Matrice. Determinanti. Sisteme liniare

Notiunea de matrice

Fie Γ corpul comutativ al numerelor reale $\Gamma = \mathbb{R}$ sau complexe $\Gamma = \mathbb{C}$.

Definiţie

Numim matrice cu elemente din Γ cu m linii şi n, coloane $(m, n \in \mathbb{N})$ tabelul

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), i = 1, m \;\; j = 1, n.$$

Notăm mulţimea matricelor cu $\mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$. Dacă $m = n$ notăm $\mathcal{M}_n(\Gamma)$

Matrice particulare

Matrice linie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Vom nota $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\Gamma)$.

Matrice coloană.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Vom nota $A \in \mathcal{M}_{m,1}(\Gamma)$.

$A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ este diagonală dacă are forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = diag\,(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}).$$

$A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ este triunghiulară inferior sau superior dacă are forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Egalitate şi suma de matrice

Definiţie

Matricele $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma),\quad i = 1, m \;\; j = 1, n$ *se numesc* *egale* *dacă*

$$a_{ij} = b_{ij},\quad i = 1, m \;\; j = 1, n$$

Definiţie

Date matricele $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma),\quad i = 1, m \;\; j = 1, n$ *numim* *suma*, *matricea* $A + B \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$ *de forma*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), i = 1, m \;\; j = 1, n$$

Grupul $\mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$

Mulţimea $\mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$ formează grup comutativ fată de adunare, adică satisface axiomele

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma), \quad A + B \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma), \quad (A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\exists O_{mn} \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$ astfel ca
   $A + O_{mn} = O_{mn} + A = A, \ \ \forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$
4. $\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma), \ \ \exists - A \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$ astfel ca
   $A + (-A) = (-A) + A = O_{mn}$
5. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma), \quad A + B = B + A$

Înmulţirea cu scalar. Produsul.

Definiţie

Dacă $A = (a_{ij}),\ \ i = \overline{1,m}\ \ j = \overline{1,n}$ *este o matrice şi* $\alpha \in \Gamma$, *matricea* $\alpha \cdot A \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$ *este prin definiţie*

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}),\ \ i = \overline{1,m}\ \ j = \overline{1,n}.$$

Definiţie

Dacă $A \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma), B \in \mathcal{M}_{np}(\Gamma)$ *atunci prin definiţie produsul este matricea* $A \cdot B \in \mathcal{M}_{mp}$

$$A \cdot B = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}),\ \ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,p}.$$

Structura de inel

Mulţimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_n(\Gamma), n \geq 2$ formează inel cu unitate necomutativ, adică

1. $\mathcal{M}_n(\Gamma)$ este grup aditiv comutativ
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\Gamma), \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. înmulţirea este distributivă faţă de adunare
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
4. există I_n element faţă de înmulţire

Element neutru

Definiţie

Elementul $I_n \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ se numeşte element neutru fată de înmulţire dacă $\forall A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ are loc

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Elementul neutru are forma

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversa unei matrice

Definiţie

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$, *se numeşte* *inversabilă* *dacă există* $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ *astfel ca*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Transpusa unei matrice

Definiţie

Fie $A = (a_{ij}),\ \ i = 1, m\ \ j = 1, n$ *o matrice. Numim* ***transpusa*** *matricei A*

$$A^t = (a_{ji}),\ \ i = 1, m\ \ j = 1, n$$

Obervăm că dacă $A \in \mathcal{M}_{mn}(\Gamma)$ atunci $A^t \in \mathcal{M}_{nm}(\Gamma)$
Au loc

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(AB)^t = B^t A^t$
3. $(A^t)^t = A$

Definiţia generală

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$.

Definiţie

Numim determinant al matricei A numărul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{Inv(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

unde P_n este grupul permutărilor unei mulţimi cu n elemente, iar $Inv(\sigma)$ este numărul inversiunilor permutării σ.

Cazuri particulare

Determinant de ordin 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinant de ordin 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Proprietăţi ale determinanţilor

1. $det(\alpha A) = \alpha^n det(A), \ \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\Gamma), \alpha \in \Gamma$
2. $det(A \cdot B) = det(A) det(B), \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$
3. dacă schimbăm două linii sau două coloane între ele, atunci determinantul îşi schimbă semnul
4. dacă la o linie (coloană) adunăm o altă linie (coloană) înmulţită cu un scalar valoarea determinantului nu se schimbă
5. $det(A) = det(A^t)$

Minori

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ o matrice şi $1 \leq p \leq n$, un număr natural.

Definiţie

Numim minor de ordinul p al matricei A determinantul matricei de ordinul p format cu elementele situate la intersecţia a p linii şi p coloane ale matricei A.

Definiţie

Numim minor complementar al minorului M de ordin p al matricei A determinantul M_c de ordinul $n - p$ al matricei extrase din A prin suprimarea celor p linii şi p coloane corespunzătoare lui M.

Definiţie

Numim complement algebric al minorului M al matricei A elementul din Γ *definit de* $C = (-1)^s M_c$, *unde* $s = (i_1 + i_2 + \ldots + i_p) + (j_1 + j_2 + \ldots + j_p)$, *adică suma indicilor liniilor şi coloanelor matricei A utilizate în M.*

Teoremă

(Teorema lui Laplace) Determinantul matricei A este egal cu suma produselor minorilor de ordinul p ce se pot construi cu elementele a p linii (coloane) fixate ale matricei A prin complemenţii lor algebrici.

Calculul inversei unei matrice

Teoremă

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ *este inversabilă dacă şi numai dacă* $det(A) \neq 0$.

Teoremă

Inversa matricei A este

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*$$

unde A^* *este matricea adjunctă.*

Matricea adjunctă A^* se obţine înlocuind elementele matricei A^t prin complemenţii algebrici.

Rangul unei matrice

Definiţie

Matricea nenulă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$ *are rangul* r *dacă există în* A *cel puţin un minor de ordinul* r *diferit de zero şi toţi minorii de ordin mai mare decât* r*, dacă există, sunt egali cu zero. Notăm* $\mathrm{rang}(A) = r$.

Pentru matricea nulă, convenim ca $\mathrm{rang}(0_{m,n}) = 0$.
rang $A \leq \min(m, n)$.

Teoremă

Rangul produsului a două matrice este mai mic sau egal decât rangul fiecărei matrice.

Sisteme liniare neomogene

Forma generală este

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistemul se scrie

$$AX = B.$$

Matricea

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice lărgită (extinsă).

Teoremă

(Teorema Kronecker -Capelli) Sistemul este compatibil dacă şi numai dacă

$$rang\ A = \ rang\ \overline{A}$$

Consecinţe

1. Sistemul este compatibil unic determinat dacă şi numai dacă rangul matricei coincide cu rangul matricei lărgite şi cu numărul de necunoscute, adică

$$rang\ A = rang\ \overline{A} = n$$

2. Dacă $rang\ A = rang\ \overline{A} < n$ sistemul este compatibil nedeterminat.

Presupunem că matricea A are rangul r şi fie $\Delta \neq 0$ un minor de ordin r.

Definiţie

Numim determinant caracteristic, un determinant obţinut prin bordarea lui Δ cu coloana termenilor liberi şi cu una dintre liniile rămase.

Teoremă

(Teorema lui Rouche) Sistemul este compatibil dacă şi numai dacă toţi determinanţii caracteristici sunt nuli.

Regula lui Cramer

Dacă $m = n$ şi $rang\ A = rang\ \overline{A} = n$ necunoscutele se pot determina cu formulele

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

unde Δ este determinantul sistemului, iar Δ_i determinantul obţinut prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi.

Sisteme liniare omogene

Dacă $b_i = 0, i = 1, n$ sistemul se numeşte omogen. Deci forma generală este

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Un sistem omogen este totdeauna compatibil.

Consecinţe

1. Sistemul omogen este compatibil unic determinat dacă şi numai dacă rangul matricei coincide cu numărul de necunoscute, adică

$$rang\ A = n$$

2. Dacă $rang\ A < n$ sistemul este compatibil nedeterminat.
3. Dacă $m = n$ obţinem:
i. Sistemul este compatibil unic determinat dacă şi numai dacă

$$det(A) \neq 0$$

ii. Sistemul este compatibil nedeterminat dacă şi numai dacă

$$det(A) = 0$$

Metoda lui Gauss

Consideăm sistemul liniar

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Pas I. Dacă toţi $a_{ij} = 0$ analizăm $b_1, \cdots b_m$.

I.1 Dacă $b_1 = \cdots = b_m = 0$ sistemul este compatibil nedeterminat

I.2. Dacă există $b_i \neq 0$ sistemul este incompatibil

Pas II Dacă există $a_{ij} \neq 0$

Pas II.1 Alegem $\max\limits_{i=1,m;j=1,n} |a_{ij}|$. Aducem elementul pe linia 1 şi coloana 1

Pas II.2 Înmulţim linia 1 cu $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ şi adunăm la linia $k = 2, \cdots, m$. Sistemul devine

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Pas II.3 Reluam pasul I pentru sistemul

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

După un numar finit de paşi se ajunge la un sistem de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{rr}x_r + \cdots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \cdots \\ 0 = b'_m \end{cases}$$

I Dacă cel puţin unul dintre $b'_{r+1}, \cdots, b'_m \neq 0$ sistemul este incompatibil

II. Dacă toţi $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$ sistemul este compatibil.

II.1 Dacă $r = n$ sistemul este unic determinat

II.2 Dacă $r < n$ sistemul este compatibil nedeterminat