Definiţia generală

Definiţie

Numim ***conica*** *locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distantelor la un punct fix F şi la o dreaptă fixă* (D) *este o constantă e. Punctul F se numeşte* ***focar****, dreapta d* ***directoare****, iar e* ***excentricitate****.*

Alegem un reper în plan $\mathcal{R}(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ astfel ca $Ox \perp d$, $F \in Ox$, iar F are coordonatele $F(c, 0)$. Directoarea are ecuaţia $x = d$. Distanţele din enunţ sunt $d(M, (D)) = |x - d|$ şi $d(M, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Punem condiţia

$$\frac{d(M, F)}{d(M, (D))} = e > 0. \tag{1}$$

Deducem ecuaţia

$$(1-e^2)x^2+y^2-2(c-de^2)x+c^2-d^2e^2=0. \tag{2}$$

Pentru intersecţia cu Ox, punem condiţia $y=0$ şi avem

$$(1-e^2)x^2-2(c-de^2)x+c^2-d^2e^2=0. \tag{3}$$

Avem două cazuri:
Cazul 1. Dacă $e \neq 1$ găsim punctele
$A_1\left(\frac{c+ed}{1+e},0\right)$ $A_2\left(\frac{c-ed}{1-e},0\right)$
Cazul 2. Dacă $e=1$, găsim punctul $A\left(\frac{c+d}{2},0\right)$.

Cazul 1. Elipsa şi hiperbola

Fie A_1, A_2 cele două puncte de intersecţie cu axa Ox. Alegem originea reperului mijlocul segementului A_1A_2.
Din $x_1 + x_2 = 0$ şi (2) rezultă $c - de^2 = 0$, deci

$$d = \frac{c}{e^2}. \tag{4}$$

Înlocuim în (2) şi avem

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - \frac{c^2}{e^2}(1 - e^2) = 0.$$

Deducem

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}(1 - e^2)} - 1 = 0.$$

Notăm

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \frac{c^2}{e^2}, \quad a > 0, \\
\varepsilon b^2 &= \frac{c^2}{e^2}(1 - e^2), \quad b > 0, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Ecuaţia conicei devine:

$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0. \tag{6}
$$

Cazuri particulare

1. Dacă $\varepsilon = 1$, condiţie echivalentă cu $e < 1$ conica este o elipsă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

2. Dacă $\varepsilon = -1$, condiţie echivalentă cu $e > 1$ conica este o hiperbolă

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Proprietăţi ale elipsei şi hiperbolei

1. Dacă (x, y) aparţine conicei, atunci $(-x, -y)$ aparţine conicei. Spunem că O este centru de simetrie.

2. Dacă (x, y) aparţine conicei, atunci $(-x, y)$ aparţine conicei. Spunem că Oy este axă de simetrie.

3. Dacă (x, y) aparţine conicei, atunci $(x, -y)$ aparţine conicei. Spunem că Ox este axă de simetrie.

Definiţia cercului

Definiţie

Numim cerc locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, numit centru.

Alegem centrul $C(x_0, y_0)$ şi distanţa R. Definiţia conduce la **ecuaţia redusă**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{7}$$

Ecuaţia generală este

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c, \quad a^2 + b^2 - c > 0. \tag{8}$$

Cazul 2. Parabola

Dacă $e = 1$, avem punctul de intersecţie cu Ox de forma $A\left(\frac{c+d}{2}, 0\right)$.

Alegem originea reperului O, astfel ca să coincidă cu A, de unde deducem $d = -c$. Deducem ecuaţia

$$y^2 = 2px \tag{9}$$

unde $p = 2c$.

Proprietate
Axa Ox este axă de simetrie.
O se numeşte vârful parabolei.

Reprezentari parametrice ale conicelor

1. Cercul admite o reprezentare parametrică de forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi \\ y = y_0 + R\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

2. Elipsa admite o reprezentare parametrică de forma

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

3. Hiperbola admite o reprezentare parametrică de forma:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Reamintim definiţia funcţiilor hiperbolice:

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

4. Parabola admite o reprezentare parametrică de forma:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Tangenta într-un punct al cercului

Fie cercul de ecuaţie $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, cu centru $C(x_0,y_0)$ şi $M_1(x_1,y_1)$ un punct de pe cerc.
Deoarece tangenta este perpendiculară pe rază în punctul de tangenţă , pentru $P(x,y)$ este un punct de pe tangentă avem

$$M_1P \perp CM_1$$

Se obţine

$$(x_1-x_0)(x-x_1)+(y_1-y_0)(y-y_1)=0.$$

echivalent cu

$$(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)-R^2=0.$$

Caz particular Dacă $x_0=y_0=0$ se obţine ecuaţia

$$xx_1+yy_1-R^2=0.$$

Tangenta într-un punct la elipsă, hiperbolă, parabolă

1. Tangenta la elipsa în punctul (x_0, y_0) al ei

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

2. Tangenta la hiperbolă în punctul (x_0, y_0) al ei

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0.$$

3. Tangenta la parabolă în punctul (x_0, y_0) al ei

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Ecuaţia generală

Ecuaţia generală a unei conice este:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{21}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0, \quad a_{ij}\in\mathbb{R}. \quad (10)$$

Asociem forma pătratică

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad h(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{21}y^2.$$

Forma pătratică admite forma canonică

$$h(x',y')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2,$$

unde λ_1,λ_2 sunt valorile proprii ale matricei formei pătratice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Rotaţia

Fie $\{\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\}$ baza ortonormală de vectori proprii şi fie C matricea (ortogonală) de trecere de la baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ la baza $\{\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\}$. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

care transformă ecuaţia generală în

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2ax' + 2by' + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Translaţia

În ecuaţia (11) formăm pătrate perfecte în x' şi y'.
Dacă $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, facem translaţia

$$\begin{cases} x' = X - \dfrac{a}{\lambda_1} \\ y' = Y - \dfrac{b}{\lambda_2} \end{cases}$$

şi găsim forma redusă

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$