ date (progresie aritmetică)};\\
&x_0 = x, x_{n+1} = x_n q, \text{ numerele } x, q \in \mathbb{R} \text{ date (progresie geometrică)}.
\end{aligned}$$

III. Şiruri definite descriptiv.

$$x_1 = 1, x_2 = 11, ..., x_n = \underbrace{11...1}_{n}.$$

Putem descrie astfel: fiecare termen se scrie cu ajutorul cifrei 1 şi numărul cifrelor de 1 este egal cu rangul termenului.

1.2 Şiruri monotone

Definiţia 1.4 *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se numeşte:*

a) ***crescător*** *dacă* $x_n \leq x_{n+1}$, *pentru* $n \in \mathbb{N}$, *sau, echivalent,*

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq x_{n-1} \leq ...$$

b) ***strict crescător*** *dacă* $x_n < x_{n+1}$, *pentru* $n \in \mathbb{N}$, *sau, echivalent,*

$$x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n-1} < ...$$

c) ***descrescător*** *dacă* $x_n \geq x_{n+1}$*, pentru* $n \in \mathbb{N}$*, sau, echivalent,*

$$x_0 \geq x_1 \geq ... \geq x_n \geq x_{n-1} \geq ...$$

d) ***strict descrescător*** *dacă* $x_n > x_{n+1}$*, pentru* $n \in \mathbb{N}$*, sau, echivalent,*

$$x_0 > x_1 > ... > x_n > x_{n-1} > ...$$

Un şir crescător sau descrescător se numeşte şir ***monoton****. Un şir strict crescător sau strict descrescător se numeşte* ***strict monoton****.*

Se verifică uşor că orice subşir al unui şir monoton este un şir monoton.

Observaţia 1.5 *Se observă că un şir este monoton dacă şi numai dacă funcţia care defineşte şirul este monotonă.*

Procedee utilizate pentru demonstrarea monotoniei unui şir

I. Prin folosirea definiţiei:

$$x_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N},$$

Avem $x_n < x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)^2 \Leftrightarrow 0 < 1, \forall n \geq 0.$

II. Prin calculul diferenţei $x_{n+1} - x_n$ sau $x_n - x_{n+1}$ şi compararea cu zero:

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}, n \geq 1.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \\ - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} > 0, \end{aligned}$$

de unde $x_{n+1} > x_n$, pentru orice $n \geq 1$, deci (x_n) este un şir strict crescător.

III. În cazul în care şirul are termeni strict pozitivi, prin calculul raportului $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ sau $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$ şi compararea cu 1:

$$x_n = \frac{2^n}{n^2}, n \geq 1.$$

Avem:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{n+1} \leq 1, \quad n \geq 1.$$

Rezultă că, deoarece $x_n > 0$, $x_{n+1} \leq x_n$ şi deci şirul este monoton descrescător.

IV. Prin analizarea monotoniei funcţiei care defineşte şirul (tabel de variaţie): se va studia mai târziu.

Următorul rezultat se poate folosi în studiul monotoniei şirurilor definite prin relaţii de recurenţă.

Teorema 1.6 *Fie $f : I \to I, I \subseteq \mathbb{R}$ şi $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir definit prin relaţia $x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, x_0 \in I$. Atunci:*

- *Dacă f este crescătoare $\Rightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ este monoton;*
- *Dacă f este descrescătoare $\Rightarrow (x_{2n})_{n\geq 0}, (x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sunt monotone şi au monotonie diferită.*

Demonstraţie. Exerciţiu! $\square$

1.3 Şiruri mărginite

Definiţia 1.7 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **mărginit** dacă mulţimea termenilor şirului este mărginită.*

Propoziţia 1.8 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel încât $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Observaţia 1.9 *Este suficient ca inegalitatea să fie verificată numai începând cu un anumit rang.*

Propoziţia 1.10 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit dacă şi numai dacă oricare ar fi $M > 0$ există un termen x_k din şir astfel încât $|x_k| > M$.*

Exemplul 1.11 Şirul $1, 2, ..., n, ...$ este minorat (de 0, de exemplu), dar nu este majorat.

Exemplul 1.12 Şirul de termen general $x_n = (-1)^n, n \geq 1$ este mărginit, deoarece $|(-1)^n| \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$.

Exemplul 1.13 Şirul de termen general $y_n = n \sin \dfrac{n\pi}{2}, n \geq 1$ nu este mărginit.

Exemplul 1.14 Dacă $x > 1$, şirul $1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...$ este nemărginit.

1.4 Limita unui şir. Şiruri convergente/divergente

Definiţia 1.15 *1) Un şir de numere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **are limita** $\ell \in \mathbb{R}$ dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

*2) Un şir de numere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **are limita** $+\infty$ dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n > \varepsilon.$$

*3) Un şir de numere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **are limita** $-\infty$ dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n < -\varepsilon.$$

*Vom nota faptul că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **are limita** $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ astfel: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ sau $x_n \to \ell$ pentru $n \to \infty$.*

Definiţia 1.16 *Un şir de numere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **convergent** dacă are limită în $\mathbb{R}$. Dacă şirul nu are limită, sau are limită, dar aceasta este $+\infty$ sau $-\infty$, atunci spunem că şirul este **divergent**.*

Exemplul 1.17 Şirul de termen general $x_n = (-1)^n, n \geq 1$ nu are limită.

Exemplul 1.18 Fie şirul $x_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, deci (x_n) este convergent.

1.5 Proprietăţi ale şirurilor cu limită

Teorema 1.19 *1. Limita unui şir de numere reale, dacă există, este unică.*
2. Orice subşir al unui şir cu limita $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ are aceeaşi limită.
3. Orice şir convergent este mărginit.

Observaţia 1.20 *Conform acestei teoreme, dacă un şir are două subşiruri care tind la limite diferite, atunci şirul este divergent. Astfel, de exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$ analizat anterior conţine subşirurile $x_{2n} = 1$, care are limita 1, şi $x_{2n+1} = -1$, care are limita -1. Deci, $x_n = (-1)^n$ este un şir divergent.*

Observaţia 1.21 *Dacă un şir nu este mărginit, atunci el este divergent.*

Observaţia 1.22 *Mărginirea este o condiţie necesară, nu şi suficientă pentru convergenţă. Şirul de termen general $x_n = (-1)^n, n \geq 1$, deşi este mărginit, nu este convergent.*

Observaţia 1.23 *Dacă unui şir îi adăugăm sau eliminăm un număr finit de termeni, atunci natura şirului nu se schimbă. În caz de convergenţă nu se schimbă nici limita.*

Teorema 1.24 *Dacă un şir se poate partiţiona într-un număr finit de subşiruri, toate având aceeaşi limită $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul are limita ℓ.*

Exemplul 1.25 Fie şirul de termen general

$$x_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}, n \geq 1.$$

Atunci, cum toate subşirurile $(x_{4n}), (x_{4n+1}), (x_{4n+2}), (x_{4n+3})$ au limita 0, va rezulta că şirul converge la 0.

1.6 Operaţii cu şiruri convergente

Vom studia operaţiile cu şiruri şi legăturile între limitele şirurilor şi limita rezultatului operaţiei.

Teorema 1.26 (reguli de calcul) *1. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri convergente, şirul sumă este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Analog, şirul produs este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \neq 0$ atunci există un $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \neq 0$ pentru $n \geq k$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\ell}.$$

Din această teoremă decurg regulile de calcul posibile pentru operaţia de trecere la limită.

1.7 Criterii de determinare a limitei

Vom prezenta în continuare criterii şi teoreme cu ajutorul cărora vom putea calcula limita unui şir.

Propoziţia 1.27 *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri astfel încât* $y_n \geq 0$, $|x_n - x| \leq y_n, \forall n \geq n_0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Propoziţia 1.28 *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir mărginit, iar* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *salisface* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0$.

Exerciţiul 1.29 *Fie şirul* $x_n = \dfrac{1}{n}\sin(n!), n \in \mathbb{N}^*$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Propoziţia 1.30 *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$ *(reciproca nu este adevărată decât în cazul* $x = 0$*).*

Teorema 1.31 (trecerea la limită în inegalităţi) *Dacă şirurile* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt astfel încât* $x_n \leq y_n$ *pentru* $n \geq n_1$ *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *atunci* $x \leq y$.

Observaţia 1.32 *Dacă* $x_n < y_n$ *pentru* $n \geq n_1$ *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *atunci* $x \leq y$. *De exemplu, pentru* $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ *şi* $y_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ *avem* $x_n < y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *dar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Propoziţia 1.33 (criteriul cleştelui) *Dacă* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *pentru* $n \geq n_1$ *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$.

1.8 Limite remarcabile

A)

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim\limits_{n\to\infty} a_k n^k = \begin{cases} +\infty, a_k > 0 \\ -\infty, a_k < 0 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_k n^k + \cdot \cdot \cdot + a_1 n + a_0}{b_l n^l + \cdot + b_1 n + b_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_k n^k}{b_l n^l} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_l} \cdot \infty,\ k > l \\ \dfrac{a_k}{b_l},\ k = l \\ 0,\ k < l \end{cases}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty,\ a > 1 \\ 1, a = 1 \\ 0,\ |a| < 1 \\ \nexists, a \leq -1 \end{cases}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0, k \in \mathbb{N}^*, a \in (-1, 1)$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = \infty, k \in \mathbb{N}, a > 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, *numărul lui Euler*

9) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$

10) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c, c=$ *constanta lui Euler-Mascheroni.*

B)

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}=1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n}=1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}=1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0, 1+x_n>0$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0, a>0, a\neq 1$

7) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^r-1}{x_n}=r, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0, r\in\mathbb{R}.$

C)

1) **formula lui Wallis**

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}\right)^2.$$

2) **formula lui Stirling**

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\theta_n,\quad \theta_n\to 1.$$

1.9 Rezultate importante

Teorema 1.34 (Weierstrass)

1. Un şir de numere reale (x_n) crescător şi majorat este convergent, iar

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}x_n.$$

2. Un şir de numere reale (x_n) descrescător şi minorat este convergent, iar

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}x_n.$$

Exerciţiul 1.35 *Să se studieze convergenţa şirului de termen general*

$$x_n=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{5+2(n-1)}{4+3(n-1)},\quad n\geq 1.$$

Soluţie. Vom studia monotonia şi mărginirea. Pentru monotonie considerăm

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{5+2n}{4+3n}.$$

De aici rezultă că $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{5+2n}{4+3n}<1$, pentru orice $n\geq 1$, deci şirul este monoton descrescător.

Deoarece şirul este mărginit inferior de 0 rezultă că este convergent. Notăm limita sa cu ℓ.
Pentru a calcula limita folosim relaţia dintre x_n şi x_{n+1}. Avem

$$x_{n+1} = x_n \frac{5+2n}{4+3n}, \quad n \geq 1.$$

Trecând la limită şi ţinând seama că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \ell$, obţinem

$$\ell = \frac{2}{3}\ell \Rightarrow \ell = 0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. □

Teorema 1.36 (Lema lui Cesáro) *Orice şir mărginit de numere reale are cel puţin un subşir convergent.*

1.10 Şiruri fundamentale (Cauchy)

În definiţia convergenţei unui şir intervine limita şirului care numai în rare cazuri este cunoscută. Cauchy a dat un criteriu pentru a determina dacă un şir este convergent, fără să intervină limita şirului considerat.

Definiţia 1.37 *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **şir Cauchy** sau **şir fundamental** dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon, \tag{1.1}$$

sau, într-o formulare echivalentă,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Exerciţiul 1.38 *Arătaţi că şirul (x_n), unde*

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\alpha)}{2^k}, \ \forall n \geq 1,$$

este un şir Cauchy.

Observaţia 1.39 *Practic, pentru a arăta că un şir este şir Cauchy, este suficient să arătăm că $|x_{n+p} - x_n|$ este majorat pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ de a_n, unde $a_n \to 0$.*

Exerciţiul 1.40 *Arătaţi că şirul (x_n), unde*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \ \forall n \geq 1,$$

nu este un şir Cauchy.

Observaţia 1.41 *Practic, pentru a arăta că un şir este nu şir Cauchy, este suficient să arătăm că*

$$|x_{k_n} - x_{m_n}| \geq a_n \to \ell > 0,$$

unde $k_n, m_n \geq n$ pentru orice n.

Teorema 1.42 (Criteriul Cauchy de convergenţă) *Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

1.11 Şiruri cu limita $+\infty$ şi $-\infty$

Ca şi în cazul şirurilor convergente, putem pune în evidenţă câteva criterii pentru ca un şir să diveargă la $+\infty$ sau $-\infty$, dar şi reguli de calcul pentru astfel de şiruri.

Teorema 1.43 *1. Dacă (α_n) este un şir cu limita $+\infty$ iar (x_n) este un şir astfel încât $\alpha_n \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

2. Dacă (β_n) este un şir cu limita $-\infty$ iar (x_n) este un şir astfel încât $x_n \leq \beta_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Teorema 1.44 (reguli de calcul) *1. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, atunci $x_n + y_n \to +\infty$.*

2. Dacă $x_n \to -\infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, atunci $x_n + y_n \to -\infty$.

3. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in (0, \infty]$, atunci $x_n \cdot y_n \to +\infty$.

4. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in [-\infty, 0)$, atunci $x_n \cdot y_n \to -\infty$.

Observaţia 1.45 *Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to -\infty$ nu se poate spune nimic despre natura şirului $(x_n + y_n)$. De exemplu*

a) pentru $x_n = n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to 0$;

b) pentru $x_n = n$ şi $y_n = -2n$ avem $x_n + y_n \to -\infty$;

c) pentru $x_n = 2n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to +\infty$;

d) pentru $x_n = (-1)^n + n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n = (-1)^n$, care nu are limită.

*Despre astfel de situaţii vom spune că sunt **cazuri de nedeterminare**, sau **cazuri exceptate**.*

Teorema 1.46 *Dacă $x_n \to \infty$ sau $x_n \to -\infty$ atunci $\dfrac{1}{x_n} \to 0$. Invers, dacă $x_n \to 0$ şi (x_n) are un număr finit de termeni mai mici sau egali cu 0 (respectiv mai mari sau egali cu 0) atunci $\dfrac{1}{x_n}$ (definit cu excepţia acelor termeni pentru care $x_n = 0$) are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$).*

1.12 Teoremele Stolz-Cesaro

Teorema 1.47 (Stolz-Cesaro 1) *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile următoare:*

1) $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict monoton şi nemărginit;

2) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

Teorema 1.48 (Stolz-Cesaro 2) *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale cu proprietăţile următoare:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

2) şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict monoton;

3) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

Corolarul 1.49 *Fie* $(a_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere pozitive cu proprietatea că există* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Teorema 1.50 *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere pozitive cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. *Atunci: dacă* $\ell < 1$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *iar dacă* $\ell > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

1.13 Subşiruri. Puncte limită. Limită inferioară şi superioară

Pentru un şir oarecare (x_n) introducem atunci mulţimile

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$$

(din mulţimea termenilor şirului îi eliminăm pe cei până la rangul $n-1$). Avem atunci

$$A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cum orice mulţime nevidă din $\mathbb{R}$ este mărginită în $\overline{\mathbb{R}}$, putem defini

$$\begin{aligned} y_n &= \sup A_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{şi} \\ z_n &= \inf A_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ avem

$$z_n \leq z_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fiind şiruri monotone, acestea au limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Numim *limită superioară* a şirului (x_n) elementul $y \in \overline{\mathbb{R}}$ dat prin

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left[\sup\{x_k | k \geq n\}\right].$$

Numim *limită inferioară* a şirului (x_n) elementul $z \in \overline{\mathbb{R}}$ dat prin

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left[\inf\{x_k | k \geq n\}\right].$$

Aceste limite există întotdeauna în $\overline{\mathbb{R}}$.

Vom nota limita superioară a şirului (x_n) prin

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \quad \text{sau} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

iar limita inferioară prin

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \quad \text{sau} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Deoarece (y_n) este şir descrescător, limita sa este egală cu marginea inferioară a mulţimii termenilor şirului, adică:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k.$$

Analog se observă că:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k.$$

Deoarece $z_n \le y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, adică $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Având în vedere că $\sup(-A) = -\inf A$ rezultă că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n), \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty}(-x_n).$$

Au loc următoarele rezultate:

Teorema 1.51 *Un şir numeric (x_n) are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. În acest caz,*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Teorema 1.52 *Pentru orice şir de numere reale (x_n) există un subşir al său, monoton, convergent la limita superioară a lui (x_n) şi există un subşir monoton, convergent la limita inferioară a lui (x_n).*

Teorema 1.53 *Dacă (x_n) este un şir de numere reale iar $\mathcal{L}$ este* mulţimea punctelor limită *ale şirului (x_n), i.e.,*

$$\mathcal{L} = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \ \text{există subşir } (x_{n_k}) \text{ al lui } (x_n) \text{ cu } x_{n_k} \to x\right\},$$

atunci:

(i) $\mathcal{L}$ este nevidă;

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \sup \mathcal{L}$ şi $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf \mathcal{L}$;

(iii) (x_n) are limită dacă şi numai dacă $\mathcal{L}$ este formată dintr-un singur element.

Teorema 1.54 (reguli de calcul) *1) Dacă (x_n) şi (y_n) sunt şiruri de numere reale astfel încât $x_n \le y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{n\to\infty} y_n \text{ şi } \limsup_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

2) Dacă (x_n) şi (y_n) sunt şiruri mărginite atunci:

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n + \liminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \liminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$;

(iii) $\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$, dacă $x_n \ge 0$ şi $y_n \ge 0$.

(iv) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \liminf\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)$, dacă $x_n \ge 0$ şi $y_n \ge 0$.

Rezultatele (i)-(iv) rămân valabile şi pentru şiruri nemărginite, ori de câte ori operaţiile care intervin au sens în $\overline{\mathbb{R}}$.

1.14 Recurenţe de şiruri

1.14.1 Recurenţe liniare omogene, cu coeficienţi constanţi

Sunt date de formula:

$$x_{n+p} = a_1 \cdot x_{n+p-1} + a_2 \cdot x_{n+p-2} + \ldots + a_{p-1} \cdot x_{n+1} + a_p \cdot x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, p \ge 3,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sunt termeni iniţial daţi, iar $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sunt constante date.

Determinarea explicită a unor astfel de şiruri se va face astfel:

- se rezolvă ecuaţia caracteristică $t^p = a_1 \cdot t^{p-1} + a_2 \cdot t^{p-2} + \ldots + a_{p-1} \cdot t + a_p$;

- se clasifică rădăcinile distincte după ordinul de multiplicitate;

- dacă $t_1 \in \mathbb{C}$ este rădăcină simplă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $A \cdot t_1^n$;

- dacă $t_2 \in \mathbb{C}$ este rădăcină dublă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $(nB + C) \cdot t_2^n$;

- dacă $t_3 \in \mathbb{C}$ este rădăcină triplă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $\left(n^2D + nE + F\right) \cdot t_3^n$, etc.

Coeficienţii A, B, C etc. se obţin din sistemul termenilor iniţiali ai recurenţei.

Exerciţiul 1.55 *Explicitaţi şirul dat de recurenţa:*

$$\begin{cases} x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2, x_2 = 7. \end{cases}$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică conduce la rădăcina dublă $t_1 = 3$, deci $x_n = (nA + B) \cdot 3^n$ şi din sistemul termenilor iniţiali,

$$\begin{cases} (A + B) \cdot 3 = 2 \\ (2A + B) \cdot 3^2 = 7, \end{cases}$$

obţinem $A = \dfrac{1}{9}, B = \dfrac{5}{9}$ şi formula termenului general

$$x_n = (n + 5) \cdot 3^{n-2}.$$

□

Exerciţiul 1.56 *Explicitaţi şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 4, x_2 = 5. \end{cases}$$

Soluţie. De această dată ecuaţia caracteristică are rădăcinile simple $t_1 = 2, t_2 = 3$, deci $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$ cu

$$\begin{cases} 2A + 3B = 4 \\ 4A + 9B = 5, \end{cases}$$

rezultând $A = \dfrac{7}{2}, B = -1$ şi formula termenului general

$$x_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3^n.$$

□

Exerciţiul 1.57 *Explicitaţi şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+3} = 7x_{n+2} - 16x_{n+1} + 12x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 5. \end{cases}$$

Soluţie. În acest caz ecuaţia caracteristică este $t^3 - 7t^2 + 16t - 12 = 0$, cu $t_1 = 3$ rădăcină simplă şi $t_2 = t_3 = 2$ rădăcină dublă, deci termenul general al şirului va avea forma

$$x_n = A \cdot 3^n + (nB + C) \cdot 2^n.$$

Din sistemul termenilor iniţiali se determină coeficienţii, $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}$ şi se obţine

$$x_n = 3^{n-1} + (1-n) \cdot 2^{n-2}. \qquad \square$$

Exerciţii propuse:

Exerciţiul 1.58 *Explicitaţi următoarele recurenţe:*

a) $\begin{cases} x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_{n+2} = 10x_{n+1} - 25x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 3. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 10x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2, x_2 = 3. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_{n+3} = 8x_{n+2} - 21x_{n+1} + 18x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 6. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_{n+3} = x_{n+2} + 16x_{n+1} + 20x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 3. \end{cases}$

1.14.2 Recurenţe liniare neomogene, cu coeficienţi constanţi

Sunt date de formula:

$$x_{n+p} = a_1 \cdot x_{n+p-1} + a_2 \cdot x_{n+p-2} + \ldots + a_{p-1} \cdot x_{n+1} + a_p \cdot x_n + b, \forall n \in \mathbb{N}^*, p \geq 3,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sunt termeni iniţial daţi, iar $a_1, a_2, \ldots, a_p, b$ sunt constante date.

La fel ca la recurenţa neomogenă de ordin doi cu coeficienţi constanţţi:

- se rezolvă ecuaţia caracteristică $t^p = a_1 \cdot t^{p-1} + a_2 \cdot t^{p-2} + \ldots + a_{p-1} \cdot t + a_p$;

- se clasifică rădăcinile distincte după ordinul de multiplicitate;

- dacă $t_1 \in \mathbb{C}$ este rădăcină simplă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $A \cdot t_1^n$;

- dacă $t_2 \in \mathbb{C}$ este rădăcină dublă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $(nB + C) \cdot t_2^n$;

- dacă $t_3 \in \mathbb{C}$ este rădăcină triplă, ea se va prezenta în exprimarea termenului general x_n aditiv sub forma $\left(n^2 D + nE + F\right) \cdot t_3^n$ etc.

- se introduce coeficientul termen liber G.

Coeficienţii $A, B, C, \ldots, G$ etc. se obţin din sistemul termenilor iniţiali ai recurenţei.

Exerciţiul 1.59 *Explicitaţi şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + 3, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 2. \end{cases}$$

Soluţie. În acest caz, ecuaţţia caracteristică $t^2 - 4t + 4 = 0$ conduce la $t_1 = t_2 = 2$, deci

$$x_n = (nA + B) \cdot 2^n + C$$

şi din sistemul termenilor iniţiali, inclusiv $x_3 = 4x_2 - 4x_1 + 3 = 7$, se obţin $A = \frac{3}{4}, B = -\frac{7}{4}, C = 3$, şi în final

$$x_n = (3n-7) \cdot 2^{n-2} + 3. \qquad \square$$

Exerciţiul 1.60 *Explicitaţi şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 3, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 2. \end{cases}.$$

Soluţie. De această dată ecuaţia caracteristică are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = 3$, deci

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + C.$$

Având $x_3 = 5x_2 - 6x_1 + 3 = 7$, din sistemul celor trei termeni cunoscuţi obţin $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}$, de unde

$$x_n = \frac{3^n - 2^{n+1} + 3}{2}.$$

□

Exerciţiul 1.61 *Explicitaţi şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+3} = 7x_{n+2} - 16x_{n+1} + 12x_n - 1, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = x_2 = x_3 = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică este $t^3 - 7t^2 + 16t - 12 = 0$, cu $t_1 = 3$ rădăcină simplă şi $t_2 = t_3 = 2$ rădăcină dublă, deci termenul general al şirului va avea forma

$$x_n = A \cdot 3^n + (nB + C) \cdot 2^n + D.$$

Din sistemul termenilor iniţiali şi $x_4 = \ldots = 2$ se obţine $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}, D = \frac{1}{2}$ şi se obţine

$$x_n = \frac{3^{n-1} + (1-n) \cdot 2^{n-1} + 1}{2}.$$

□

Exerciţii propuse:

Exerciţiul 1.62 *Explicitaţi următoarele recurenţe:*

Exerciţiul 1.63 *a)* $\begin{cases} x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + 5, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_{n+2} = 10x_{n+1} - 25x_n + 3, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 12x_n + 2, n \in \mathbb{N} \\ x_1 = 1, x_2 = 3. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x_{n+2} = 7x_{n+1} - 10x_n + 1, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2, x_2 = 3. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_{n+3} = 8x_{n+2} - 21x_{n+1} + 18 \\ x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_{n+3} = x_{n+2} + 16x_{n+1} + 20x_n - 15, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0. \end{cases}$

1.14.3 Recurenţa telescopică aditivă

Este definită prin:

$$x_{n+1} = x_n + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde x_1 este termen iniţial dat, iar (a_n) este un şir explicit dat.

Din relaţia de recurenţă, obţinem

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Rightarrow x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

În aplicaţiile curente, suma iterată $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ se va constata de regulă calculabilă.

Utilă se va dovedi în acest sens şi procedura de descompunere a fracţiilor raţionale în supranumitele sume de fracţii simple (metoda coeficienţilor nedeterminaţi), care va facilita calculul unor sume iterate $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k$ cu termenul general, $t_k = \dfrac{f(k)}{g(k)}$, fracţii având $f(k)$ şi $g(k)$ expresii polinomiale.

Exerciţii propuse:

Exerciţiul 1.64 *Explicitaţi următoarele recurenţe:*

a) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{n^2+5n+6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{4n^2+8n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$

1.14.4 Recurenţa telescopică multiplicativă

Este dată prin:

$$x_{n+1} = x_n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde x_1 este termen iniţial dat, iar (a_n) este un şir explicit dat.

Procedura este asemănătoare cu cea de la recurenţa telescopică aditivă, de această dată însă eliminările ce conduc la aflarea expresiei termenului general al şirului apar la efectuarea produsului iterat corespunzător exprimărilor particulare, respectiv din

$$x_{n+1} = x_n \cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

şi astfel obţinem

$$x_n = x_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k,$$

produs care în aplicaţile propuse se va restrânge, uneori prin simplificări telescopice, alteori prin exprimări combinatorice adecvate.

Exerciţii propuse:

Exerciţiul 1.65 *Explicitaţi următoarele recurenţe:*

a) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+4n+3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$

1.14.5 Recurenţa liniară neomogenă de ordin I, cu coeficienţi variabili

Este dată prin:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde x_1 este termen iniţial dat, iar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt şiruri explicit date.

Explicitarea acestei recurenţe se va baza pe transformarea ei într-o recurenţă telescopică aditivă. Într-adevăr, introducând substituţia

$$a_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}, \quad y_1 = 1,$$

relaţia de recurenţă devine

$$x_{n+1} \cdot y_{n+1} = x_n \cdot y_n + b_n \cdot y_{n+1}.$$

Obţinem

$$x_{n+1} \cdot y_{n+1} - x_1 \cdot y_1 = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot y_{k+1}.$$

Pentru finalizarea explicitării este necesară doar determinarea şirului $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ introdus de substituţia efectuată. Se obţine imediat

$$y_{n+1} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k},$$

şi de aici

$$x_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k\right) \cdot \left(x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{\prod_{i=1}^{k-1} a_i}\right), \quad \forall n \geq 2.$$

Evident că în aplicaţii este de preferat parcurgerea integrală a raţionamentului expus.

Exemplul 1.66 Explicitaţi şirul dat de recurenţa

$$\begin{cases} x_{n+1} = n \cdot x_n + n!, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Notând
$$n = \frac{y_n}{y_{n+1}}, \quad y_1 = 1,$$
obţinem
$$x_{n+1} \cdot y_{n+1} - x_n \cdot y_n = n! \cdot y_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Dar
$$\frac{y_1}{y_2} = 1, \frac{y_2}{y_3} = 2, \ldots, \frac{y_n}{y_{n+1}} = n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{n!},$$
deci
$$x_{n+1} \cdot y_{n+1} = x_n \cdot y_n + 1,$$
care conduce imediat la
$$x_n \cdot y_n = x_1 \cdot y_1 + (n-1)$$
şi în final $x_n = n!$ □

Exerciţii propuse:

Exerciţiul 1.67 *Explicitaţi următoarele recurenţe:*

a) $\begin{cases} x_{n+1} = n \cdot x_n + (n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{n} \cdot x_n + \dfrac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$

1.14.6 Recurenţa liniară omogenă de ordin II, cu coeficienţi variabili

Este dată prin:
$$x_{n+2} = a_n \cdot x_{n+1} + b_n \cdot x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$
unde x_1, x_2 sunt termeni iniţial daţi, iar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt şiruri explicit date.

Vom prezenta doar un rezultat parţial legat de explicitarea acestui tip de recurenţă. Acesta este conţinut de afirmaţia: dacă ecuaţia $t^2 - a_n \cdot t - b_n = 0$ admite o rădăcină care nu depinde de $n \in \mathbb{N}^*$, atunci recurenţa devine explicitabilă. Într-adevăr, dacă supranumita ecuaţie caracteristică a recurenţei are rădăcinile $t_1 = \alpha$ şi $t_2 = \beta_n$ atunci $\alpha + \beta_n = a_n$ şi $\alpha \cdot \beta_n = -b_n$. În acest caz vom obţine
$$x_{n+2} = (\alpha + \beta_n) \cdot x_{n+1} - \alpha\beta_n \cdot x_n \Leftrightarrow x_{n+2} - \alpha x_{n+1} = \beta_n \cdot (x_{n+1} - \alpha x_n),$$
recurenţă telescopică multiplicativă care va permite determinarea $x_{n+1} = \alpha x_n + y_n$, obţinând
$$y_1 = x_2 - \alpha x_1, y_n = (x_2 - \alpha x_1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \beta_k, \forall n \geq 2.$$
Dar recurenţa $x_{n+1} = \alpha x_n + y_n$ a fost şi ea tratată anterior şi particularizată pe această situaţie conduce în final la forma explicită
$$x_n = \alpha^{n-1} \cdot \left[\frac{x_2}{\alpha} + (x_2 - \alpha x_1) \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} \beta_i}{\alpha^k} \right], \forall n \geq 3.$$

Exerciţiul 1.68 *Explicitaţi şirul dat de recurenţa:*
$$\begin{cases} n x_{n+2} = 2(2n+1) x_{n+1} - 4(n+1) x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 3. \end{cases}$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică

$$nt^2 - 2(2n+1)t + 4(n+1) = 0$$

are rădăcinile

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{2(n+1)}{n},$$

deci suntem în condiţii favorabile explicitării. Folosind cunoscutele relaţii dintre rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei de gradul doi, relaţia de recurenţă se va scrie în forma

$$x_{n+2} = \left[2 + \frac{2(n+1)}{n}\right] \cdot x_{n+1} - \frac{4(n+1)}{n} \cdot x_n$$

de unde

$$\frac{x_{n+2} - 2x_{n+1}}{x_{n+1} - 2x_n} = \frac{2(n+1)}{n}.$$

De aici se va repeta raţionamentul întâlnit la recurenţa telescopică multiplicativă, obţinând

$$x_{n+1} - 2x_n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Dar recurenţa $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + n \cdot 2^{n-1} \\ x_1 = 1 \end{cases}$ este de tip cunoscut, de această dată procedura de explicitare finalizând cu $x_n = \left(n^2 - n + 4\right) \cdot 2^{n-3}, \forall n \geq 3.$ $\square$

Exerciţii propuse:

Exerciţiul 1.69 *Explicitaţi următoarele recurenţe:*

a) $\begin{cases} nx_{n+2} = 3(2n+1)x_{n+1} - 9(n+1)x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} n^2 x_{n+2} = 2\left(2n^2 + 2n + 1\right) x_{n+1} - 4(n+1)^2 x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} n^3 x_{n+2} = 2\left(2n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) x_{n+1} - 4(n+1)^3 x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2, x_2 = 5. \end{cases}$

d) $\begin{cases} n^2 x_{n+2} = 2\left(2n^2 + 3n + 2\right) x_{n+1} - 4\left(n^2 + 3n + 2\right) x_n, n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1, x_2 = 5. \end{cases}$

1.14.7 Recurenţa omografică cu coeficienţi variabili

Este dată de formula:

$$x_{n+1} = \frac{a_n \cdot x_n + b_n}{c_n \cdot x_n + d_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde x_1 este termen iniţial dat, iar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt şiruri explicit date.

La aceste recurenţe vom analiza următoarele două cazuri:

I) Cazul $b_n = 0$

După cum uşor se va observa, această particularitate permite totdeauna finalizarea explicitării. Într-adevăr

$$x_{n+1} = \frac{a_n \cdot x_n}{c_n \cdot x_n + d_n} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{d_n}{a_n} \cdot \frac{1}{x_n} + \frac{c_n}{a_n}$$

deci notând $\frac{1}{x_n} = y_n$, recurenţa ia forma $y_{n+1} = A_n \cdot y_n + B_n$ care este explicitabilă.

II) Cazul $b_n \neq 0$

Un rezultat parţial în astfel de situaţii este următorul:

- introducem substituţia $c_n x_n + d_n = y_n \Rightarrow$ recurenţa ia forma $y_{n+1} \cdot y_n = A_n \cdot y_n + B_n$
- introducem substituţia

$$y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}, z_1 = 1,$$

iar recurenţa ia forma

$$z_{n+2} = A_n \cdot z_{n+1} + B_n \cdot z_n$$

cu $z_1 = 1$ şi $z_2 = \ldots = c_1 \cdot x_1 + d_1$, deci dacă ecuaţia caracteristică $t^2 - A_n \cdot t - B_n = 0$ are o rădăcină nedependentă de $n \in \mathbb{N}^*$ atunci z_n devine determinabil prin procedura descrisă anterior şi astfel

$$x_n = \frac{y_n - d_n}{c_n} = \frac{z_{n+1} - d_n \cdot z_n}{c_n \cdot z_n}.$$

Exerciţiul 1.70 ($b_n = 0$) *Explicitaţi şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n! \cdot x_n + n} \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Cu $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ recurenţa devine $y_{n+1} = n y_n + n!, y_1 = 1$ (explicitată anterior) din care se va obţine $y_n = n!$ şi în final $x_n = \dfrac{1}{n!}$. $\square$

1.14.8 Recurenţa omografică cu coeficienţi constanţi

Este dată prin:

$$x_{n+1} = \frac{a \cdot x_n + b}{c \cdot x_n + d}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde x_1 este termen iniţial dat, iar a, b, c, d sunt constante date.

Fiind particularizare a celei anterioare, se vor parcurge raţionamente analoge, conform cu fiecare din situaţiile:

I) Cazul $b = 0$

Având

$$x_{n+1} = \frac{a \cdot x_n}{c \cdot x_n + d} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{d}{a} \cdot \frac{1}{x_n} + \frac{c}{a},$$

deci notând $\dfrac{1}{x_n} = y_n$ recurenţa ia forma $y_{n+1} = A \cdot y_n + B$ care este explicitabilă. În această situaţie termenul general se va obţine de forma

$$x_n = \frac{a^n}{\alpha \cdot d^n + \beta \cdot a^n},$$

cu coeficienţii α şi β determinabili din sistemul primilor doi termeni, observaţie care poate scurta sensibil explicitarea.

II) Cazul $b \neq 0$

În aceasă situaţie:

- introducem substituţia $c x_n + d = y_n \Rightarrow$ recurenţa ia forma $y_{n+1} \cdot y_n = A \cdot y_n + B$

- introducem substituţia $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}, z_1 = 1 \Rightarrow$ recurenţa ia forma $z_{n+2} = A \cdot z_{n+1} + B \cdot z_n$ cu $z_1 = 1$ şi $z_2 = \ldots = c \cdot x_1 + d \Rightarrow$ determinăm $z_n \Rightarrow$ determinăm $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ şi finalizăm obţinând

$$x_n = \frac{y_n - d}{c} = \frac{z_{n+1} - d \cdot z_n}{c \cdot z_n}.$$

De această dată forma termenului general va fi decisă de ordinul de multiplicitate a rădăcinilor ecuaţiei $t^2 - A \cdot t - B = 0$, respectiv $x_n = \dfrac{n \cdot \alpha + \beta}{n + \gamma}$ când $t_1 = t_2$ şi $x_n = \dfrac{\alpha \cdot t_1^n + \beta \cdot t_2^n}{t_1^n + \gamma \cdot t_2^n}$ când $t_1 \neq t_2$, coeficienţii α, β, γ fiind determinabili din sistemul primilor trei termeni.

Exerciţiul 1.71 ($b = 0$) *Explicitaţi şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{3x_n + 5}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Obţinem $\dfrac{1}{x_{n+1}} = 5 \cdot \dfrac{1}{x_n} + 3 \Rightarrow x_n = \dfrac{1}{A \cdot 3^n + B}$ etc. □

Exerciţiul 1.72 ($b \neq 0, t_1 = t_2$) *Explicitaţi şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{5x_n - 1}{4x_n + 1} \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Aplicarea substituţiilor

$$cx_n + d = y_n, y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}, z_1 = 1$$

va conduce la recurenţă omogenă de ordin doi. Se obţin rădăcini ale ecuaţiei caracteristice $t_1 = t_2 = 3$ etc., cu finalizarea

$$x_n = \frac{n + 2}{2n + 1}.$$ □

Exerciţiul 1.73 ($b \neq 0, t_1 \neq t_2$) *Explicităm şirul dat de recurenţa*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{7x_n - 4}{5x_n - 2} \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Soluţie. Aplicarea substituţiilor

$$cx_n + d = y_n, y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}, z_1 = 1$$

va pune în evidenţă recurenţa omogenă de ordin doi. Se vor obţine rădăcini ale ecuaţiei caracteristice $t_1 = 2, t_2 = 3$, etc., cu finalizarea

$$x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 5 \cdot 2^{n-2}}.$$ □

Exerciţii propuse:

Exerciţiul 1.74 *Explicitaţi următoarele recurenţe:*

I) Cazul $b = 0$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{5x_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 1. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{3x_n + 7}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2. \end{cases}$

II) Cazul $b \neq 0, t_1 = t_2$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{5x_n + 3}{3x_n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{3x_n - 1}{x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2. \end{cases}$

III) Cazul $b \neq 0, t_1 \neq t_2$

a) $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4x_n - 1}{2x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 2. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{5x_n - 2}{x_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ x_1 = 3. \end{cases}$

2 Probleme propuse

2.1 Câteva şiruri importante

Problema 2.1 (numărul e este iraţional) *Considerăm şirurile (u_n) şi (v_n) de numere reale definite prin*

$$\forall n \geq 1 : u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{şi} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

a) Să se arate că (u_n) şi (v_n) sunt adiacente. Notăm limita comună a acestor şiruri cu e.

b) Să se arate că

$$\forall n \geq 1 : n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}.$$

c) Utilizând metoda reducerii la absurd, deduceţi că numărul e este iraţional.

d) Calculaţi limitele:

$$a) \lim_{n\to\infty} n \cdot \{en!\}.$$
$$b) \lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi en!).$$

Problema 2.2 (Fibonacci) *Considerăm şirul*

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}.$$

*a) Deduceţi **formula lui Binet***

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \tau^n),$$

unde φ şi τ sunt soluţiile reale ale ecuaţiei $x^2 = x + 1$, i.e.

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad \text{şi}$$

$$\tau = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618.$$

Numărul φ se numeşte ***secţiunea de aur****.*

b) Demonstraţi ***identitatea lui Cassini***

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

c) Calculaţi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

2.2 Calcul de limite

Problema 2.3 *Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$x_n = n^\alpha \left(\frac{n+3}{n+4} - \frac{n+4}{n+3}\right)\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)$$

să fie convergent.

Problema 2.4 *Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât să fie verificate relaţiile:*

$$\lim_{n\to\infty} n \ln(\sqrt{n^2+bn+c} + an) = 2.$$

Problema 2.5 *Calculaţi limitele:*

$$a)\ \lim \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n}\right);$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2} + ... + \frac{n^2}{n^3+n}\right);$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a + \overline{aa} + \overline{aaa} + ... + \overset{n\ cifre}{\overline{aa...a}}}{n};$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + ... + a_p^n}{p}},$$ *unde $a_1, a_2, ..., a_p > 0$ sunt numere date, fixate.*

Problema 2.6 *Folosind criteriile Cesaro-Stolz (prima sau a doua formă), să se calculeze limitele:*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n \ln n}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[k]{2^{k-1}}} + \frac{1}{\sqrt[k]{3^{k-1}}} + ... + \frac{1}{\sqrt[k]{n^{k-1}}}\right)$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este fixat;
3. $\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2\right)$.

Problema 2.7 *Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge spre a, atunci şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unde*

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, n \geq 1$$

converge către aceeaşi limită a.

Problema 2.8 *Dacă şirul de numere pozitive* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge spre* a, *atunci şirul*

$$a_1, \sqrt{a_1 a_2}, ..., \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}, ...$$

tinde de asemenea către a.

Problema 2.9 *Să se calculeze:*

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n};\quad 2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};\quad 3.\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!8^n}}.$$

Problema 2.10 *Să se calculeze*

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \left(e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}} - e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\right).$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(e^{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}} - 2e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}}\right).$$

2.3 Studiul convergenţei

Problema 2.11 *Arătaţi că următoarele şiruri sunt convergente:*

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....\frac{1}{n}-\ln n\right)_{n\geq 1};$$

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right)_{n\geq 1};$$

$$\left(1+\frac{1}{2\ln 2}+...+\frac{1}{n\ln n}-\ln(\ln n)\right)_{n\geq 2}.$$

Problema 2.12 *Se definesc şirurile* $(x_n), (y_n)$ *de termeni generali*

$$x_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1},\quad \forall n\geq 1$$

$$y_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n},\quad \forall n\geq 1.$$

Demonstraţi că cele două şiruri sunt monotone, mărginite şi au aceeaşi limită care aparţine intervalului $(-2,-1)$.

Problema 2.13 *Fie* a *şi* b *două numere pozitive. Să se calculeze limita şirului* (x_n) *definit de relaţia:*

$$x_{n+1} = \sqrt{a+bx_n},\ \forall n\geq 1,\ x_1=\sqrt{a}.$$

În particular, să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...+\sqrt{1}}}},\ \ (n\ radicali).$$

Problema 2.14 (criteriul Cauchy) *Arătaţi că un şir de numere reale* (a_n) *este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

Problema 2.15 *Verificaţi dacă şirul* (a_n) *este fundamental, dacă termenul general are formula:*

1. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ $, n \geq 1.$
2. $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ $, n \geq 1.$
3. $a_n = \frac{\sin 1}{5} + \frac{\sin 2}{5^2} + ... + \frac{\sin n}{5^n}$ $, n \geq 1.$
4. $a_n = \frac{\cos \alpha}{1^2} + \frac{\cos 2\alpha}{2^2} + ... + \frac{\cos n\alpha}{n^2}$ $, n \geq 1.$
5. $x_n = \frac{a_1}{1^p} + \frac{a_2}{2^p} + ... + \frac{a_n}{n^p},\ n \geq 1;\ p \geq 2,\ p \in \mathbb{R}, (a_n)_n$ *şir mărginit de numere reale.*
6. $x_n = a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + ... a_n q^{n-1}, n \geq 1; q \in (-1, 1)\,, (a_n)_n$ *şir mărginit de numere reale.*
7. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ $, n \geq 1.$
8. $a_n = \frac{\sigma(1)}{1^2} + \frac{\sigma(2)}{2^2} + \frac{\sigma(3)}{3^2} + ... + \frac{\sigma(n)}{n^2},\ n \geq 1,$ *unde* $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *este o funcţie bijectivă.*

2.4 Recurenţe neliniare

Problema 2.16 *Fie şirul* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat prin relaţia de recurenţă:*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right), \forall n \geq 0, \quad u_0 = 1.$$

a) Arătaţi că $u_n \geq \sqrt{5}, \forall n \in \mathbb{N}.$

b) Studiaţi monotonia şirului.

c) Studiaţi convergenţa şirului, iar în cazul în care este convergent, determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.$

Problema 2.17 *Fie şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat prin relaţia de recurenţă:*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}, \forall n \geq 0, \quad a_0 = 1.$$

a) Studiaţi monotonia şirului.

b) Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n.$

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(a_n - 1)\,.$

Problema 2.18 *Fie şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat prin relaţia de recurenţă:*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}, \forall n \geq 0, \quad x_0 = 1.$$

a) Studiaţi monotonia şirului.

b) Folosind punctul anterior, rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}.$ *Arătaţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$

Problema 2.19 *Fie şirul* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat prin relaţia de recurenţă:*

$$v_{n+1} = e^{v_n} - 1, \forall n \geq 0, \quad v_0 = -1.$$

a) Studiaţi semnul funcţiei $x \mapsto e^x - 1 - x$.
b) Studiaţi monotonia şirului şi arătaţi că $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.
c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} (nv_n)$.

Problema 2.20 *Fie şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat prin relaţia de recurenţă:*

$$y_{n+1} = y_n - y_n^2, \forall n \geq 0, \quad y_0 = \frac{1}{2}.$$

a) Studiaţi monotonia şirului.
b) Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.
c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n}$.

Problema 2.21 *Fie şirul* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat prin relaţia de recurenţă:*

$$z_{n+1} = z_n + 2^{-z_n}, \forall n \geq 0, \quad z_0 = 0.$$

a) Studiaţi monotonia şirului.
b) Folosind punctul anterior, rezultă că există $\lim_{n\to\infty} z_n \in \overline{\mathbb{R}}$. *Arătaţi că* $\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty$.
c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\ln n}$.

Problema 2.22 *Fie şirul* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat prin relaţia de recurenţă:*

$$t_{n+1} = t_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \forall n \geq 0, \quad t_0 = 0.$$

a) Studiaţi monotonia şirului $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *unde* $u_n = t_n - 2\sqrt{n}, \forall n \geq 0$.
b) Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$.
c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{\sqrt{n}}$.

Problema 2.23 *Dat* $\alpha > 0$, *considerăm şirul* $(u_n)_{n\geq 1}$ *dat prin relaţia de recurenţă:*

$$u_{n+1} = \frac{n}{n+\alpha} \cdot u_n, \forall n \geq 1, \quad u_1 > 0.$$

a) Studiaţi monotonia şirului.
b) Arătaţi că şirul este convergent.
c) Definim şirurile $(v_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(w_n)_{n\geq 1}$ *prin:*

$$v_n = \ln (n^\alpha u_n) \quad \text{şi} \quad w_n = v_{n+1} - v_n, \forall n \geq 1.$$

Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \left(n^2 w_n\right)$. *(Indicaţie: se poate folosi o schimbare de variabilă, apoi regula lui L'Hôpital).*

Problema 2.24 *Considerăm şirul* $(v_n)_{n\geq 1}$ *definit prin*

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

a) Să arate să şirul $(w_n)_{n\geq 1}, w_n := \dfrac{v_n - \varphi}{v_n - \tau}$ *este bine definit şi să se justifice că acesta este o progresie geometrică de raţie* τ/φ*, unde* φ *şi* τ *sunt soluţiile ecuaţiei* $x^2 - x - 1 = 0$.

b) Deduceţi că $w_n \to 0$*, atunci când* n *tinde la* $+\infty$.

c) Justificaţi sensul egalităţii de mai jos

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}} = \varphi.$$

Problema 2.25 *Fie* (a_n) *şi* (b_n) *două şiruri de numere reale cu* $a_0 > b_0 > 0$ *şi*

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{şi} \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

a) Să se arate că $a_n > b_n$*, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că şirul $(a_n b_n)$ *este staţionar.*

c) Să se arate că cele două şiruri sunt adiacente.

d) Să se determine valoarea comună a limitei celor două şiruri.

Problema 2.26 *Se definesc şirurile* $a_0, b_0 \in \mathbb{R}, a_0 < b_0$ *şi*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

Să se arate că cele două şiruri sunt convergente şi au aceeaşi limită.

Problema 2.27 *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *şi* $\lambda \in (0, 1)$*. Să se arate că şirul definit prin* $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \lambda x_n + (1 - \lambda)x_{n+1}$*, pentru orice* $n \geq 1$ *este convergent şi să se determine limita.*

Problema 2.28 *Fie* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *un şir de numere reale şi* $\alpha \in (0, 1)$ *cu* $|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha\, |x_n - x_{n-1}|$ *pentru orice* $n \geq 1$*. Să se arate că* (x_n) *este convergent.*

2.5 Limită inferioară şi superioară. Puncte limită

Problema 2.29 *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere strict pozitive. Arătaţi că*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Daţi exemplu de un şir pentru care prima şi ultima inegalitate să fie stricte. Drept consecinţă, arătaţi că dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty]$*, atunci există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *şi este egală cu* ℓ.

Problema 2.30 *Fie şirul*

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{m}{k}, \text{ dacă există } m, k \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } n = 2^k 3^m \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases}$$

Să se arate că oricare ar fi $a \geq 0$ există un subşir al lui (x_n) cu limita a. Să se indice un şir pentru care mulţimea punctelor limită este $\{1\} \cup [4, 5]$.

Problema 2.31 *Să se arate că $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu au limită. Mai mult, să se arate că pentru orice $a \in [-1, 1]$ există un subşir al şirului $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu limita a. Aceeaşi problemă pentru $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Problema 2.32 *Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, care are cel puţin două puncte limită diferite. Arătaţi că mulţimea punctelor limită ale lui $(a_n)_{n \geq 1}$ este un interval închis nedegenerat în $\overline{\mathbb{R}}$.*

2.6 Probleme diverse

Problema 2.33 *Dacă x_n este soluţia din intervalul $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ a ecuaţiei $\operatorname{tg} x = x$, $n \in \mathbb{N}$, calculaţi limita*

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n\right).$$

Problema 2.34 *Fie (u_n) un şir de numere reale convergent la $\ell \in \mathbb{R}$.*

a) Presupunem că $\ell \notin \mathbb{Z}$. Ce putem spune despre şirul $([u_n])$?

b) Presupunem că $\ell \in \mathbb{Z}$. Propoziţia "Dacă şirul (u_n) converge la ℓ atunci $([u_n])$ converge" este întotdeauna adevărată?

Problema 2.35 *Preupunem că (u_n) este un şir care satisface*

$$u_{m+n} \leq u_m + u_n,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m \leq n$. Arătaţi că

$$u_n \leq q\, u_m + u_r,$$

unde $q \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ şi $n = q\,m + r$ este descompunerea după teorema împărţirii cu rest.

b) Presupunem că mulţimea $\left\{\dfrac{u_n}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ e mărginită inferior şi notăm

$$\ell := \inf \left\{\frac{u_n}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Arătaţi că şirul $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge la ℓ.

c) Presupunem că mulţimea $\left\{\dfrac{u_n}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ e nemărginită inferior. Arătaţi că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{n} = -\infty.$$

Problema 2.36 *Considerăm* $a \in [-2, 2]$ *şi şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dat prin*

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Calculaţi

$$\ell_1 = \lim_{n\to\infty} 4^n(2 - x_n).$$

b) Calculaţi

$$\ell_2 = \lim_{n\to\infty} 4^n \left[\ell_1 - 4^n(2 - x_n)\right].$$

3 Şiruri la olimpiade

Problema 3.1 *Fie un număr natural* $p \geq 2$. *Arătaţi că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$, *definit prin* $x_1 = a > 0$ *şi relaţia de recurenţă* $x_{n+1} = x_n + \left[\dfrac{p}{x_n}\right], n \in \mathbb{N}^*$, *este convergent şi determinaţi limita sa în funcţie de valorile parametrului* a.

O.N.M. 2024, Etapa judeţeană, P2

Problema 3.2 *Fie* n *un număr natural nenul.*

a) Arătaţi că numărul de cifre ale lui n *este egal cu* $[\lg(n)] + 1$, *unde prin* $[x]$ *s-a notat partea întreagă a numărului real* x.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{n}$, *unde* c_n *reprezintă numărul de cifre ale numărului* 2023^n.

O.N.M. 2023, Etapa locală

Problema 3.3 *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că şirul* $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, cu limita nenulă. Calculaţi limita*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n.$$

O.N.M. 2019, Etapa judeţeană

Problema 3.4 *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale astfel încât* $a_1 > 2$ *şi* $a_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{a_n}$, *pentru orice* $n \geq 1$.

a) Arătaţi că $a_{2n-1} + a_{2n} > 4$, *oricare ar fi* $n \geq 1$ *şi că* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

b) Determinaţi cel mai mare număr real a *pentru care inegalitatea*

$$\sqrt{x^2 + a_1^2} + \sqrt{x^2 + a_2^2} + \sqrt{x^2 + a_3^2} + ... + \sqrt{x^2 + a_n^2} > n\sqrt{x^2 + a^2}$$

este adevărată oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ *şi oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$.

O.N.M. 2017, Etapa judeţeană

Problema 3.5 *Fie şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *cu proprietăţile* $a_n > 1$ *şi* $a_{n+1}^2 \geq a_n a_{n+2}$, *oricare ar fi* $n \geq 1$. *Arătaţi că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *dat de* $x_n = \log_{a_n} a_{n+1}$ *pentru* $n \geq 1$ *este convergent şi calculaţi-i limita.*

O.N.M. 2018, Etapa judeţeană

Problema 3.6 *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit în mod recurent prin* $x_1 = 1$ *şi*

$$x_{n+1} = \frac{x_1}{n+1} + \frac{x_2}{n+2} + ... + \frac{x_n}{2n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. *Considerăm şirul* $(y_n)_{n\geq 1}$, *cu* $y_n = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. *Arătaţi că:*

a) $x_{n+1}^2 < \dfrac{y_n}{2}$ *şi* $y_{n+1} < \dfrac{2n+1}{2n+2} y_n$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

O.N.M. 2022, Etapa judeţeană

Problema 3.7 *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale din intervalul* $[1, \infty)$. *Presupunem că şirul* $\left(y_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$, *definit prin* $y_n^{(k)} = \left[x_n^k\right], n \geq 1$, *este convergent pentru oricare* $k \in \mathbb{N}^*$. *Să se demonstreze că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

O.N.M. 2015, Etapa judeţeană

Problema 3.8 *Spunem că o funcţie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are proprietatea* (P) *dacă oricare ar fi un şir de numere reale* $(x_n)_{n\geq 1}$ *cu proprietatea că şirul* $(f(x_n))_{n\geq 1}$ *este convergent, rezultă că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent. Demonstraţi că o funcţie surjectivă cu proprietatea* (P) *este continuă.*

O.N.M. 2017, Etapa naţională