Ariadna Lucia Pletea **Liliana Popa**

TEORIA PROBABILITĂŢILOR

UNIVERSITATEA TEHNICĂ " GH. ASACHI",

IAŞI 1999

Cuprins

Introducere

Numeroase probleme practice din variate domenii de activitate, ca: ingineria electrică, radio, transmisia de date, calculatoare, teoria informaţiei, fiabilitatea sistemelor şi altele, conduc la studiul unor fenomene şi procese aleatoare. Evaluarea şanselor lor de producere constituie obiectul disciplinei teoria probabilităţilor.

Cursul de Teoria probabilităţilor are atât un caracter informativ, furnizând studenţilor noţiuni şi rezultate fundamentale cu care vor opera în cadrul specialităţilor lor, cât şi formativ, acomodându-i cu raţionamente matematice, dintre care unele vor fi necesare prelucrării pe calculator a datelor.

Cursul este alcătuit din cinci capitole.

Capitolul I, intitulat "*Câmp de probabilitate*" introduce noţiunea de câmp de probabilitate, cadru în care se defineşte axiomatic noţiunea de probabilitate. Sunt trecute în revistă formule şi scheme clasice de probabilitate. Elementele de teorie sunt însoţite de exemple, dintre care unele cu referire la situaţii tehnice privind controlul de calitate, transmiterea informaţiei etc.

Cuprinde paragrafele: 1.Câmp finit de evenimente; 2.Câmp finit de probabilitate; 3. Metode de numărare; 4.Moduri de selectare a elementelor; 5.Definiţia axiomatică a probabilităţii; 6.Formule probabilistice; 7.Scheme clasice de probabilitate; 8.Câmp infinit de probabilitate.

Capitolul II, intitulat "*Variabile aleatoare discrete*"cuprinde paragrafele 1.Definiţia şi clasificarea variabilelor aleatoare; 2.Variabile aleatoare discrete simple; 3.Exemple de variabile aleatoare discrete simple; 4.Variabile aleatoare discrete simple bidimensionale; 5.Variabile aleatoare cu un număr infinit numărabil de valori.

Este scos în evidenţă rolul distribuţiei Poisson, a evenimentelor rare în numeroase aplicaţii tehnice.

Capitolul III, intitulat "*Variabile aleatoare continue*", cuprinde paragrafele: 1.Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare unidimnesionale; 2.Densitatea de probabilitate.Repartiţia normală;3.Funcţia de repartiţie multidimensională.Transformări; 4.Valori caracteristice ale unei variabile aleatoare. 5.Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare; 6.Variabile aleatoare continue clasice şi legăturile dintre ele; 7.Fiabilitate.

Este scos în evidenţă rolul legii lui Gauss în studiul erorilor accidentale de măsurare.

Capitolul IV, intitulat "*Probleme la limită în teoria probabilităţilor*", cuprinde paragrafele: 1.Convergenţa în probabilitate a şirurilor de variabile aleatoare; 2.Legea numerelor mari (forma slabă); 3.Aproximări pentru distribuţii discrete; 4.Convergenţa în repartiţie. Teorema limită centrală; 5.Legătura dintre convergenţa funcţiilor de repartiţie şi convergenţa funcţiilor caracteristice; 6.Convergenţa aproape sigură; 7.Convergenţa în medie.

Scopul acestui capitol este de a pune în evidenţă justificări teoretice ale apropierii dintre anumite concepte din teoria probabilităţlor şi din statistica matematică şi de asemenea, legăturile dintre diferitele tipuri de convergenţă în teoria probabilităţilor.

Capitolul V, intitulat "*Procese stochastice*", cuprinde paragrafele:1.Lanţuri Markov; 2.Procese Markov contiue. Procese Poisson; 3.Procese stochastice staţionare.

Pentru înţelegerea materialului din acest capitol, s-au dat numeroase exemple de importanţă practică din teoria aşteptării, teoria stocurilor şi altele.

Capitolele I, II, IV au fost redactate de lector dr. Pletea Ariadna, iar Capitolele III şi V de lector dr. Popa Liliana, care au colaborat pentru a obţine o formă cât mai unitară şi modernă a cursului.

Adresăm pe această cale vii mulţumiri comisiei de analiză a cursului, formată din prof. dr. Pavel Talpalaru, prof. dr. Stan Chiriţă şi lector Gheorghe Florea pentru observaţiile constructive făcute, cât şi, anticipat, tuturor cititorilor, care vor contribui prin sugestii la îmbunătăţirea prezentului material.

Autoarele

Capitolul 1

Câmp de probabilitate

1.1 Câmp finit de evenimente

În teoria probabilităţilor noţiunile primare sunt: evenimentul şi probabilitatea.

Teoria probabilităţilor studiază experienţele aleatoare, acele experienţe care reproduse de mai multe ori se desfăşoară de fiecare dată în mod diferit, rezultatul neputând fi anticipat. Exemple de experienţe aleatoare: aruncarea unui zar, tragerile la ţintă, durata de funcţionare a unei maşini etc.

Rezultatele posibile ale unei experienţe aleatoare se numesc *probe* sau *cazuri posibile ale expeienţei.*

Experienţele se pot realiza printr-un număr finit sau un număr infinit de probe.

Mulţimea rezultatelor (cazurilor) posibile ale unei experienţe aleatoare formează *spaţiu de selecţie.*

Notăm simbolic spaţiul de selecţie cu E.

Definiţia 1.1.1 *Se numeşte* eveniment *o submulţime a spaţiului de selecţie.*

Orice element a lui E, notat e, este un punct de selecţie sau un rezultat posibil al experienţei.

În cele ce urmează vom presupune E finit.

Exemplul 1.1.1 Considerăm experienţa care constă în aruncarea unui zar. Aceasta este o experienţă aleatoare. Mulţimea rezultatelor posibile ale experienţei sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6. Deci spaţiul de selecţie este $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Presupunem că ne interesează evenimentul ca la o aruncare a zarului să obţinem o faţă cu un număr par de puncte. Dacă aruncând zarul am obţinut faţa cu cinci puncte, aceasta este o probă a experienţei noastre, dar evenimentul care ne interesa (o faţă cu un număr par de puncte) nu s-a realizat. Dacă proba experienţei ar fi faţa cu şase puncte, atunci evenimentul nostru s-a realizat.

Exemplul dat este al unei experiente cu un numar finit de probe. Se pot da exemple şi de experienţe cu o infinitate de probe. Astfel, experienţa tragerii la ţintă. Există o infinitate de probe care realizează evenimentul atingerii ţintei.

Noţiunile de spaţiu de selecţie şi de eveniment astfel introduse ne permit ca teoria mulţimilor să poată fi folosită în studiul evenimentelor aleatoare. Traducem în limbaj de evenimente noţiuni şi simboluri caracteristice teoriei mulţimilor.

1. Drept submulţime a lui E se poate considera E. Cum indiferent de rezultatul e al experienţei, $e \in E$, rezultă că odată cu e se realizează E. Evenimentul E se numeşte *eveniment cert* (sau *eveniment sigur*).

   De exemplu, la aruncarea zarului apariţia unei feţe cu un număr de puncte mai mic sau egal cu 6 este evenimentul sigur. Apariţia unei feţe cu un număr mai mic sau egal cu 4 de puncte este un eveniment nesigur, dar posibil.

2. Drept submulţime a lui E putem considera mulţimea vidă $\emptyset$ care nu se realizează la nici o efectuare a experienţei, motiv pentru care se numeşte *eveniment imposibil.*

3. Fie evenimentul A, submulţime a lui E. Evenimentul complementar lui A în raport cu E, notat $\bar{A}$, se numeşte *eveniment contrar* evenimentului A. Acesta se realizează dacă şi numai dacă nu se realizează evenimentul A.

   În exemplul 1.1.1 evenimentul contrar evenimentului apariţiei unui număr par de puncte este evenimentul care constă în apariţia unui număr impar de puncte. Astfel, $A = \{2, 4, 6\}$ şi $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.

4. Fie evenimentele $A, B \subset E$. Evenimentul A implică evenimentul B (scris $A \subset B$) dacă B se realizează prin toate probele lui A (şi prin alte probe), adică dacă $(e \in A) \Rightarrow (e \in B)$.

5. Fie $A, B \subset E$ două evenimente. Evenimentul $A \cup B$ este evenimentul a cărui realizare are loc dacă se realizează sau A sau B.

6. Fie $A, B \subset E$. Prin evenimentul $A \cap B$ înţelegem evenimentul care se realizeză dacă se realizează atât A cât şi B.

7. Fie $A, B \subset E$. Prin $A \setminus B$ înţelegem evenimentul care se realizează prin probe ale lui A şi $\bar{B}$.

Definiţia 1.1.2 *Fie $A \subset E, A \neq \emptyset$. Evenimentul A se numeşte* eveniment elementar *dacă este implicat numai de el însuşi şi de evenimentul imposibil. Celelalte evenimente se numesc* evenimente compuse.

Definiţia 1.1.3 *Fie $A, B \subset E$. Evenimentele A, B se numesc* compatibile *dacă se pot realiza simultan, adică există probe care realizează atât pe A cât şi pe B ($A \cap B \neq \emptyset$). În caz contrar evenimentele se numesc* incompatibile *($A \cap B = \emptyset$).*

Observaţia 1.1.1 Operaţiile de reuniune şi intersecţie se extind pentru un număr finit de evenimente. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$. Avem

$$(\ldots((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \ldots \cup A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

adică evenimentul care se realizează dacă cel puţin un eveniment A_i se realizează şi

$$(\ldots((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \cap \ldots \cap A_n) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

este evenimentul care se realizează dacă toate evenimentele $A_i, i = \overline{1,n}$ se realizează.

Menţionăm câteva din proprietăţile operaţiilor introduse:

1. Dacă $A \subset B$ atunci $A \cup B = B$ şi $A \cap B = A$.
2. Oricare ar fi evenimentul A au loc relaţiile

$$A \cup A = A,\ A \cup \emptyset = A,\ A \cup E = E,\ E \cup \emptyset = E,$$

$$A \cap A = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cap E = A,\ E \cap \emptyset = \emptyset.$$

3. Dacă $A \subset C, B \subset C, A, B, C \subset E$ atunci $A \cup B \subset C$ şi $A \cap B \subset C$.
4. Dacă $A, B, C \subset E$ atunci

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cap B = B \cap A,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Construcţia sistematică a unui câmp finit de evenimente se poate face plecând de la două axiome, numite axiomele câmpului finit de evenimente.

Notăm cu $\mathcal{P}(E)$ mulţimea părţilor lui E.

Definiţia 1.1.4 *Perechea* $\{\ E, K\ \}$, $K \neq \emptyset$, $K \subset \mathcal{P}(E)$, *se numeşte* câmp finit de evenimente *dacă:*

a) $\forall A \in K \Rightarrow \bar{A} \in K;$

b) $\forall A, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K.$

Consecinţe ale definiţiei:

1. $E \in K$ deoarece $(\forall A \in K \Rightarrow \bar{A} \in K) \Rightarrow (A \cup \bar{A} \in K) \Rightarrow (E \in K)$.
2. $\emptyset \in K$ deoarece $(E \in K \Rightarrow \bar{E} \in K) \Rightarrow (\emptyset = \bar{E} \in K)$.
3. Dacă $A, B \in K \Rightarrow A \setminus B \in K$ deoarece $A \setminus B = A \cap \bar{B} = \overline{\bar{A} \cup B} \in K$.
4. Următorele proprietăţi sunt echivalente:

$$(\forall A, B \in K \Rightarrow A \cup B \in K) \text{ şi } (\forall A, B \in K \Rightarrow A \cap B \in K),$$

deoarece $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$.

5. Din Definiţia 1.1.4 rezultă, folosind metoda inducţiei matematice, că

$$\forall n \geqslant 2, A_j \in K, 1 \leqslant j \leqslant n \quad \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in K.$$

6. Din Consecinţa 4 rezultă:

$$\forall n \geqslant 2, A_j \in K, 1 \leqslant j \leqslant n \quad \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in K.$$

Într-un câmp finit de evenimente au loc următoarele proprietăţi:

P1. Două evenimente elementare distincte sunt incompatibile.

Fie A_1 şi A_2 două evenimente elementare. Să presupunem că $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, adică $A_1 \cap A_2 = B \neq \emptyset$. Deci $B \subset A_1, B \neq \emptyset$ şi cum A_1 şi A_2 sunt distincte, $B \neq A_1$, deci A_1 nu este eveniment elementar, ceea ce este fals.

P2. Într-un câmp finit de evenimente există evenimente elementare.

Fie A_1 un eveniment. Dacă A_1 este elementar, afirmaţia este demonstrată. Dacă A_1 este eveniment compus există $A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \neq A_1$ astfel încât $A_2 \subset A_1$. Dacă A_2 este eveniment elementar, afirmaţia este demonstrată. Dacă A_2 este eveniment compus se continuă raţionamentul anterior. Câmpul fiind finit, rezultă că există un eveniment elementar $A_n \neq \emptyset$ astfel încât

$$A_n \subset A_{n-1} \subset \ldots \subset A_1.$$

P3. Fie $\{\, E, K \,\}$ un câmp finit de evenimente. Orice eveniment al acestui câmp se poate scrie ca reuniune finită de evenimente elementare.

Fie B un eveniment compus (dacă B este un eveniment elementar atunci afirmaţia este demonstrată). Există, conform proprietăţii P2, un eveniment elementar $A_1 \in K$ şi un eveniment $B_1 \in K$ astfel încâ $B = A_1 \cup B_1$, $B_1 = B \setminus A_1$ cu $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Dacă B_1 este eveniment elementar, afirmaţia este demonstrată. Dacă B_1 nu este eveniment elementar, există evenimentul elementar A_2 şi un eveniment $B_2 \in K$ astfel încât $B_1 = A_2 \cup B_2$ şi deci $B = A_1 \cup A_2 \cup B_2$ şi raţionamentul se continuă. Deci

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_k,$$

unde $A_i, i = \overline{1, k}$ sunt evenimente elementare.

P4. Reuniunea tuturor evenimentelor elementare ale lui K este E.

Într-adevăr, fie

$$E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s.$$

Presupunem că în câmpul finit de evenimente mai există un eveniment elementar $A_n \neq A_j, j = \overline{1, s}$. Atunci

$$A_n \cap E = A_n = A_n \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_s) = (A_n \cap A_1) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_s) = \emptyset$$

conform P1.

Nu de puţine ori de un real folos ne va fi descompunerea unui eveniment într-o reuniune de evenimente incompatibile două câte două.

Definiţia 1.1.5 *Fie* $\{ \ E, K \ \}$ *un câmp finit de evenimente şi* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in K$. *Spunem că familia de evenimente* $A_1, A_2 \ldots A_n$ *formează un* sistem complet de evenimente *dacă:*

a) $\forall A_i \neq \emptyset,\ i = \overline{1,n}$*;*

b) $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j,\ i, j = \overline{1,n}$*;*

c) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E$.

Observaţia 1.1.2 Mulţimea tuturor evenimentelor elementare ataşate unei experienţe formează un sistem complet de evenimente.

Exemplul 1.1.2 Să se verifice care din următoarele submulţimi ale lui $\mathcal{P}(E)$ ($\mathcal{P}(E)$ mulţimea părţilor lui E) sunt câmpuri finite de evenimente şi, în caz afirmativ, să se precizeze evenimentele elementare:

1. Dacă $E = \{1, 2, 3\}$ şi $K = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, atunci $\{ \ E, K \ \}$ este câmp finit de evenimente deoarece satisface cele două axiome ale Definiţiei 1.1.4. Evenimentele elementare sunt $\{1\}$ şi $\{2{,}3\}$. Observăm că evenimentele elementare nu sunt submulţimi ale lui E formate dintr-un singur element nu este corectă. În exemplul prezentat un eveniment elementar este format dintr-un singur element, iar celălalt eveniment este format din două elemente.

2. Dacă $E = \{1, 2, 3\}$ şi $K = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} = \mathcal{P}(E)$ atunci $\{ \ E, K \ \}$ este un câmp finit de evenimente. Evenimentele elementare sunt $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.

3. Dacă $E = \{1, 2, 3\}$ şi $K = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ nu este un câmp finit de evenimente deoarece, de exemplu $\overline{\{2\}} = \{1, 3\} \notin K$ sau $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin K$.

1.2 Câmp finit de probabilitate

Fie o experienţă şi un eveniment A legat de aceasta. Repetăm experienţa de n ori în condiţii identice. Notăm cu m numărul de realizări ale evenimentului A. Rezultă că $n - m$ reprezintă numărul de nerealizări ale lui A.

Definiţia 1.2.1 *Numărul*

$$f_n = \frac{m}{n}$$

se numeşte frecvenţa relativă *a evenimentului* A.

Observaţia 1.2.1 Frecvenţa relativă variază de la o experientă la alta, având un caracter experimental. Deoarece $0 \leqslant m \leqslant n$ rezultă $0 \leqslant f_n \leqslant 1, n \in I\!\!N$.

Observaţia 1.2.2 Frecvenţa relativă f_n depinde de n, numărul de repetări ale experimentului. Multe experienţe prezintă o stabilitate a frecvenţelor relative în sensul că pe măsură ce numărul n ia valori mari, frecvenţa relativă oscilează în jurul unei anumite valori şi se apropie din ce în ce mai mult de această valoare. Valoarea poate fi adesea intuită.

De exemplu, dacă într-o urnă sunt trei bile negre şi una albă, la un număr mare de extracţii ale unei bile din urnă, cu repunerea bilei extrase înapoi, şansele de extragere ale unei bile negre sunt de trei ori mai mari decât cele ale unei bile albe şi deci, pentru valori mari ale lui n, în cazul celor două evenimente frecvenţele relative se vor stabiliza în jurul valorilor 3/4 şi respectiv 1/4. Această stabilitate a frecvenţelor relative, verificată prin observaţii şi confirmată în practică, este una din legile cele mai importante ale experienţelor aleatoare. Legea a fost formulată pentru prima dată de Bernoulli în teorema care îi poartă numele şi este forma slabă a legii numerelor mari (Capitolul 4, Teorema 4.2.2).

Definirea probabilităţii peste un câmp finit de evenimente se poate face în mod clasic şi axiomatic.

Definiţia clasică a probabilităţii se poate folosi în cazul în care experienţa aleatoare are un număr finit de cazuri posibile şi toate egal probabile, adică la un număr mare de efectuări ale experienţei, fiecare caz are aceeaşi şansă de a se realiza.

Considerăm, de exemplu, experienţa care constă în aruncarea unui zar pe o suprafaţă netedă. Dacă zarul este perfect cubic şi omogen, atunci fiecare din feţe are aceeaşi şansă de a apare, frecvenţele relative ale fiecăreia dintre ele variază în jurul lui 1/6. În cazul în care zarul nu ar fi omogen, atunci una sau mai multe feţe ar fi favorizate.

Definiţia 1.2.2 *Fie o experienţă şi evenimentele legate de aceasta astfel încât toate evenimentele să fie egal posibile. Fie evenimentul A legat de această experienţă. Numim* probabilitatea *evenimentului A numărul*

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

dat de raportul dintre numărul m al cazurilor favorabile realizării evenimentului A şi numărul n al cazurilor egal posibile.

Menţionăm că orice probă care conduce la realizarea unui eveniment A reprezintă "un caz favorabil evenimentului A".

Observaţia 1.2.3 Definiţia clasică a probabilităţii, formulată pentru prima dată de Laplace, este nesatisfăcătoare din punct de vedere logic deoarece reduce definiţia probabilităţii la problema cazurilor egal posibile care nu a putut fi definită din punct de vedere matematic, ci numai ilustrată.

În cazul zarului neomogen, definiţia clasică a probabilităţii nu poate fi aplicată. Riguros vorbind, zarul neomogen şi nesimetric este singurul caz real deoarece construirea unui zar perfect este imposibilă.

Un alt incovenient al definiţiei apare în cazul în care numărul cazurilor posibile este infinit deoarece în această situaţie probabilitatea, calculată după definiţia clasică, este foarte mică sau egală cu zero.

În sfârşit, definiţia clasică a probabilităţii nu poate fi admisă deoarece nu pote fi aplicată în studiul fenomenelor sociale, neputându-se determina numărul cazurilor posibile.

Observaţia 1.2.4 Legătura existentă între frecvenţa relativă unui eveniment şi probabilitatea sa este profundă. De fapt atunci când calculăm probabilitatea unui eveniment ne bazăm pe frecvenţele relative.

Exemplul 1.2.1 Se aruncă un zar de două ori. Mulţimea rezultatelor posibile ale experienţei care constă în perechile de numere ce apar pe zar în cele două aruncări este $E = \{11, 12, \ldots, 16, 21, 22, \ldots, 26, 31, \ldots, 66\}$, $|E| = 6^2 = 36$, unde $|E|$ notează numărul de elemente ale mulţimii E. Toate rezultatele posibile sunt echiprobabile, deci probabilitatea unui eveniment A, $P(A)$, este egală cu numărul elementelor din mulţimea A împărţit la numărul elementelor din E. Presupunem că vom păstra faţa zarului ce conţine un punct albă, iar celelalte feţe le vom colora în negru. Notăm cu AN evenimentul ca la prima aruncare a zarului să obţinem faţa albă, iar la cea de-a doua aruncare o faţă neagră a zarului. Avem $AN = \{12, 13, 14, 15, 16\}$. Rezultă

$$P(AN) = \frac{5}{36}.$$

Analog, făcând notaţiile în acelaşi fel, avem:

$$P(AA) = \frac{1}{36},\ P(NA) = \frac{5}{36}\ , P(NN) = \frac{25}{36}.$$

Presupunem că au fost şterse numerele de pe feţele zarului şi au rămas culorile. Mulţimea rezultatelor posibile, în acest caz, este $E = \{AA, AN, NA, NN\}$ cu probabilităţile corespunzătoare. Observăm că în acest ultim caz, evenimentele AA, AN, NA, NN sunt elementare şi formează un sistem complet de evenimente.

Proprietăţi ale probabilităţii:

P1. $\forall A \in K\ :\ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

P2. $P(E) = 1$;

P3. $P(\emptyset) = 0$;

P4. $\forall A, B \in K,\quad A \cap B = \emptyset\quad : P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

P5. $\forall A, B \in K,\quad B \subset A\quad :\quad P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$;

P6. $\forall A \in K\quad :\quad P(A) + P(\bar{A}) = 1$;

P7. $\forall A, B \in K, B \subset A\quad :\quad P(B) \leqslant P(A)$.

Primele trei proprietăţi sunt evidente.

Demonstrăm proprietatea P4. Dacă din cele n cazuri posibile, m sunt favorabile lui A şi p favorabile lui B, atunci

$$P(A) = \frac{m}{n},\quad P(B) = \frac{p}{n}.$$

Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci numărul cazurilor favorabile lui $A \cup B$ este $m + p$, deci rezultă proprietatea P4.

Această proprietate poate fi extinsă în sensul că dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \in K$, evenimente incompatibile două câte două, adică $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, atunci

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Demonstraţia rezultă utilizând metoda inducţiei matematice.

Demonstrăm proprietatea P5. Scriem $A = (A \setminus B) \cup B$ şi atunci $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, deci, conform proprietăţii P4,

$$P(A) = P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(B).$$

Mai general, avem:

$$\forall A, B \in K : \quad P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B). \tag{1.1}$$

Într-adevăr, scriem $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Deoarece $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ avem, conform proprietăţii P4, $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$. Rezultă formula (1.1).

Proprietatea P6 se obţine din P4 punând $B = \bar{A}$, folosind P2.

Pentru a demonstra proprietatea P7 folosim P5. Dacă $B \subset A$ atunci $P(A \setminus B) = P(A) - P(B) \geqslant 0$ şi deoarece, conform P1, $P(A \setminus B) \geqslant 0$ rezultă proprietatea dorită.

Definiţia 1.2.3 *Un sistem finit de evenimente* $\{ E, K \}$ *asociat unei experienţe aleatoare cu un număr finit de cazuri egal posibile împreună cu probabilităţile acestor evenimente formează* un câmp finit de probabilitate *notat* $\{ E, K, P \}$.

Odată introdusă noţiunea de probabilitate, putem defini două noţiuni importante în teoria probabilităţilor şi anume noţiunea de probabilitate condiţionată şi de independenţă în probabilitate a evenimentelor.

Uneori trebuie să calculăm probabilitatea unui eveniment A legat de un eveniment B, în ipoteza că evenimentul B s-a realizat. Pentru aceasta restrângem mulţimea evenimentelor care realizează evenimentul A la cele care realizează şi evenimentul B, deci restrângem E la B. Pentru ca această restricţie să aibă sens este necesar ca evenimentul B să fie de probabilitate nenulă.

Fie $\{ E, K, P \}$ un câmp finit de probabilitate şi $A, B \in K, P(B) \neq 0$.

Definiţia 1.2.4 *Numim* probabilitatea evenimentului A condiţionată de evenimentul B *(notat $P_B(A)$ sau $P(A|B)$) probabilitatea de realizare a evenimentului A în ipoteza că evenimentul B s-a realizat, probabilitate definită prin*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.2}$$

Observaţia 1.2.5 Fie m numărul cazurilor favorabile lui B, p numărul cazurilor favorabile lui A şi q favorabile lui $A \cap B$. Din cele m cazuri favorabile lui B, q sunt favorabile şi lui A sau, ceea ce este acelasi lucru, din cele p cazuri favorabile lui A, q sunt favorabile şi lui B. Avem

$$P(B) = \frac{m}{n}, \quad P(A) = \frac{p}{n}, \quad P(A \cap B) = \frac{q}{n}.$$

În ipoteza că B s-a realizat, rămân m cazuri posibile, din care q favorabile lui A. Deci

$$P(A|B) = \frac{q}{m} = \frac{\frac{q}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Aceasta ar putea constitui o "justificare" a relaţiei (1.2).

Observaţia 1.2.6 Dacă presupunem că $P(A) \neq 0$, atunci

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{1.3}$$

Observaţia 1.2.7 Din relaţiile (1.2) şi (1.3) reţinem

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

şi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Fie $\{ E, K, P \}$ un câmp finit de probabilitate şi $A, B \in K$.

Definiţia 1.2.5 *Evenimentele A şi B sunt* independente (în probabilitate) *dacă probabilitatea ca unul să se realizeze nu depinde de faptul că celălalt s-a realizat sau nu, altfel spus*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{1.4}$$

Teorema 1.2.1 *Evenimentele A şi B cu $P(A)P(B) \neq 0$ sunt independente dacă şi numai dacă are loc una din relaţiile:*

a) $P(B|A) = P(B)$;

b) $P(A|B) = P(A)$;

c) $P(B|\bar{A}) = P(B)$;

d) $P(A|\bar{B}) = P(A)$.

Demonstraţie. Arătăm că cele patru relaţii sunt echivalente cu relaţia (1.4) din definiţie. În acest fel se justifica şi sensul Definiţiei 1.2.5. Presupunem că are loc a). Atunci, deoarece

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

rezultă $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, adică (1.4).

Reciproc, dacă $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ şi deoarece

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

rezultă a). Cum relaţia (1.4) este simetrică în A şi B, rezultă că (1.4) este echivalentă cu b).

Demonstrăm că

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B) \tag{1.5}$$

este echivalentă cu (1.4). Într-adevăr, dacă $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B)$ atunci deoarece $\bar{A} \cap B = B \setminus A$ avem $P(B \setminus A) = P(\bar{A})P(B)$ sau

$$P(B) - P(A \cap B) = (1 - P(A))P(B)$$

echivalent cu

$$P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B),$$

deci (1.4). Invers, presupunem (1.4) şi luăm în locul lui A pe $\bar{A}$. Vom avea $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B)$, adică (1.5). Deci c) este echivalent cu (1.5) care este echivalent cu (1.4), rezultă că c) este echivalent cu (1.4). Echivalenţa lui d) cu (1.4) rezultă în mod analog. ■

Definiţia 1.2.6 *Date evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, vom spune că sunt* independente *dacă probabilitatea oricărei intersecţii finite de evenimente este egală cu produsul probabilităţilor evenimentelor intersectate, adică dacă*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

oricare ar fi $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$.

Observaţia 1.2.8 Din definiţie rezultă că dacă trei evenimente sunt independete două câte două nu rezultă că sunt independente în totalitatea lor. Exemplul lui S.N.Bernstein ne va ilustra acest lucru. Considerăm un tetraedru omogen cu feţele colorate astfel: una în alb, una în negru, una în roşu şi a patra în toate cele trei culori. Aruncând tetraedrul pe o masă el se aseazå pe una din feţe; ne interesează probabilitatea apariţei fiecărei culori şi independenţa evenimentelor corespunzătoare. Notăm cu A_1 evenimentul care constă în apariţia culorii albe, A_2 evenimentul care constă în apariţia culorii negre şi A_3 evenimentul care constă în apariţia culorii roşii. Avem:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$$

deoarece pentru fiecare culoare sunt patru cazuri posibile şi două favorabile (faţa cu culorea respectivă şi faţa cu cele trei culori). Se constată că

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4},$$

dar

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

1.3 Metode de numărare

Calculul probabilităţilor conduce adesea la numărarea diferitelor cazuri posibile. Capitolul din algebră referitor la permutări, aranjamente şi combinări este foarte util în această situaţie.

PRINCIPIUL MULTIPLICĂRII. Presupunem că avem două situaţii A şi B, situaţia A se poate realiza în m moduri, iar situaţia B în k moduri. Numărul de moduri în are se poate realiza A şi B este $m \times k$.

Mai general, presupunem că avem $r \geqslant 2$ situaţii. În prima situaţie putem face m_1 alegeri, în a doua m_2,..., în a r-a situaţie m_r alegeri, deci în total $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_r$.

Exemplul 1.3.1 Care este numărul situaţiilor care apar aruncând două zaruri? Pentru primul zar sunt 6 situaţii, pentru al doilea 6 situaţii, în total 6×6 situaţii.

În continuare vom face distincţie între o mulţime cu o ordine determinată de dispunere a elementelor sale, numită mulţime ordonată şi o mulţime în care nu ne interesează ordinea elementelor.

PERMUTĂRI: Fie o mulţime A cu n elemente. Elementele acestei mulţimi se pot ordona în mai multe moduri. Fiecare mulţime ordonată care se formează cu cele n elemente ale mulţimii A se numeşte permutare a elementelor acelei mulţimi. Numărul permutărilor cu n elemente este $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.

ARANJAMENTE: Fie o mulţime A cu n elemente. Submulţimile ordonate ale lui A, având fiecare câte k elemente, $0 \leqslant k \leqslant n$, se numesc aranjamente de n luate câte k. Numărul aranjamentelor de n luate câte k se notează

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Exemplul 1.3.2 În câte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziţe pânză de steag de cinci culori diferite ?

Două steaguri tricolore care au aceleaşi culori se deosebesc dacă ordinea culorilor este diferită. Deci ne interesează câte submulţmi de câte trei elemente se pot forma cu elementele unei mulţimi de cinci elemente, în submulţmi interesându-ne ordinea elementelor. Deci sunt $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

COMBINĂRI: Fie o mulţime A cu n elemente. Submulţimile lui A având fiecare câte k elemente, $0 \leqslant k \leqslant n$, în care nu ne interesează ordinea elementelor, se numesc combinări de n luate câte k. Numărul combinărilor de n luate câte k se notează

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Exemplul 1.3.3 Pentru un joc, cinci fete şi trei băieţi trebuie să formeze două echipe de câte patru persoane. În câte moduri se pot forma echipele ?

În total sunt 8 copii cu ajutorul cărora trebuie făcute două grupe a câte patru copii. Studiem în câte moduri se poate forma o grupă de 4, cealaltă formându-se din copiii rămaşi. Nu interesează numărul de fete sau de băieţi din grupă şi nici ordinea lor, ci numai numărul de grupe care se pot forma. Acest număr este

$$C_5^4 + C_5^3 \times C_3^1 + C_5^2 \times C_3^2 + C_5^1 \times C_3^3 = C_8^4 = 70.$$

1.4 Moduri de selectare a elementelor

Presupunem că o urnă conţine m bile, marcate de la 1 la m, din care se extrag n bile în anumite condiţii. Vom număra, în fiecare situaţie, numărul cazurilor posibile. Evident $n \leqslant m$.

1. **Selectare cu întoarcerea bilei extrase în urnă şi ordonare.**

   Extragem n bile pe rând, fiecare bilă fiind pusă înapoi în urnă înainte de următorea extragere, însemnând numărul bilelor în ordinea în care apar (interesează ordinea bilelor în n-uplul extras). Conform principiului multiplicării, în care $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, numărul n-uplurilor este m^n.

2. **Selectare fără întoarcerea bilei în urnă şi cu ordonare.**

   Procedăm ca şi în cazul întâi, dar după fiecare extragere bila obţinută este pusă la o parte, această operaţie fiind echivalentă cu extragerea simultană din urnă a n bile. Obţinem n-upluri $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Regula de multiplicare se aplică astfel: pentru a_1 avem m posibilităţi, pentru a_2 avem $m-1$ posibilităţi,...,pentru a_n avem $m-n+1$ posibilităţi, în total

   $$m \times (m-1) \times \ldots \times (m-n+1) = A_m^n.$$

   Caz particular: dacă $m = n$, atunci numărul cazurilor posibile este n!.

3. **Selectare cu întoarcerea bilei în urnă şi fără ordonare.**

   Extragem n bile, una după alta, fiecare fiind repusă în urnă înainte de a realiza următoarea extragere. Nu ţinem seama de ordinea bilelor în mulţimea formată. Pot exista şi repetiţii. Numărul cazurilor posibile este C_{n+m-1}^n, deoarece ar fi ca şi cum am extrage simultan dintr-o urnă care conţine $n + m - 1$ bile (numerotate de la 1 la m, unele din ele putându-se repeta) n bile, fără să ne intereseze ordinea. După ultima extragere secvenţială în urnă vor rămâne $m - 1$ bile.

4. **Selectare fără întorcerea bilei şi fără ordonare.**

   Bilele sunt extrase una după alta, fără a pune bila extrasă înapoi; este acelaşi lucru cu a spune că extragem n bile dintr-o dată şi formăm submulţimi de n elemente, în total C_m^n.

   Caz particular: determinarea numărului de permutări a m elemente care se disting prin grupuri de culori, adică avem m_1 elemente de culoarea c_1, m_2 elemente de culoarea c_2 ,..., m_r elemente de culoarea c_r. Culorile sunt distincte, dar bilele de aceeaşi culoare nu se disting între ele.

   $$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m.$$

   Numărul cazurilor posibile : $C_m^{m_1}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoare c_1, $C_{m-m_1}^{m_2}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoare c_2,..., $C_{m-m_1-\ldots-m_{r-1}}^{m_r}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoarea c_m (de fapt $m-m_1-m_2-\ldots-m_{r-1}=m_r$ şi avem, de fapt, o singură posibilitate), în total, ţinând seama de regula multiplicării,

$$C_m^{m_1} C_{m-m_1}^{m_2} \ldots C_{m-m_1-\ldots-m_{r-1}}^{m_r} =$$

$$= \frac{m!}{m_1!\,(m-m_1)!} \cdot \frac{(m-m_1)!}{m_2!\,(m-m_1-m_2)!} \cdots \frac{(m-m_1-\ldots-m_r)!}{(m-m_1-\ldots m_r)!\,m_{r-1}!} =$$

$$= \frac{m!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_r!}.$$

1.5 Definiţia axiomatică a probabilităţii

Noţiunile de probabilitate şi de câmp finit de probabilitate se pot prezenta şi sub formă axiomatică.

Definiţia 1.5.1 *Se numeşte* probabilitate *(*măsură de probabilitate*) o funcţie definită pe un câmp finit de evenimente* $\{\ E, K\ \}$ *cu valori reale care satisface următoarele axiome:*

a) $P(A) \geqslant 0, \quad \forall A \in K$*;*

b) $P(E) = 1$*;*

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \forall A, B \in K, A \cap B = \emptyset.$

Observaţia 1.5.1 Axioma c) din definiţie se extinde prin recurenţă la orice număr finit de evenimente incompatibile două câte două, deci dacă $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i,\ j = \overline{1,n}$, atunci

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Definiţia clasică a probabilităţii satisface toate axiomele definiţiei date şi, de asemenea, oricare din proprietăţile prezentate anterior pentru probabilitate poate fi obţinută din definiţia axiomatică. Într-adevăr,

P1. $P(\emptyset) = 0$.

Deoarece $E \cup \emptyset = E$ şi $E \cap \emptyset = \emptyset$ rezultă că $P(E \cup \emptyset) = P(E) + P(\emptyset)$, adică $P(\emptyset) = 0$.

P2. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Deoarece $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ şi $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ rezultă $P(A \setminus B) + P(A \cap B) = P(A)$.

P3. Pentru orice $A, B \in K, A \subset B$ are loc relaţia $P(A) \leqslant P(B)$.

Într-adevăr, ţinând seama de P2 şi de faptul că $A \subset B$ avem

$$0 \leqslant P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(A).$$

Deci $P(B) - P(A) \geqslant 0$ sau $P(B) \geqslant P(A)$.

P4. Pentru orice $A \in K$ are loc inegalitatea $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Într-adevăr, $\emptyset \subset A \subset E$ şi, folosind P3, avem $P(\emptyset) \leqslant P(A) \leqslant P(E)$ sau $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Definiţia 1.5.2 *Se numeşte* câmp finit de probabilitate *un câmp finit de evenimente* $\{E, K\}$ *pe care am definit o probabilitate* P. *Se notează* $\{E, K, P\}$.

Observaţia 1.5.2 Definiţiile probabilităţilor condiţionate şi a independenţei evenimentelor rămân aceleaşi şi atunci când construirea teoriei pobabilităţilor se realizează folosind metoda axiomatică.

Observaţia 1.5.3 Dacă E este reuniune finită de evenimente elementare, fie $E = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, atunci orice eveniment $A \in K, A \neq \emptyset$ pote fi scris ca o reuniune finită de evenimente elementare, conform P3 din Capitolul 1.1, adică

$$A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k},$$

unde A_{i_j} este un eveniment elementar, $j = \overline{1, k}$. Atunci conform Observaţiei 1.5.1 obţinem

$$P(A) = P(A_{i_1}) + \ldots + P(A_{i_k}).$$

Deci pentru a cunoaşte probabilitatea unui eveniment oarecare din K este suficient să cunoaştem probabilitatea tuturor evenimentelor elementare care-l compun.

Probabilitatea unui astfel de eveniment A este suma probabilităţilor evenimentelor elementare ce-l compun. Evident, probabilităţile evenimentelor elementare satisfac condiţiile

$$P(A_i) \geqslant 0, \ i = \overline{1, n}, \tag{1.6}$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(E) = 1. \tag{1.7}$$

Deci, fiind date toate evenimentele elementare care compun E, familia K este perfect determinată şi deci câmpul de probabilitate mai depinde de alegerea a n numere (probabilităţile evenimentelor elementare) care satisfac condiţiile (1.6) şi (1.7). În cazul particular când evenimentele elementare sunt echiprobabile

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = \frac{1}{n},$$

şi dacă $A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_n}$, obţinem $P(A) = \dfrac{k}{n}$, deci ajungem astfel la definiţia clasică a probabilităţii.

Observaţia 1.5.4 În definiţia axiomatică a probabilităţii condiţia pusă cazurilor posibile de a fi egal probabile este superfluă. Un exemplu celebru, dat de D'Alembert, ilustrează aceasta. Se aruncă două monede simultan. Există trei cazuri posibile care nu sunt echiprobabile: A evenimentul ca pe ambele monede să apară banul, B evenimentul ca pe ambele monede să nu apară banul, C evenimentul ca pe una din monede să apară banul, iar pe cealaltă nu. Probabilităţile evenimentelor A, B, C nu sunt $1/3$.

$$P(A) = \frac{1}{4}, \ P(B) = \frac{1}{4}, \ P(C) = \frac{1}{2},$$

deoarece evenimentul C este compus din două situaţii: pe una din monede să apară banul iar pe cealată nu, şi invers. Cele două cazuri care compun evenimentul C ar fi evidente dacă monedele nu s-ar arunca simultan, ci una după alta. Cele două monede pot fi nedistinse din punct de vedere fizic şi deci cele trei cazuri prezentate de D'Alembert sunt de fapt cele trei cazuri care se pot distinge.

1.6 Formule probabilistice

Probabilitatea unei reuniuni de evenimente. Dacă $\{E, K, P\}$ un câmp finit de probabilitate atunci oricare ar fi $A, B \in K$ are loc relaţia

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.8}$$

Facem observaţia că vom demonstra formulele folosind definiţia axiomatică a probabilităţii. Deoarece $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ şi $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, avem

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$$

dar, conform proprietăţii P2 din Capitolul 1.5,

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$$

şi deci rezultă (1.8).

Relaţia se poate extinde şi în cazul a n evenimente

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j=1, i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i). \tag{1.9}$$

Demonstraţia se face prin inducţie matematică după n. Pentru $n = 2$ relaţia este demonstrată. Presupunem formula adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n + 1$.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) - P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j=1, i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i \bigcap A_{n+1}) +$$

$$+ \sum_{i,j=1,\, i<j}^{n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) + \ldots + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) -$$

$$\sum_{i,j=1, i<j}^{n+1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i).$$

Probabilitatea unei intersecţii. Fie $\{E, K, P\}$ un câmp finit de evenimente. Oricare ar fi $A, B \in K$ are loc relaţia

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Relaţia de mai sus rezultă din (1.2). Ea poate fi folosită pentru a calcula probabilitatea unei intersecţii:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

Când folosim această formulă la rezolvarea unei probleme trebuie să considerăm evenimentele A şi B într-o ordine convenabil aleasă, dat fiind că se poate utiliza, datorită echivalenţei demonstrate, relaţia

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Formula se poate extinde şi în cazul a n evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n$, cu $P(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i) \neq 0$, $k = \overline{2, n-1}$, sub forma

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \ldots P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})). \quad (1.10)$$

Într-adevăr, folosind definiţia probabilităţii condiţionate, obţinem

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= P(A_1), \\
P(A_2|A_1) &= \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}, \\
P(A_3|(A_1 \cap A_2)) &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}, \\
&\ddots \\
P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})) &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Înmulţind relaţiile membru cu membru şi făcând simplificările corespunzătoare, obţinem (1.10).

Observaţia 1.6.1 Dacă evenimentele A şi B nu sunt independente, atunci din

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$0 \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1,$$

rezultă

$$P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$$

sau, notând $p_1 = P(A), p_2 = P(B), p_{12} = P(A \cap B)$ atunci $p_{12} \geqslant p_1 + p_2 - 1$. Această inegalitate poartă numele de **inegalitatea lui Boole** şi dă o margine inferioară pentru probabilitatea intersecţiei a două evenimente. Se poate demonstra, mai general,

$$p_{12\ldots n} \geqslant p_1 + p_2 + \ldots + p_n - (n-1),$$

unde $p_i = P(A_i), \quad i = \overline{1,n}, \quad p_{12\ldots n} = P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$.

Formula probabilităţii totale. Fie $\{E, K, P\}$ un câmp finit de evenimente, $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $A_i \in K, i = \overline{1,n}$, un sistem complet de evenimente şi B un eveniment oarecare, $B \in K$. Atunci

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i). \tag{1.11}$$

Într-adevăr, deoarece $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ putem scrie

$$B = B \cap E = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

şi cum pentru $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ atunci avem

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

Formula lui Bayes. Fie $\{E, K, P\}$ un câmp finit de evenimente şi $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $A_i \in K, i = \overline{1,n}$ un sistem complet de evenimente şi B un eveniment oarecare. Atunci

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}. \tag{1.12}$$

În condiţiile date prin ipoteză are loc formula probabilităţii totale şi ţinând seama de (1.2) obţinem

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Exemplul 1.6.1 *Controlul de calitate.*Presupunem că într-o cutie sunt 550 de piese, din care 2% sunt defecte. Care este probabilitatea ca alegând 25 de piese, acestea să conţină două piese defecte. Acesta este principiul testării produselor prin selecţii aleatoare.

Problema poate fi rezolvată într-un caz general. Presupunem că avem k piese defecte din m piese, $k \leqslant m$. Care este probabilitatea ca alegând n piese, dintre acestea j să fie defecte?

Putem alege cele n piese dintre cele $m(m \geqslant n)$, fără să ne intereseze ordinea pieselor, în C_m^n moduri. Câte din acestea vor conţine j piese defecte? Putem alege cele j piese defecte, din cele k, în C_k^j moduri, iar celelalte $n-j$ care nu sunt defecte în C_{m-k}^{n-j} moduri. Probabilitatea căutată va fi

$$\frac{C_{m-k}^{n-j} C_k^j}{C_m^n}. \tag{1.13}$$

În cazul nostru, $m = 550, k = 11, n = 25, j = 2$, astfel încât probabilitatea căutată va fi

$$\frac{C_{11}^2 C_{550}^{23}}{C_{550}^{25}} = 0,12.$$

Dacă însumăm probabilităţile (1.13) după $j, 0 \leqslant j \leqslant n$, rezultatul va fi 1, deoarece au fost luate în considerare toate posibilităţile. Am demonstrat formula

$$\sum_{j=0}^{k} C_k^j C_{m-k}^{n-j} = C_m^n$$

cu argumente probabilistice.

Exemplul 1.6.2 Dacă se amestescă un pachet de cărţi, care este probabilitatea ca cei patru aşi să apară unul după altul ?

Sunt 52 de cărţi dintre care patru aşi. Un rezultat posibil al experienţei este o înşiruire de 52 de cărţi, adică o permutare a celor 52 de cărţi. Sunt 52! cazuri posibile. În câte din aceste cazuri cei patru aşi se găsesc unul după altul? Cei patru aşi pot apare consecutiv în $49 \times 4!$ moduri. Restul de 48 de cărţi se pot aranja în 48! moduri. Folosind principiul multiplicării, numărul cazurilor favorabile va fi $4! \times 49 \times 48!$. Probabilitatea căutată va fi

$$\frac{49! \times 4}{52!} = 0,00003.$$

Exemplul 1.6.3 Urna U_1 conţine două bile roşii şi patru albe, urna U_2 conţine o bilă roşie şi două albe iar urna U_3 conţine cinci bile roşii şi patru bile albe. Fie A_i evenimentul de a extrage o bilă dintr-o urnă oarecare $U_i, i = \overline{1,3}$. Presupunem că probabilitatea de a extrage o bilă din urna U_i este $P(A_1) = 1/3$, din U_2 este $P(A_2) = 1/6$ şi din $U_3, P(A_3) = 1/2$. Se cere probabilitatea de a extrage o bilă roşie.

Fie R evenimentul de a extrage o bilă roşie. Observăm că $P(R)$ depinde în primul rînd de urna din care s-a făcut extragerea şi apoi de structura urnei din care am făcut extragerea, adică R este reuniunea evenimentelor disjuncte $A_1 \cap R, A_2 \cap R, A_3 \cap R$. Facem observaţia că A_1, A_2, A_3 formează un sistem complet de evenimente. Astfel

$$P(R) = P(\bigcup_{i=1}^{3}(A_i \cap R)) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i \cap R) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(R|A_i) = \frac{4}{9}$$

Presupunem acum că rezultatul experienţei este o bilă roşie, dar nu ştim din ce urnă provine. Dorim să calculăm probabilitatea ca bila roşie să provină din urna U_1, adică $P(A_1|R)$. Conform formulei lui Bayes

$$P(A_1|R) = \frac{P(A_1)P(R|A_1)}{P(R)} = \frac{1}{4}.$$

La fel

$$P(A_2|R) = \frac{1}{8} \quad P(A_3|R) = \frac{5}{8}.$$

Observăm că probabilităţile condiţionate $P(A_1|R), P(A_2|R), P(A_3|R)$ s-au modificat faţă de probabilităţile iniţiale $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ într-un mod care confirmă intuiţia, adică dacă s-a extras o bilă roşie, probabilitatea ca să aparţină urnei U_3 este mai mare deoarece U_3 are un procent mai ridicat de bile roşii şi, de asemenea, probabilitatea de a selecta o bilă roşie din U_3 este mai mare decât din U_2 sau U_1. Adesea $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ se numesc probabilităţi apriori, iar $P(A_1|R), P(A_2|R), P(A_3|R)$ se numesc probabilităţi aposteriori.

Exemplul 1.6.4 Un canal transmite semnale sub formă de şiruri formate din cifrele 0 şi 1. În canal pot apare perturbări care produc erori, astfel încât în loc de 1 apare 0 sau invers. Să presupunem că prin B_1 şi B_2 înţelegem evenimentele care constau în transmiterea cifrelor 1, respectiv 0, iar recepţionarea cifrelor 1 şi 0 le considerăm ca fiind evenimentele aleatoare A_1 şi respectiv A_2. Probabilităţile apriori pentru transmiterea lui 1 sau 0 sunt

$$P(B_1) = p \quad P(B_2) = 1 - p = q$$

iar probabilitatea de a recepţiona 0, dacă s-a transmis 1, este egală cu q_{10}, pe când probabilitatea de a recepţiona 1, dacă s-a transmis 0, este q_{01}. Să calculăm probabilităţile aposteriori $P(B_j|A_k),\ j,k = 1,2$.

Conform formulei lui Bayes avem

$$P(B_j|A_k) = \frac{P(A_k|B_j)P(B_j)}{P(B_1)P(A_k|B_1) + P(B_2)P(A_k|B_2)}, \quad j,k = 1,2.$$

Deoarece avem $P(A_2|B_1) = q_{10}$, $P(A_1|B_2) = q_{01}$ şi notând $p_{10} = 1 - q_{10},\ p_{01} = 1 - q_{01}$ se deduce

$$P(B_1|A_1) = \frac{pp_{10}}{pp_{10} + (1-p)(1-p_{01})}, \quad P(B_1|A_2) = \frac{p(1-p_{10})}{p(1-p_{10}) + (1-p)p_{01}},$$

$$P(B_2|A_1) = \frac{(1-p)(1-p_{10})}{pp_{10} + (1-p)(1-p_{01})}, \quad P(B_2|A_2) = \frac{(1-p)p_{01}}{p(1-p_{10}) + (1-p)p_{01}}.$$

Să observăm că

$$P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_2)P(A_1|B_2) = pp_{10} + (1-p)(1-p_{01}),$$

iar

$$P(A_2) = P(B_1)P(A_2|B_1) + P(B_2)P(A_2|B_2) = p(1-p_{10}) + (1-p)p_{01} = 1 - P(A_1).$$

În particular, în ipoteza că este vorba de un canal simetric ($q_{01} = q_{10}$ şi deci $p_{01} = p_{10}$), iar $p = q = \frac{1}{2}$ se deduce

$$P(A_1) = pp_{10} + (1-p)(1-p_{10}) = \frac{1}{2},\ P(A_2) = p(1-p_{10}) + (1-p)p_{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(B_1|A_2) = P(B_2|A_1) = 1 - p_{10},\ P(B_1|A_1) = P(B_2|A_2) = p_{10}.$$

ceea ce era previzibil.

Exemplul 1.6.5 Demonstrăm că dacă $A_i, i \in I, I$ o mulţime finită de indici, $\{A_i\}_{i\in I}$ formează un sistem complet de evenimente, atunci

$$P((\bigcup_{i\in I} A_i)|A) = \sum_{i\in I} P(A_i|A). \tag{1.14}$$

Pornind de la membrul întâi

$$P((\bigcup_{i\in I} A_i)|A) = \frac{P((\bigcup_{i\in I} A_i) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap A))}{P(A)}$$

şi ţinând seama de

$$(A_i \cap A) \cap (A_j \cap A) = \emptyset, \quad \forall i, j \in I, i \neq j,$$

obţinem

$$P((\bigcup_{i\in I} A_i)|A)) = \frac{\sum_{i\in I} P(A_i \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum_{i\in I} P(A_i|A)P(A)}{P(A)} = \sum_{i\in I} P(A_i|A).$$

Exemplul 1.6.6 Fie I o mulţime finită de indici, $\{A_i\}_{i\in I}$ un sistem complet de evenimente şi A, B două evenimente oarecare. Atunci

$$P(\bigcup_{i\in I}(A \cap A_i)|B) = \sum_{i\in I} P(A|(A_i \cap B))P(A_i|B) \tag{1.15}$$

Folosim formula (1.14) obţinem

$$P(\bigcup_{i\in I}(A \cap A_i)|B) = \sum_{i\in I} P((A \cap A_i)|B) = \frac{\sum_{i\in I} P(A \cap A_i \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{i\in I} P(A|(A_i \cap B))P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{\sum_{i\in I} P(A|(A_i \cap B))P(A_i|B)P(B)}{P(B)} =$$

$$= \sum_{i\in I} P(A|(A_i \cap B))P(A_i|B).$$

1.7 Scheme clasice de probabilitate

Schema lui Poisson. Se dau n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$ care conţin bile albe şi bile negre în proporţii date, deci cunoaştem probabilităţile $p_i, i = \overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă albă din urna U_i. Se cere probabilitatea de a extrage k bile albe şi $n - k$ bile negre, atunci când din fiecare urnă se extrage câte o bilă.

Notăm cu A_i evenimentul extragerii unei bile albe din urna U_i. Notăm şi B_k evenimentul care constă în extragerea a k bile albe şi $n-k$ bile negre, adică

$$B_k = (A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \bar{A}_{k+1} \cap \bar{A}_n) \cup (A_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_k \cap A_{k+1} \cap \bar{A}_{k+2} \cap \ldots \cap \bar{A}_n)$$

$$\cup (\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n),$$

numărul parantezelor fiind C_n^k. Un eveniment

$$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \bar{A}_{i_{k+1}} \cap \ldots \cap \bar{A}_{i_n}$$

se realizează, ţinând seama că evenimentele sunt independente, cu probabilitatea

$$p_{i_1} \cdots p_{i_k} q_{i_{k+1}} \cdots q_{i_n}$$

indicii $i_1, i_2 \ldots, i_n$ reprezentând o permutare a indicilor $1, 2, \ldots, n$, iar litera p apare de k ori cu indici diferiţi, iar q de $n-k$ ori cu indici care nu apar în p . Se observă că după aceiaşi regulă se calculează coeficientul lui x^k din polinomul

$$P(x) = (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \ldots (p_n x + q_n).$$

Schema lui Poisson permite rezolvarea problemelor în care se cere probabilitatea realizării de k ori a unor evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ atunci când se repetă de n ori aceste experienţe, presupuse independente, când cunoaştem $P(A_i) = p_i$, $i = \overline{1, n}$.

Exemplul 1.7.1 Într-un atelier sunt trei maşini. Prima dă 0,9 % rebut, a doua 1 % şi a treia 1,3 %. Se ia la întâmplare câte o piesă de la fiecare maşină. Se cere probabilitatea ca două din piese să fie bune şi una rebut.

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0,991, & q_1 = 0,001, & p_2 = 0,99, \\ q_2 = 0,01, & p_3 = 0,987, & q_3 = 0,013, \end{array}.$$

$$P(x) = (0,991x + 0,009)(0,99x + 0,01)(0,987x + 0,013).$$

Coeficientul lui x^2 este

$$0,991 \times 0,99 \times 0,013 + 0,99 \times 0,987 \times 0,987 \times 0,009 + 0,991 \times 0,987 \times 0,01 = 0,0313.$$

Schema lui Bernoulli. Presupunem că în schema lui Poisson urnele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sunt identice. Atunci putem lua

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p, \quad q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$$

Probabilitatea extragerii a k bile albe se va obţine calculând coeficientul lui x^k din polinomul

$$P(x) = (px + q)^n,$$

adică va fi

$$C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Recunoaştem în această expresie termenul general al ridicării la puterea n a binomului $px + q$. Pentru acest motiv schema se mai numeşte binomială. Deoarece urnele sunt identice, putem considera că toate extragerile se fac dintr-o singură urnă, bila extrasă punându-se în urnă după fiecare extragere. Obţinem astfel schema lui Bernoulli. Probabilitatea de a extrage k bile albe din n extrageri dintr-o urnă, punându-se de fiecare dată bila înapoi, este

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

unde p este probabilitatea oţinerii unei bile albe dintr-o singură extragere şi $q = 1 - p$. Schema lui Bernoulli se mai numeşte *shema bilei revenite (întoarse).*

Exemplul 1.7.2 Se aruncă un zar de 5 ori. Se cere probabilitatea ca faţa cu un punct să apară exact de două ori.

Avem:

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad n = 5, \quad k = 2,$$

$$P_{5,2} = C_5^2 (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^3 = 0,16.$$

Schema lui Bernoulli cu mai multe stări. Fie o urnă care conţine bile de m culori $c_1, c_2, \ldots, c_m$ iar p_i probabilitatea ca la o extragere să obţinem o bilă de culoarea c_i. Probabilitatea ca în n extrageri să obţinem n_1 bile de culoarea c_1 , n_2 bile de culoarea c_2 , ..., n_m bile de culoarea c_m $(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n)$ este

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}.$$

Această schemă rezolvă problemele în care se cere probabilitatea ca în n efectuări ale experienţei evenimentul A_i să se realizeze de n_i ori, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ fiind un sistem complet de evenimente şi $P(A_i) = p_i, i = \overline{1,m}$. Presupunem că în cele n efectuări ale experienţei s-au obţinut succesiv

$$\underbrace{A_1 \ldots A_1}_{n_1} \underbrace{A_2 \ldots A_2}_{n_2} \ldots \underbrace{A_m \ldots A_m}_{n_m}.$$

Acest eveniment se produce cu probabilitatea

$$\underbrace{p_1 \cdots p_1}_{n_1} \underbrace{p_2 \cdots p_2}_{n_2} \cdots \underbrace{p_m \cdots p_m}_{n_m}.$$

Acelaşi rezultat îl obţinem pentru orice altă ordine stabilită dinainte în care A_i apare de n_i ori. Rămâne să vedem în câte moduri putem scrie cele n simboluri, dintre care n_1 egale cu A_1, n_2 cu $A_2, \ldots, n_m$ cu A_m.

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots n_{m-1}}^{n_m} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\ldots n_{m-1})!}{n_m!\,(n-n_1-\ldots-n_{n_m})!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!}.$$

Exemplul 1.7.3 Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca exact de două ori să apară faţa cu un punct şi exact de 2 ori să apară faţa cu două puncte?

Avem:

$$n = 5, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 1,$$
$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{2}{3},$$
$$P_{4,2,2,1} = \frac{5!}{2! \times 2! \times 1!} \times (\frac{1}{6})^2(\frac{1}{6})^2(\frac{2}{3}) = \frac{5}{324}.$$

Schema hipergeometrică. O urnă conţine a bile albe şi b bile negre. Din această urnă se extrag n bile ($n \leqslant a + b$) pe rând, fără a pune bila extrasă înapoi în urnă (ceea ce este echivalent cu a extrage n bile deodată). Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase, k să fie albe ($k \leqslant a$) şi $n - k$ negre ($n - k \leqslant b$). Pentru a calcula acestă probabilitate vom stabili numărul cazurilor posibile şi numărul cazurlor favorabile.

Numărul cazurilor posibile este: C_{a+b}^n.

Numărul cazurilor favorabile: un grup de k bile albe dintr-un total de a bile albe poate fi luat în C_a^k moduri; un grup de $n - k$ bile negre din totalul de b bile negre poate fi obţinut în C_b^{n-k} moduri. Un grup de k bile albe şi $n - k$ bile negre poate fi obţinut, conform principiului multiplicării, în $C_a^k C_b^{n-k}$ moduri. Probabilitatea căutată este

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

Exemplul 1.7.4 La o tombolă sunt 400 bilete dintre care 4 câştigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea să nu se găsească nici un bilet câştigător?

Avem

$$a = 4, \quad b = 396,$$
$$k = 0, \quad n - k = 10, \quad n = 10,$$
$$p = \frac{C_4^0 C_{396}^{10}}{C_{400}^{10}} = 0,903.$$

În general, dacă urna conţine a_i bile de culoarea c_i, $i = \overline{1, m}$, probabilitatea de a obţine n_1 bile de culoarea c_1 , n_2 bile de culoarea c_2, ..., n_m bile de culoarea c_m când facem $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ extracţii, este egală cu

$$\frac{C_{a_1}^{n_1} C_{a_2}^{n_2} \ldots C_{a_m}^{n_m}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_m}^n}.$$

Exemplul 1.7.5 O urnă conţine 7 bile albe, 7 bile negre şi 6 verzi. Se extrag 9 bile. Care este probabilitatea să obţinem câte 3 de fiecare culoare?

Avem

$$a_1 = 7, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 6,$$
$$n_1 = 3, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 3,$$
$$p = \frac{C_7^3 C_7^3 C_6^3}{C_{20}^9} = 0,145.$$

1.8 Câmp infinit de probabilitate

În numeroase cazuri practice nu este cu putinţă să evaluăm numărul cazurilor egal posibile şi al celor favorabile pentru determinarea probabilităţii evenimentului care ne interesează. Asemenea situaţii apar în studiul fenomenelor economice şi sociale, în efectuarea controlului statistic al producţiei etc. Deci definiţia clasică a probabilităţii nu este satisfăcătoare când mulţimea evenimentelor elementare este infinită.

În acest caz definim câmpul infinit de evenimente astfel :

Definiţia 1.8.1 *O mulţime de evenimente* $\{ E, K \}$,$K \neq \emptyset$*, se numeşte* câmp infinit de evenimente *dacă :*

a) $\forall A \in K \Rightarrow \bar{A} \in K$;

b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset K \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \in K$.

Consecinţe care rezultată din definiţie :

C1. $\emptyset \in K$ şi $E \in K$.

Într-adevăr, deoarece $K \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in K \Rightarrow \bar{A} \in K \rightarrow A \cup \bar{A} \in K \Rightarrow E \in K$

$E \in K \Rightarrow \bar{E} \in K \Rightarrow \emptyset \in K$.

C2. Orice reuniune finită de evenimente din K este în K.

Într-adevăr, fie $A_1, A_2, \ldots, A_n \in K$ şi luăm $A_i = \emptyset$ pentru $i > n$. Conform b), $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in K$

C3. Orice intersecţie (finită sau numărabită) de elemente din K este de asemenea în K.

Fie I o mulţime de indici finită sau numărabilă

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \in K \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \in K$$

C4. Dacă $A, B \in K$ atunci $A \setminus B \in K$ (deoarece $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in K$).

C5. Dacă $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset K$ atunci

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \in K; \quad \limsup_{n\to\infty} A_n \in K.$$

Ţinem seama de definiţia limitei inferioare, respectiv superioare, de consecinţele C2, C3 şi obţinem

$$\liminf_{n\to\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) \in K; \quad \limsup_{n\to\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \in K.$$

C6. Dacă $(A_n)_{n\in I\!N^*} \subset K$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in K$, dacă această limită există. În acest caz

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \in K.$$

Observaţia 1.8.1 Într-un câmp infinit de evenimente sunt permise operaţiile clasice cu mulţimi.

Pentru a introduce noţiunea de probabilitate în asemenea cazuri, definim noţiunea de măsură a unui eveniment al unui câmp infinit de evenimente.

Definiţia 1.8.2 *Se numeşte* măsură a unui eveniment *A al câmpului infinit de evenimente* $\{\ E, K\ \}$ *o funcţie*

$$m : K \longrightarrow I\!R$$

care satisface următoarele axiome:

a) $\forall A \in K\ :\ m(A) \geqslant 0$*;*

b) $m(\emptyset) = 0$*;*

c) $m(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \sum\limits_{i\in I} m(A)$ *pentru* $(A_i)_{i\in I} \subset K$ *cu* $A_i \cap A_j = \emptyset\ \ i \neq j\ \ i,j \in I$*, iar* I *o mulţime cel mult numărabilă de indici.*

Observaţia 1.8.2 Axioma c) se numeşte axioma aditivităţii complete a măsurii m. În această axiomă intervine o reuniune numărabilă de evenimente, lucru despre care se poate vorbi numai în cazul în care câmpul de evenimente este infinit. Introducem $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ca fiind evenimentul care constă în realizarea a cel puţin unuia din evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Analog, evenimentul $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ constă în realizarea tuturor evenimentelor $A_1, A_2, \ldots,\ A_n \ldots$. Acceptarea axiomei c) este justificată; ea reprezintă o extindere naturală a proprietăţii corespunzătoare din câmpurile finite de evenimente.

Observaţia 1.8.3 Când $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ se obţine aditivitatea finită a măsurii

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

Observaţia 1.8.4 Din mulţimea funcţiilor de evenimente care satisfac axiomele a)-c) interesează numai acelea pentru care $m(E) < \infty, E$ fiind evenimentul cert.

Propoziţia 1.8.1 *Dacă* $m(E) < \infty$ *atunci pentru orice eveniment* A *avem* $m(A) < \infty$*.*

Demonstraţie. Deoarece $A\cup\bar{A} = E$, $A\cap\bar{A} = \emptyset \Rightarrow m(A\cup\bar{A}) = m(A)+m(\bar{A}) = m(E) < \infty$. Dar $m(\bar{A}) \geqslant 0 \Rightarrow m(A) \leqslant m(E) < \infty \Rightarrow m(A) < \infty$. ∎

Definiţia 1.8.3 *Fie un câmp infinit de evenimente* $\{ E, K \}$. *Se numeşte* probabilitatea evenimentului $A \in K$, *măsura* $m(A)$ *pentru care* $m(E) = 1$

Definiţia 1.8.4 *Se numeşte* funcţie de probabilitate *acea măsură a evenimentelor definită pe câmpul infinit de evenimente* $\{E,K\}$ *care satisface proprietatea* $m(E)=1$.

Definiţia 1.8.5 *Se numeşte* câmp borelian (infinit) de probabilitate *un câmp infinit de evenimente* $\{ E, K \}$ *pe care s-a definit o funcţie de probabilitate* P. *Un câmp infinit de probabilitate se notează* $\{ E, K, P \}$.

Problema cum trebuie determinată probabilitatea unui eveniment nu poate fi rezolvată în general deoarece ea depinde în mod esenţial de natura fenomenului studiat.

Exemplul 1.8.1 De exemplu, ne vom referi la probabilităţile geometrice. Fie $E \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu. Un punct $M \in E$, luat la întâmplare, se numeşte punct aleator. Fie o submulţime $A \subset E$. Prin măsura lui A putem înţelege lungimea, aria sau volumul lui A. Dacă admitem ipoteza că în cazul în care $A, B \subset E$ şi $m(A) = m(B) \Rightarrow A = B$ sunt echivalente din punct de vedere al ariei, indiferent de forma domeniilor A şi B, putem scrie

$$P(M \in A) = km(A)$$

unde k este un factor constant. Pentru întreg domeniul E avem evenimentul sigur, deci

$$P(M \in E) = 1 = km(E)$$

de unde

$$k = \frac{1}{m(E)}$$

şi deci obţinem probabilitatea

$$P(M \in A) = \frac{m(A)}{m(K)}.$$

În cazul considerat, dacă A nu are decât un număr finit de puncte, $P(M \in A) = 0$.

Exemplul 1.8.2 Vom arăta cum se pote construi o funcţie de probabilitate pentru orice mulţime numărabilă $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Fiecărui punct e_i îi ataşăm un număr p_i satisfăcând condiţiile

$$\forall i \in \mathbb{N}^* : \quad p_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Fie $K = \mathcal{P}(E)$ şi A o submulţime a lui E. Definim

$$P(A) = \sum_{e_i \in A} p_i = \sum_{e_i \in A} P(e_i)$$

Constatăm imediat că $\{ E, K, P \}$ este un câmp infinit de probabilitate.

Dăm un exemplu de câmp de probabilitate.

Exemplul 1.8.3 Fie $\mathcal{B}$ corpul borelian generat de mulţimea părţilor deschise de pe axa reală $I\!R$ şi o funcţie f definită pe $E \in \mathcal{B}$ cu valori în $I\!R$, integrabilă în raport cu măsura Lebesque [vezi 22] şi care îndeplineşte condiţiile

$$f(x) \geqslant 0, \qquad \int_E f(x)dx = 1.$$

Se verifică imediat că $\{ E, K, P \}$ este un câmp borelian de probabilitate, unde

$$K = \{A \cap E, A \in \mathcal{B}\},$$

iar

$$P(A) = \int_E f(x)\chi_A(x)dx$$

pentru $A \in K$, unde

$$\chi_A(e) = \begin{cases} 1, & \textit{dacă } e \in A, \\ 0, & \textit{dacă } e \notin A, \end{cases}$$

În particular, dacă f este continuă, punem

$$P(A) = \int_A f(x)dx.$$

Se demonstrează că P satisface toate axiomele probabilităţii. Astfel de funcţii se pot găsi. De exemplu

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{sau} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

În câmpurile infinite de probabilitate se păstrează noţiunile şi proprietăţile din câmpurile finite de probabilitate.

1. Probabilitatea condiţionată se defineşte plecând de la relaţia

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ dacă } P(B) \neq 0.$$

   Se poate demonstra că tripletul $\{ E, K, P_B \}$ este un câmp borelian de probabilitate. Într-adevăr,

   – $P(A|B) \geqslant 0$ deoarece $P(A \cap B) \geqslant 0$ şi $P(B) > 0$.

   – Dacă $A = E$ atunci, deoarece $E \cap B = B$, rezultă

   $$P(E|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

   – Dacă $(A_i)_{i \in I} \subset K$ este o familie cel mult număarbilă de evenimente incompatibile două câte două, atunci şi evenimentele $(A \cap A_i)_{i \in I}$ sunt incompatibile două câte două şi

   $$P(\bigcap_{i\in I} A_i|B) = \frac{P(B \cap (\bigcup_{i\in I} A_i))}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i\in I}(B \cap A_i))}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{i\in I} P(B\cap A_i)}{P(B)} = \sum_{i\in I} P(A_i|B).$$

2. Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes rămân valabile dacă considerăm sisteme complete de evenimente numărabile. Fie $(A_i)_{i\in I} \subset K$ o familie cel mult numărabilă de evenimente incompatibile două câte două cu $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$ şi $P(A_i) \neq 0, i \in I$, atunci
$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A_i)P(A|A_i)$$
şi
$$P(A_i|A) = \frac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum\limits_{j\in I} P(A_j)P(A|A_j)} \quad i \in I.$$

Definiţia 1.8.6 *Se spune că evenimentele* $(A_n)_{n\in I\!N} \subset K$ *sunt* independente *dacă orice număr finit de evenimente din acest şir este independent.*

Există şi proprietăţi noi ale funcţiei de probabilitate P cum ar fi următoarele:

Propoziţia 1.8.2 *Fie* $(A_n)_{n\in I\!N^*} \subset K$ *şi* P *o funcţie de probabilitate. Atunci*
$$P(\bigcup_{n\in I\!N^*} A_n) \leqslant \sum_{n\in I\!N^*} P(A_n).$$

Demonstraţie. Introducem un şir de evenimente din K în felul următor:
$$A'_1 = A_1$$
$$A'_2 = A_2 \setminus A_1$$
$$A'_{n+1} = A_{n+1} \setminus (\bigcup_{j=1}^{n} A_j).$$

Evenimentele $(A'_n)_{n\in I\!N^*}$ prin modul în care au fost construite sunt incompatibile două câte două; în plus $A'_n \subseteq A_n, \quad n \in I\!N^*$. Demonstrăm că
$$\bigcup_{n\in I\!N^*} A'_n = \bigcup_{n\in I\!N^*} A_n.$$

Evident $\bigcup\limits_{n\in I\!N^*} A'_n \subset \bigcup\limits_{n\in I\!N^*} A_n$.

Demonstrăm incluziunea contrară. Fie $e \in \bigcup\limits_{n\in I\!N^*} A_n$ şi n_0 cel mai mic număr natural n pentru care $e \in A_{n_0}$; rezultă deci
$$e \in A'_{n_0} \subset \bigcup_{n\in I\!N^*} A'_n,$$

$$\bigcup_{n\in I\!N^*} A_n \subset \bigcup_{n\in I\!N^*} A'_n$$

adică ceea ce trebuia de demonstrat. De aici rezultă că

$$P(\bigcup_{n\in I\!N^*} A_n) = P(\bigcup_{n\in I\!N^*} A'_n) = \sum_{n\in I\!N^*} P(A'_n) \leqslant \sum_{n\in I\!N^*} P(A_n)$$

datorită proprietăţilor de aditivitate şi monotonie a probabilităţii. ■

Propoziţia 1.8.3 Inegalitatea lui Boole. *Dacă* $(A_i)_{i\in I} \subset K$ *este o mulţime cel mult numărabilă de evenimente, atunci*

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) \geqslant 1 - \sum_{i\in I} P(\bar{A}_i).$$

Demonstraţie. Din relaţiile lui De Morgan avem

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \overline{(\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i)}$$

deci

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = P(\overline{\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i}) = 1 - P(\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i)$$

dar

$$P(\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i) \leqslant \sum_{i\in I} P(\bar{A}_i)$$

şi obţinem inegalitatea dorită. ■

Definiţia 1.8.7 *Un şir de evenimente* $(A_n)_{n\in I\!N^*}$ *este* ascendent (descendent) *dacă* $A_j \subset (\supset) A_i$ *pentru* $j < i$, $i, j \in I\!N^*, i \neq j$.

Propoziţia 1.8.4 *Fie* $(A_n)_{n\in I\!N^*}$ *un şir descendent de evenimente din* K. *Dacă* $A = \bigcap_{n\in I\!N^*} A_n$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n\in I\!N^*} A_n) = P(A).$$

Demonstraţie. a) Considerăm cazul în care $A = \emptyset$. Trebuie să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Deoarece $(A_n)_{n\in I\!N^*}$ este un şir descendent, putem scrie

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup \dots$$

şi deci A_n apare ca o reuniune de evenimente incompatibile, căci

$$(A_{n+k} \setminus A_{n+k+1}) \cap (A_{n+s} \setminus A_{n+s+1}) = \emptyset$$

dacă $k \neq s$ şi obţinem

$$P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \setminus A_{i+1}) = \sum_{i=n}^{\infty} (P(A_i) - P(A_{i+1})),$$

iar seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \setminus A_{i+1}) = P(A_1)$$

este convergentă, deci restul seriei converge la zero când $n \to \infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

b) Considerăm cazul $A \neq \emptyset$. Vom introduce evenimentele $C_n = A_n \setminus A$, $n \in I\!N^*$, care reduc acest caz la cazul precedent. Şirul $(C_n)_{n\in I\!N^*}$ este un şir descendent şi deoarece $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$, rezultă, conform cazului a) că

$$\lim_{n\to\infty} P(C_n) = 0$$

Dar

$$P(C_n) = P(A_n \setminus A) = P(A_n) - P(A)$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A).$$

■

Propoziţia 1.8.5 *Fie $(A_n)_{n\in I\!N^*}$ un şir ascendent de evenimente din K. Dacă $A = \bigcup\limits_{n\in I\!N^*} A_n$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n\in I\!N^*} A_n) = P(A).$$

Demonstraţie. Trecem la evenimentele complementare; şirul $(\bar{A}_n)_{n\in I\!N^*}$ este descendent, $\cup$ se transformă în $\cap$ şi se aplică propoziţia 1.8.4. ■

Definiţia 1.8.8 *Fie (π) o proprietate descrisă de o propoziţie formulată într-un câmp borelian de probabilitate $\{E, K, P\}$. Dacă toate evenimentele elementare care nu implică proprietatea (π) formează un* eveniment de probabilitate nulă *atunci vom spune că (π) este adevărată aproape sigur.*

Observaţia 1.8.5 În câmpuri infinite de probabilitate pot exista evenimente diferite de evenimentul imposibil şi care să aibă probabilitatea nulă.

Exemplul 1.8.4 Fie un ceas şi presupunem că acele sale se opresc la întâmplare. Să se determine probabilitatea ca minutarul să se oprească în dreptul uneia din cele 12 cifre ale cadranului este nulă.

Aceata rezultă din observaţia că probabilitatea ca minutarul să se oprească într-un segment al circumferinţei cadranului este proporţională cu lungimea acestuia. Ori cele 12 cifre ale cadranului alcătuiesc o mulţime formată din 12 puncte ale circumferinţei, fiecare din acestea fiind asimilat cu un segment de o lungime nulă. Evident, nu este exclus ca minutarul să se oprească în dreptul unei cifre. Proprietatea "minutarul nu se opreşte în dreptul unei cifre a cadranului " este o proprietate aproape sigură.

1.9 Probleme propuse

Problema 1.1 Se joacă un joc. Partida este considerată câştigată de primul dintre cei doi jucători care câştigă trei jocuri. Dacă jocul se întrerupe la scorul de 2-1, cum trebuie împărţită miza?

Soluţie. La prima vedere s-ar părea că miza trebuie împărţită în trei părţi egale şi câştigătorul ia două părţi. Corect este ca miza să fie împărţită proporţional cu probabilitatea pe care o are fiecare jucător de a câştiga partida, dacă acesta ar fi continuat.

Să presupunem că se mai joacă două jocuri (indiferent de rezultatul primului joc). Notăm cu 1 dacă jucătorul a câştigat partida şi cu 0 dacă a piedut-o. Prin notaţia (1, 0) înţelegem că primul jucător a câştigat prima partida iar al doilea nu a piedut a doua partidă. Sunt următoarele posibilităţi: (1, 1), (1, 0), (0, 1) şi (0, 0), din care rezultă că primul jucător, care conduce cu 2-1, are trei şanse şi al doilea una singură. Miza trebuie împărţită în patru părţi egale şi primul jucător ia trei părţi, iar al doilea o parte.

Problema 1.2 Un student are de răspuns la n întrebări, cărora trebuie să le asocieze răspunsul corect dintre n răspunsuri indicate. Stabiliţi probabilitatea ca studentul să răspundă la:

a) prima întrbare;

b) primele două întrebări;

c) cel puţin o întrebare.

Indicaţie. a) numătul cazurilor posibile: $n!$, numărul cazurilor favirabile $(n-1)!$, probabilitatea căutată: 1/n;

b) $1/(n-2)!$;

c) dacă notăm cu A_i evenimentul că studentul răspunde corect la întrebarea i, evenimentul căutat este $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Folosind formula (1.9) obţinem: $1 - 1/2! + 1/3! - \ldots + (-1)^{n-1}1/n!$.

Problema 1.3 Evenimentul A constă în apariţia cel puţin o dată a feţei 5 aruncând un zar de 4 ori, iar evenimentul B constă în apariţia feţei 5 cel puţin de două ori, aruncând de 18 ori câte două zaruri. Care din cele două evenimente este cel mai probabil?

Indicaţie. Se poate interpreta apariţia feţei 5 a unui zar ca o urnă cu două stări, una "faţa cu cu 5" cu probabilitatea $q = 5/6$. $P(\bar{A}) = (\frac{5}{6})^4, P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^4$. Deoarece aruncările sunt independete, în loc să aruncăm de 18 ori câte două zaruri, putem arunca 36 de zaruri o singură dată.

$$P(\bar{B}) = (\frac{5}{6})^{36} + 36\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{35}.$$

Avem

$$\frac{P(\bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{(\frac{5}{6})^{35}\frac{41}{6}}{(\frac{5}{6})^4} < 7(\frac{5}{6})^{31} < 1.$$

Problema 1.4 Un calculator este format din n componente. Probabilitatea ca o componentă i să se nu defecteze în perioada de timp T este $p_i, i = \overline{1,n}$. Componentele se defectează independent unele de celelalte. Să se calculeze probabilitatea ca în perioada de timp T calculaterul să se defecteze. (Defectarea unei componente conduce la oprirea calculatorului.)

Soluţie. Caculăm probabilitatea evenimentului contrar, adică în perioada de timp T calculatorul să funcţioneze. Aceasta înseamnă că toate componentele să nu se defecteze, iar probabilitatea acestui eveniment este $\prod_{i=1}^{n} p_i$. Probabilitatea căutată va fi $1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$.

Problema 1.5 Un circuit electric are patru relee a căror funcţionare este egal probabilă (funcţionează şi se pot defecta independent unul de celălalt), montate după Figura 1.1. Calculaţi probabilitătea ca între punctele A şi B să nu circule curentul.

Soluţie. Ntoăm cu A_i evenimentul "releul R_i este defect". Curentul nu circulă atunci când se realizează evenimentul

$$((A_1 \cup A_2) \cap A_4) \cup A_3 = (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup A_3.$$

Cum orice releu poate fi în două poziţii, închis sau deschis, rezultă că numărul cazurilor posibile este $2^4 = 16$.

Probabilitatea căutată este $2 \cdot 4/16 - 8/16 - 3 \cdot 2/16 + 1/16$.

Problema 1.6 Trei mesaje sunt transmise pe un canal de comunicare, pe fiecare dintre ele putând fi transmis cu o anumită exactitate. Transmiterea unui mesaj poate conduce la unul din următoarele evenimente:

a) $A_1 = \{$ mesajul este transmis într-o formă corectă $\}$.

b) $A_2 = \{$ mesajul este parţial eronat $\}$.

c) $A_3 = \{$ mesajul este complet eronat $\}$.

Probabilităţile evenimentelor A_1, A_2, A_3 sunt date şi anume egale cu p_1, p_2 şi p_3, $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Considerând că transmiterea corectă sau eronată a unui mesaj nu este influenţată de modul de transmitere a celorlalte (independenţa evenimentelor), să se găsească probabilităţle următoarelor evenimente:

i) $A = \{$ toate mesajele sunt transmise corect $\}$.

ii) $B = \{$ cel puţin un mesaj să fie complet eronat $\}$.

iii) $C = \{$ cel puţin două mesaje sunt parţial sau complet eronate $\}$.

Soluţie. Notăm următoarele evenimente astfel:
$A_{11} = \{$ primul mesaj transmis este corect $\}$,
$A_{12} = \{$ al doilea mesaj transmis este corect $\}$,
$A_{13} = \{$ al treilea mesaj transmis este corect $\}$,
$A_{21} = \{$ primul mesaj transmis este parţial eronat $\}$,
$A_{22} = \{$ al doilea mesaj transmis este parţial eronat $\}$,
$A_{23} = \{$ al treilea mesaj transmis este parţial eronat $\}$,
$A_{31} = \{$ primul mesaj transmis este complet eronat $\}$,

$A_{32} = \{$ al doilea mesaj transmis este complet eronat $\}$,

$A_{33} = \{$ al treilea mesaj transmis este complet eronat $\}$.

Avem $P(A_{11}) = P(A_{12}) = P(A_{13}) = p_1$, $P(A_{21}) = P(A_{22}) = P(A_{23}) = p_2$, $P(A_{31}) = P(A_{32}) = P(A_{33}) = p_3$. Evenimentul A înseamnă că primul mesaj transmis este corect şi al doilea mesaj transmis este corect şi al treilea mesaj transmis este corect, adică $A = A_{11} \cap A_{12} \cap A_{13}$ şi deoarece evenimentele sunt independente (conform presupunerii făcute) avem $P(A) = p_1^3$. Complementarul evenimentului B este: toate mesajele sunt sau corecte sau parţial eronate, deci $B = (A_{11} \cup A_{12}) \cap (A_{21} \cap A_{22}) \cup (A_{31} \cap A_{32})$. Probabilitatea acestui eveniment este $(p_1 + p_2)^3$, iar $P(B) = 1 - (p_1 + p_2)^3$. Evenimentul C este compus din reuniunea evenimentelor: (primul mesaj este corect şi al doilea mesaj este parţial sau complet eronat şi al treilea mesaj este parţial sau complet eronat) sau (primul mesaj este parţial sau complet eronat şi al doilea mesaj este corect şi al treilea mesaj este parţial sau complet eronat) sau (primul mesaj este parţial sau complet eronat şi al doilea este parţial sau complet eronat şi al treilea mesaj este corect) sau (toate cele trei mesaje sunt parţial sau complet eronate), adică $C = (A_{11} \cap ((A_{22} \cup A_{32}) \cap (A_{23} \cup A_{33}))) \cap ((A_{21} \cup A_{31}) \cap A_{12} \cap (A_{23} \cup A_{33})) \cap ((A_{21} \cup A_{31}) \cap (A_{22} \cup A_{32}) \cap A_{31}) \cup ((A_{21} \cup A_{31}) \cap (A_{22} \cup A_{32}) \cap (A_{23} \cup A_{33}))$. Probabilitatea acestui eveniment este $P(C) = 3(p_2 + p_3)^2 p_1 + (p_2 + p_3)^3$.

Problema 1.7 Un mesaj important este transmis simultan pe n canale de comunicaţie şi repetat pe fiecare canal de k ori pentru a uşura recepţionarea sa corectă. Probabilitatea ca în timpul transmisiei unui mesaj acesta să fie eronat este p şi nu depinde de transmiterea altor mesaje. Fiecare canal de comunicaţie poate fi "blocat" cu zgomote cu probabilitatea q; un canal "blocat" nu poate transmite nici-un fel de mesaje. Să se calculeze probabilitatea evenimentului

$A = \{$ un mesaj este transmis sub formă corectă măcar odată $\}$.

Soluţie. Introducem evenimentul:

$B = \{$ un mesaj este transmis pe un canal de comunicaţie fără nici o eroare măcar odată $\}$.

Pentru ca să aibă loc evenimentul B mai întâi canalul nu trebuie să fie "blocat" cu zgomote şi apoi măcar unul din cele k mesaje transmise nu trebuie să fie eronat (contrar evenumentului că toate cele k mesaje transmise sunt eronate). Obţinem $P(B) = (1-q)(1-p^k)$. Probabilitatea evenimentului A, eveniment care înseamnă că evenimentul B s-a produs măcar odată pe un canal, este $P(A) = 1 - (1 - P(B))^n = 1 - (1 - (1-q)(1-p^k))^n$.

Problema 1.8 Un mesaj format din cifrele 0 şi 1 este transmis. Fiecare simbol poate fi transmis eronat cu probabilitatea p (este schimbat în contrarul său cu probabilitatea q). Pentru siguranţă, mesajul este transmis de două ori; informaţia este considerată corectă dacă ambele mesaje coincid. Să se calculeze probabilitatea ca mesajul să nu fie corect, în ciuda faptului că cele două mesaje transmise sunt identice.

Soluţie. Evenimentul ca mesajul să nu fie corect este contrar evenimentului că ambele mesaje sunt corecte. Probabilitatea ca un mesaj transmis să fie corect este $(1-p)^n$, probabilitatea ca ambele mesaje să fie corecte este $(1-p)^{2n}$, iar probabilitatea căutată este $1 - (1-p)^{2n}$.

Problema 1.9 Fie opt canale de transmitere a informaţiei care funcţionează independent. Presupunem că un canal este activ cu probabilitatea 1/3. Să se calculeze probabilitatea ca la un moment dat să fie mai mult de şase canale active.

Soluţie. Pentru $i = 1, \ldots, 8$ fie A_i evenimentul: "canalul i este activ". Numărul canalelor active este egal cu numărul de realizări ale evenimentelor $A_i, i = 1, \ldots, 8$, în opt experienţe Bernoulli cu $p = 1/3$. Atunci probabilitatea ca mai mult de şase canale să fie active este

$$P(k = 7) + P(k = 8) = C_8^7(1/3)^7(2/3) + C_8^8(1/3)^8 = 0,0024 + 0,00015 = 0,00259$$

Problema 1.10 Un bloc de 100 de biţi este transmis pe un canal de comunicaţie binar cu probabilitatea de eroare pe bit 10^{-3}. Să se găseacă probabilitatea ca blocul să conţină trei sau mai mult de trei erori.

R:$1.5 \cdot 10^{-4}$.

Problema 1.11 Un asamblor de calculatoare foloseşte circuite din trei surse: A, B şi C. Ele pot fi defecte cu probabilităţile de respectiv 0,001, 0,005 şi 0,01. Dacă se ia un circuit la întîmplare şi se constată că este defect, care este probabilitatea ca el să provină de la sursa A sau B.

Soluţie. Fie A_1 evenimentul ca circuitul să provină de la sursa A, A_2 de la sursa B şi A_3 să provină de la sursa C. Fie D evenimentul ca circuitul folosit să fie defect, iar $D|A_i, i = 1, 2, 3$ evenimentul ca circuitul folosit să fie defect ştiind că el provine de la sursa A, B şi respectiv C. Avem

$$P(D|A_1) = 0,001, P(D|A_2) = 0,005, P(D|A_3) = 0,01$$

Folosind formula lui Bayes (1.12) obţinem

$$P(A_1|D) = 1/16, P(A_2|D) = 10/16.$$

Deoarece evenimentele $A_1|D$ şi $A_2|D$ sunt incompatibile, rezultă

$$P(A_1 \cup A_2|D) = P(A_1|D) + P(A_2|D) = 11/16 = 0,6875.$$

Problema 1.12 Multe sisteme de comunicaţie pot fi modelate în felul următor: mai întâi utilizatorul introduce 0 sau 1 în sistem şi semnalul corespunzător este transmis; în al doilea rând ia o decizie asupra a ceea ce s-a introdus în sistem pe baza semnalului receptionat. Presupunem că utilizatorul transmite 0 cu probabilitatea $1 - p$ şi 1 cu probabilitatea p şi că cel ce receptionează ia o decizie eronată cu probabilitatea ε. Pentru $i = 0, 1$ fie A_i evenimentul că la intrare s-a introdus i şi B_i evenimentul că decizia celui ce receptionează a fost i. Să se calculeze probabilităţile $P(A_i \cap B_j)$ pentru $i = 0, 1$ şi $j = 0, 1$.

Presupunem că probabilităţile ca la intrare să se transmită 0 sau 1 sunt egale cu 1/2. Să se calculeze probabilitatea evenimentului B_1. Dar probabilitatea de a se fi transmis 0 ştiind că s-a receptionat 1? Dar probabilitatea de a se fi transmis 1 ştiind că s-a receptionat 1?

Soluţie.

Se obţin probabilităţile

$$\begin{aligned}
&P(A_0 \cap B_0) = (1-p)(1-\varepsilon)\\
&P(A_0 \cap B_1) = (1-p)\varepsilon\\
&P(A_1 \cap B_0) = p\varepsilon\\
&P(A_1 \cap B_1) = p(1-\varepsilon).
\end{aligned}$$

Evenimentele A_1 şi A_2 formează un sistem complet de evenimente pentru spaţiul de selecţie $E = \{0, 1\}$. Pentru a calcula probabilitatea evenimentului B_1 aplicăm formula probabilităţii totale:

$$P(B_1) = P(A_0)P(B_1|A_0) + P(A_1)P(B_1|A_1) = 1/2\varepsilon + 1/2(1-\varepsilon) = 1/2.$$

Aplicând formula lui Bayes obţinem probabilităţile (pe care le-am mai numit posteori);

$$\begin{aligned}
P(A_0|B_1) &= \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} = \frac{\varepsilon/2}{1/2} = \varepsilon\\
P(A_1|B_1) &= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{(1-\varepsilon)/2}{1/2} = 1-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dacă ε este mai mic decât 1/2 atunci este mai probabil ca la intrare să avem 1 decât 0 dacă la ieşire s-a primit semnalul 1.

Problema 1.13 Un sistem constă dintr-o unitate centrală şi trei unităţi periferice. Sistemul funcţionează la capacitate optimă dacă unitatea centrală şi două unităţi periferice funcţionează. Să se calculeze probabilitatea ca sistemul să funcţioneze la capacitate optimă presupunând că defectarea unităţilor se face independent una de cealalta.

Soluţie. Definim următorele evenimente: A-unitatea centrală funcţionează; B_i-unitatea periferică i funcţionează, unde $i = 1, 2, 3$. Evenimentul F-două sau mai multe unităţi periferice funcţionează înseamnă că toate trei unităţile periferice funcţionează sau exact două unităţi periferice funcţionează. Astfel:

$$\begin{aligned}
&F = (B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) \cup (B_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3) \cup (\bar{B}_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup\\
&\cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3).
\end{aligned}$$

Observăm că evenimentele de mai sus din paranteze sunt indepandente între ele şi deci

$$\begin{aligned}
&P(F) = P(B_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(B_1)P(\bar{B}_2)P(B_3)+\\
&+P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(B_3) =\\
&= 3(1-a)^2a + (1-a)^3
\end{aligned}$$

unde s-a presupus că fiecare periferic se defectează cu probabilitatea egală cu a, astfel încât $P(B_i) = 1 - a$ şi $P(\bar{B}_i) = a$. Evenimentul "sistemul funcţionează la capacitate optimă" este $A \cap F$. Dacă presupunem că unitatea centrală se defectează cu probabilitatea p, atunci:

$$P(A \cap F) = P(A)\,P(F) = (1-p)P(F) = (1-p)3(1-a)^2a + (1-a)^3.$$

Fie $a = 10\%$, atunci toate cele trei periferice sunt funcţionale $(1-a)^3 = 72,9\%$ din timp iar două sunt funcţionale şi una defectă $3(1-a)^2a = 24,3\%$ din timp. Astfel două sau mai multe, periferice funcţtionează $97,2\%$ din timp. Presupunem că unitatea centrală nu este foarte bună, şi anume $p = 20\%$, atunci sistemul funcţionează la capacitate optimă numai $77,8\%$ din timp, aceasta datorită faptului că unitatea centrală se defectează.

Presupunem că s-a introdus în sistem o a doua unitate centrală identică cu prima, adică $p = 20\%$ şi sistemul funcţionează la capacitate optimă dacă măcar una din cele două unităţi centrale funcţionează. Să calculăm cât la sută din timp funcţionează sistemul în acest caz. Definim evenimentele A_i-unitatea centrală $i = 1,2$ funcţionează. Evenimentul "sistemul funcţionează la capacitate optimă" este, în acest caz, $(A_1 \cap F) \cup (A_2 \cap F)$. Atunci

$$\begin{aligned}
&P[(A_1 \cap F) \cup (A_2 \cap F)] = P(A_1 \cap F) + P(A_2 \cap F)- \\
&-P[(A_1 \cap F) \cap (A_2 \cap F)] = P(A_1)\,P(F) + P(A_2)\,P(F) - P(A_1 \cap A_2 \cap F) = \\
&= P(A_1)\,P(F) + P(A_2)\,P(F) - P(A_1)\,P(\cap A_2)\,P(\cap F) = \\
&= 2(1-p)3(1-a)^2a + (1-a)^3 - (1-p)^2 3(1-a)^2 a + (1-a)^3 = 93,3\%
\end{aligned}$$

Aceasta a condus la o creştere de 15.5% a timpului de funcţionare faţă de cazul în care sistemul funcţiona cu o singură unitate centrală.

Problema 1.14 Un sistem de comunicaţie transmite informaţie bimară pe un canal care introduce la transmiterea unui bit erori aleatoare cu probabilitatea $\varepsilon = 10^{-3}$. Fiecare bit este transmis de trei ori şi în funcţie de semnalul majoritar recepţionat se decide informaţia ca fiind cea transmisă. Să se calculeze probabilitatea ca decizia luată să fie incorectă.

Soluţie. Cel ce recepţionează va lua o decizie eronată dacă canalul introduce două sau mai multe erori. Dacă privim fiecare transmitere ca o experienţă Bernoulli în care realizarea evenimentului corespunde introducerii unei erori, atunci probabilitatea de a se produce două sau mai multe erori în trei experienţe Bernoulli este

$$P[k \geqslant 2] = C_3^2(0,001)^2(0,999) + C_3^3(0,001)^3 \approx 3 \times 10^{-6}$$

Problema 1.15 O informaţie telegrafică constă din semnale "liniuţe" şi "puncte". În medie se deformează 2/5 din semnalele cu "puncte" şi "liniuţe". Este cunoscut că semnalele "puncte" şi "liniuţe" se întâlnesc în raportul 5/3.

Să se determine probabilitatea ca:

a) primind un semnal consacrat, acesta să fie "punct" şi

b) probabilitatea ca el să fie "liniuţă".

Soluţie. Notăm cu A evenimentul de primire a semnalului "punct", iar prin B evenimentul de primire a semnalului "liniuţă". Se pot considera următoarele ipoteze: H_1 este transmis semnalul "punct", H_2 este transmis semnalul "liniuţă". Avem

$$\frac{P(H_1)}{P(H_2)} = \frac{5}{3},\ \ P(H_1) + P(H_2) = 1.$$

deci

$$P(H_1) = \frac{5}{8},\ P(H_2) = \frac{3}{8}$$

şi

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5},\ P(A|H_2) = \frac{1}{3},\ P(B|H_1) = \frac{2}{5},\ P(B|H_2) = \frac{2}{3}.$$

Folosind formula probabilităţii totale obţinem:

$$P(A) = \frac{5}{8}\frac{3}{5} + \frac{3}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{5}{8}\frac{2}{5} + \frac{3}{8}\frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Avem cele două probabilităţi:

$$a)\ \ P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{3}{4},$$

$$b)\ \ P(H_2|B) = \frac{P(H_2)P(B|H_2)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

Capitolul 2

Variabile aleatoare discrete

2.1 Definiţia şi clasificarea variabilelor aleatoare

Una din noţiunile fundamentele ale teoriei probabilităţilor este cea de variabilă aleatoare. Teoria clasică a probabilităţilor operează, în principal, cu evenimente, iar teoria modernă preferă, unde este posibil, să studieze variabile aleatoare.

Fie { E,K,P } un câmp borelian de probabilitate care a fost definit în Capitolul 1.8.

Definiţia 2.1.1 *Funcţia*

$$X : E \to \mathbb{R}$$

se numeşte variabilă aleatoare *dacă*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \{e \in E \mid X(e) < x\} \in K. \tag{2.1}$$

Pentru simplitate, vom nota $\{e \in E \mid X(e) < x\} = \{X < x\}$.

Observaţia 2.1.1 Nu este obligatoriu $X(E) = \mathbb{R}$, deci $X(E) \subseteq \mathbb{R}; X(E)$ reprezintă mulţimea valorilor variabilei aleatoare.

După proprietăţile mulţimii valorilor variabilei aleatoare, adică după proprietăţile mulţimii $X(E)$, clasificăm variabile aleatoare astfel:

- variabile aleatoare de tip discret, dacă $X(E)$ este cel mult numărabilă; dacă $X(E)$ este finită, variabila aleatoare se numeşte discretă simplă, iar dacă $X(E)$ este infinită, dar numărabilă, variabila aleatoare se numeşte discretă cu o infinitate de valori.

- variabile aleatoare de tip continuu, dacă $X(E)$ este o mulţime infinită de numere reale.

Exemple de variabile aleatoare discrete:

- variabile aleatoare ale cărei valori reprezintă numărul de apeluri zilnice primite la o centrală telefonică,

- variabila aleatoare ale cărei valori reprezintă numărul de ruperi de fire la o maşină de cusut,

- variabila aleatoare ale cărei valori reprezintă numărul de puncte apărute pe o faţă a zarului, la aruncarea unui zar.

Exemple de variabile aleatoare de tip continuu:

- timpul de funcţionare a unui aparat, până la prima defectare,
- mărimile erorilor comise la efectuarea măsurătorilor,
- viteza unei particule, care se modifică în funcţie de ciocnirile cu alte particule.

În fiecare din aceste exemple, unui fenomen, supus unor circumstanţe aleatoare, i se asociază un număr real, deci se stabileşte o corespondenţă între spaţiul de selecţie E convenabil ales şi $\mathbb{R}$. În practică, de multe ori este dificil să găsim valorile acestor corespondenţe, dar e posibil să determinăm "cât de des" sunt luate ele. Astfel, în ultimul exemplu, putem aprecia cu ce probabilitate viteza X a particulei este mai mică decât 0,1, deci putem calcula $P(\{\ e \in E \mid X(e)\ <\ 0,1\ \})$.

Definiţia 2.1.2 *Funcţia*

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$

definită prin

$$F(x) = P(\{\ e \in E \mid X(e)\ <\ x\}) \tag{2.2}$$

se numeşte funcţie de repartiţie.

Determinarea pentru orice $x \in \mathbb{R}$ a probabilităţii cu care X ia valori mai mici ca x, înseamnă definirea funcţiei de repartiţie.

2.2 Variabile aleatoare discrete simple

Condiţia (2.1) din Definiţia 2.1.2 are loc întotdeauna în cazul variabilelor aleatoare discrete, alegând eventual un câmp borelian convenabil. În cest caz putem spune că:

Definiţia 2.2.1 *Fie* $\{\ E, K, P\ \}$ *un câmp de probabilitate cu* E *cel mult numărabilă. Se numeşte* variabilă aleatoare *orice aplicaţie* X *definită pe mulţimea evenimentelor elementare cu valori în mulţimea numerelor reale* $\mathbb{R}$.

Ilustrăm trecerea de la eveniment la variabilă aleatoare.

Exemplul 2.2.1 Considerăm o experienţă şi un eveniment A legat de aceasta. În loc de evenimentul A putem considera funcţia χ_A care ia valoarea 1 dacă s-a realizat A şi 0 dacă s-a realizat $\bar{A}$, adică dacă $A \subset E, A \in K$:

$$\chi_A : E \to \{0,1\}$$

$$\chi_A(e) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad e \in A \\ 0, & \text{dacă} \quad e \notin A. \end{cases}$$

Funcţia χ_A se numeşte indicatoarea evenimentului A (variabila aleatoare a evenimentului A).

Această idee poate fi extinsă în sensul că putem considera o experienţă şi legat de aceasta un sistem complet de evenimente $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Definim funcţia X pe acest sistem complet de evenimente convenind să-i atribuim valoarea $n - j$ în cazul în care s-a realizat evenimentul $A_j, j = \overline{1, n}$. Astfel, variabila aleatoare X s-a definit prin relaţia:

$$X(e) = \begin{cases} n - j, & \text{dacă } e \in A_j \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

pentru $j = \overline{1, n}$.

Fie tabelul

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

cu $p_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Numerele x_i se numesc valorile variabilei aleatoare, iar p_i probabilităţile cu care variabila aleatoare ia aceste valori. Tabelul 2.3 se numeşte tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare X.

Facem convenţia ca în tabloul de repartiţie să se treacă valorile variabilei aleatoare distincte, iar valorile luate cu probabilitatea 0 să nu fie trecute.

Observaţia 2.2.1 Fie x_k o valoare a variabilei aleatoare X. Valorii x_k îi corespunde, în general, o mulţime de evenimente elementare. Rezolvând ecuaţia $x_k = X(e)$ în raport cu e obţinem $e = X^{-1}(x_k)$, în general, o funcţie multivocă, deci la un x_k pot corespunde mai multe valori ale lui e. Reuniunea acestora formează un eveniment A_k al câmpului $(k \leqslant n)$. Deoarece valorile x_k sunt diferite, evenimentele A_k sunt incompatibile două câte două şi formează un sistem complet de evenimente. Observăm că

$$p_k = P(A_k) = P(\{e \in E \mid X(e) = x_k\})$$

şi

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = P(E) = 1.$$

Deci dată o variabilă aleatoare, putem să-i ataşam un sistem complet de evenimente. Reciproca afirmaţiei este tocmai Exemplul 2.2.2.

Exemplul 2.2.2 Considerăm experienţa care constă în aruncarea unui zar omogen. Fie variabila aleatoare X care ia ca valori numărul de puncte apărute pe faţa zarului. Să se scrie tabloul de repartiţie al acestei variabile aleatoare.

Mulţimea evenimentelor elementare este $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi ea coincide, în acest caz, cu E

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Dacă considerăm evenimentele A şi B legate de aceeaşi experienţă şi anume A evenimentul care constă în obţinerea unui număr par de puncte, iar B evenimentul care constă în obţinerea un număr impar de puncte şi definim variabila aleatoare Y care ia valoarea 0 dacă am obţinut un număr par de puncte şi 1 dacă am obţinut un număr impar de puncte, atunci A şi B formează un sistem complet de evenimente şi putem defini variabila aleatoare Y astfel:

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2.2.3 Considerăm o experienţă care constă în extragerea a trei bile, câte una din fiecare din urnele U_1, U_2, U_3 ce conţin respectiv 2 bile albe şi 3 negre, 3 bile albe şi 5 negre, 8 bile albe şi 2 negre. Definim variabila aleatoare X care ia ca valori numărul de de bile albe obţinute la o extragere. Se cere tabloul de reparitţie a lui X.

Notăm cu A_i şi $\bar{A}_i$ evenimentul de a extrage o bilă albă, respectiv neagră din urna $U_i, i = \overline{1,3}$. Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, 2, 3 după cum s-au extras respectiv 0, 1, 2, 3 bile albe. Observăm că evenimentele A_i sunt independente şi incompatibile două câte două. Atunci putem calcula

$$P(\{X = 0\}) = P(\bigcap_{i=1}^{3} \bar{A}_i) = \prod_{i=1}^{3} P(\bar{A}_i) = 0,075,$$

$$P(\{X = 1\}) = P((A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)) =$$

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \frac{79}{200} = 0,395,$$

$$P(\{X = 2\}) = P((A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{41}{100} = 0,41,$$

$$P(\{X = 3\}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{3}{25} = 0,12,$$

Tabloul de repartiţie este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,075 & 0,395 & 0,41 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

De cele mai multe ori în calcule este suficient să cunoaştem valorile pe care le ia o variabilă aleatoare şi probabilităţile respective. Dar, în general, cunoaşterea acestor date nu este suficientă pentru determinarea completă a variabilei aleatoare, aşa cum se va vedea în exemplul următor.

Exemplul 2.2.4 Considerăm experienţa care constă în aruncarea unui zar. Legat de aceasta ne imaginăm un joc: celui care aruncă zarul i se acordă 1 punct dacă apare una din feţele cu 1 sau 2 puncte, 2 puncte dacă apare una din feţele cu 3 sau 4 puncte, 3 puncte dacă apare una din feţele cu 5 sau 6 puncte. Dacă notăm cu X variabila aleatoare care ia ca valori numărul de puncte obţinute de jucător la o aruncare a zarului, obţinem o variabilă aleatoare având repartiţia:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Se consideră alt joc în care se acordă 1 punct dacă apare una din feţele cu 1 sau 6 puncte, 2 puncte dacă apare una din feţele cu 2 sau 5 puncte, 3 puncte dacă apare una din feţele cu 3 sau 4 puncte. Obţinem analog o variabilă aleatoare Y cu repartiţia

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Variabilele aleatoare discrete simple X şi Y definite în acest exemplu nu sunt egale, dar au acelaşi tablou de repartiţie. Într-adevăr, $X(6) = 3$ şi $Y(6) = 1$. Experienţa care constă în aruncarea zarului generează un câmp de probabilitate. Pe mulţimea evenimentelor elementare ale lui E, X şi Y sunt definite astfel:

$$X(1) = 1,\ X(2) = 1,\ X(3) = 2,\ X(4) = 2,\ X(5) = 3,\ X(6) = 3;$$

$$Y(1) = 1,\ Y(2) = 2,\ Y(3) = 3,\ Y(4) = 3,\ Y(5) = 2,\ Y(6) = 1.$$

Să determinăm sistemul complet de evenimente generat de fiecare din cele două variabile aleatoare discrete simple. Variabila aleatoare discretă simplă X determină

$$A_1 = \{1, 2\},\ A_2 = \{3, 4\},\ A_3 = \{5, 6\},$$

iar variabila aleatoare discretă simplă Y determină

$$B_1 = \{1, 6\},\ B_2 = \{2, 5\},\ B_3 = \{3, 4\}.$$

Rezultă că cele două sisteme complete de evenimente sunt diferite şi deci numai aparent variabilele aleatoare discrete simple coincid.

Orice variabilă aleatoare simplă dată prin tabloul său de repartiţie se poate reprezenta grafic prin poligonul său de repartiţie: pe axa absciselor se trec valorile variabilei aleatoare, iar pe axa ordonatelor probabilităţile.

Pentru o variabilă aleatoare discretă simplă se poate introduce funcţia de repartiţie care este o funcţie scară dată de relaţa:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \leqslant x_1, \\ p_1, & \text{dacă} \quad x_1 < x \leqslant x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{dacă} \quad x_2 < x \leqslant x_3, \\ \ldots & \\ p_1 + \ldots + p_{n-1}, & \text{dacă} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n, \\ 1, & \text{dacă} \quad x_n < x. \end{cases}$$

În această definiţie am presupus, pentru simplitate, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Graficul acestei funcţii este prezentat în Figura 2.1.

Vom insista mai mult asupra proprietăţilor funcţiei de repartiţie în Capitolul 3. Să studiem F în unul din punctele de discontinuitate, fie $x = x_2$. Pentru $\delta \in I\!\!R_+$ oricât de mic, avem

$$F(x_2 + \delta) = P(\{X < x_2 + \delta\}) = p_1 + p_2$$

astfel încât $\lim\limits_{x \searrow x_2} F(x) = p_1 + p_2$. Mai mult

$$F(x_2) = P(\{X < x_2\}) = p_1$$

şi

$$F(x_2 - \delta) = P(\{X < x_2 - \delta\}) = p_1.$$

Rezultă că funcţia de repartiţie este continuă la stânga. Funcţia de repartiţie poate fi scrisă restrâns cu ajutorul *funcţiei unitate (treapta unitate)*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \leqslant 0, \\ 1, & \text{dacă} \quad x > 0, \end{cases}.$$

Functia generalizată delta $\delta(t)$ *(distribuţia Dirac)* este definită cu ajutorul funcţiei unitate astfel:

$$u(x) = \int_{\infty}^{x} \delta(t)\, dt$$

şi deci

$$F(x) = p_1\, u(x) + p_2\, u(x - x_1) + \ldots + p_n\, u(x - x_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k\, u(x - x_k),$$

unde $p_k = P(\{X < x_k\})$. Putem introduce şi în cazul discret (pentru cazul continuu se poate consulta Capitolul 3) funcţia densitate de probabilitate ţinând seama de legătura dintre funcţia unitate şi distribuţia Dirac. Astfel, ţinând seama de faptul că (vezi Capitolul 3.2, Formula (3.9)):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

obţinem densitatea de probabilitate pentru variabile aleatoare discrete

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k).$$

Această densitate de probabilitate este o funcţie generalizată (o distribuţie).

Operaţii cu variabile aleatoare discrete simple.

Deoarece variabila aleatoare discretă simplă este o funcţie definită pe mulţimea evenimentelor elementare cu valori reale, putem vorbi de suma şi produsul a două variabile aleatoare discrete simple ca şi la funcţii. Astfel, dacă e este un eveniment elementar şi X şi Y sunt definite pe aceeaşi mulţime de evenimente elementare, avem

$$(X + Y)(e) = X(e) + Y(e),$$

$$(XY)(e) = X(e)Y(e).$$

Dacă $Y(e) \neq 0$ oricare ar fi evenimentul e, câtul $\frac{X}{Y}$ este o nouă variabilă aleatoare definită prin relaţia

$$(\frac{X}{Y})(e) = \frac{X(e)}{Y(e)}.$$

Produsul unei variabile aleatoare X cu o constantă reală c este o nouă variabilă aleatoare cX definită prin relaţia

$$(cX)(e) = cX(e).$$

Acest produs poate fi interpretat şi ca produsul lui X cu variabila aleatoare constantă identic egală cu c $(Y(e) = c, \forall e \in E)$. Dacă $X(e) \geqslant 0, \forall e \in E$, iar $\alpha \in I\!\!R$ fixat, definim X^α ca o nouă variabilă aleatoare definită prin

$$(X^\alpha(e) = (X(e))^\alpha.$$

În cazul în care $\alpha \in I\!\!N$ se poate renunţa la condiţia $X(e) \geqslant 0, \forall e \in E$, variabila aleatoare poate fi interpretată ca produsul lui X cu el însuşi. Fie variabilele aleatoare X şi Y având tabelele de repartiţie

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Fie $A_1, A_2, \dots, A_m$ respectiv $B_1, B_2, \dots, B_n$ sistemul complet de evenimente generat de variabila aleatoare X, respectiv Y. Avem, evident

$$P(A_i) = p_i, i = \overline{1, m},$$

$$P(B_j) = q_j, j = \overline{1, n}.$$

Variabila aleatoare $X + Y$ ia valoarea $x_i + y_j$ pe submulţimea $A_i \cap B_j$, dacă această intersecţie este nevidă. Dacă $A_i \cap B_j = \emptyset$, variabila aleatoare $X + Y$ ia valoarea $x_i + y_j$ cu probabilitatea zero şi deci aceasta nu apare în tabel. Dacă notăm $P(A_i \cap B_j) = p_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ atunci tabelul de repartiţie al variabilei aleatoare $X + Y$ va fi

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \dots & x_1 + y_n & \dots & x_m + y_n \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pentru produs vom avea

$$XY : \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n & \dots & x_m y_n \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}.$$

În ambele cazuri tabelul de repartiţie are cel mult mn coloane.

Observaţia 2.2.2 În cazul particular $Y = a =$ const.,deoarece

$$p_{ij} = P(\{X = x_i, Y = a\}) = P(\{(X = x_i) \cap E\}) = P(\{X = x_i\}) = p_i$$

avem

$$a + X : \begin{pmatrix} a + x_1 & a + x_2 & \dots & a + x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

şi la fel

$$aX : \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \dots & ax_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

Observaţia 2.2.3 Definiţia sumei de variabile aleatoare discrete simple se poate extinde la un număr finit de variabile aleatoare simple. De exemplu, dacă

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \ i = \overline{1, m}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}, \ j = \overline{1, n}, \quad Z : \begin{pmatrix} z_k \\ r_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, l},$$

atunci

$$X + Y + Z : \begin{pmatrix} x_i + y_j + z_k \\ p_{ijk} \end{pmatrix}, i = \overline{1, m}, \ \ j = \overline{1, n}, \ k = \overline{1, l}.$$

Exemplul 2.2.5 Probabilitatea extragerii unei bile albe dintr-o urnă este p. Din această urnă se fac două extrageri, punându-se bila înapoi în urnă după extragere. Se consideră variabilele aleatoare X_1 şi X_2, prima reprezentând numărul de bile albe obţinute la prima extragere şi a doua numărul de bile albe de la a doua extragere. Să se scrie tabloul de repartiţie al variabilelor aleatoare discrete simple $X_1, \ X_2, \ X_1 + X_2, \ X_1X_2$.

Dacă

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad q = 1 - p,$$

atunci

$$X_1 + X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$P(\{X_1 + X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0, X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0\})P(\{X_2 = 0\}) = q^2,$$
$$P(\{X_1 + X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1\}) = 2pq,$$
$$P(\{X_1 + X_2 = 2\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1\})P(\{X_2 = 2\}) = p^2,$$
$$P(\{X_1 + X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0, X_2 = 0\}) = q^2.$$

La fel,

$$X_1X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2pq + q^2 & p^2 \end{pmatrix},$$

deoarece

$$P(\{X_1X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 1, X_2 = 0) \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1\}) \\ = 2pq + q^2,$$

$$P(\{X_1X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 1\}) = p^2.$$

Propoziţia 2.2.1 *Fiind date variabilele aleatoare*

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, i = \overline{1,m}; \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}, j = \overline{1,n},$$

iar p_{ij} probabilităţile definite de suma şi produsul celor două variabile aleatoare. Au loc relaţiile:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad q_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}.$$

Demonstrație. Efectuând experienţa căreia îi sunt asociate variabilele aleatoare, Y ia în mod sigur una din valorile $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dacă X ia valoarea x_i, rezultă că evenimentul $\{X = x_i\}$ se realizează împreună cu unul din evenimentele $\{Y = y_1\}, \ldots, \{Y = y_n\}$. Deci

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i\} \cap (\{Y = y_1\} \cup \{Y = y_2\} \cup \ldots \{Y = y_n\}) =$$

$$= (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_1\}) \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_2\}) \cup \ldots \cup (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_n\}).$$

De aici rezultă că

$$p_i = P(\{X = x_i\}) = \sum_{j=1}^{n} P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}.$$

La fel se demonstrează cea de-a doua relaţie. ■

Observaţia 2.2.4 Dacă considerăm şi variabila aleatoare discretă simplă

$$Z : \begin{pmatrix} z_k \\ r_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,l},$$

atunci pentru probabilităţile sumei (produsului) celor trei variabile aleatoare discrete simple au loc relaţiile

$$\sum_{k=1}^{l} p_{ijk} = p_{ij\cdot}; \quad \sum_{i=1}^{m} p_{ijk} = p_{\cdot jk}; \quad \sum_{j=1}^{n} = p_{i\cdot k};$$

Independenţa variabilelor aleatoare discrete simple.

Definiţia 2.2.2 *Două variabile aleatoare se numesc* independente *dacă probabilitatea ca una din variabile să ia o valoare nu depinde de valoarea luată de cea de a doua variabilă aleatoare.*

Observaţia 2.2.5 Dacă X şi Y sunt astfel de variabile aleatoare atunci două evenimente de forma $\{X = x_i\}$ şi $\{Y = y_j\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, sunt independente.

În general, putem da definiţia:

Definiţia 2.2.3 *Variabilele aleatoare discrete simple* $X, Y, Z, \ldots$ *sunt* independente *dacă evenimentele* $\{X = x_i\}, \{Y = y_j\}, \{Z = z_k\}, \ldots i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, k = \overline{1,l}$ *sunt independente în totalitatea lor.*

Observaţia 2.2.6 Dacă variabilele aleatoare

$$X : \left(\begin{array}{c} x_i \\ p_i \end{array} \right), \quad i = \overline{1,m}, \qquad Y : \left(\begin{array}{c} y_j \\ q_j \end{array} \right), \quad j = \overline{1,n},$$

sunt independente, atunci

$$p_{ij} = P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\})P(\{Y = y_j\}) = p_i q_j.$$

La fel pentru trei variabile aleatoare discrete simple. În cazul acesta

$$X + Y : \left(\begin{array}{c} x_i + y_j \\ p_i q_j \end{array} \right), \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n};$$

$$XY : \left(\begin{array}{c} x_i y_j \\ p_i q_j \end{array} \right), \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Exemplul 2.2.6 Suma a două variabile aleatoare discrete simple independente X, Y, $Z = X + Y$, poate fi obţinută astfel:

$$P(\{Z = k\}) = P(\{X + Y = k\}) =$$

$$= \sum_i P(\{X = i, Y = k - i\}) = \sum_i P(\{X = i\})P(\{Y = k - i\}),$$

sumarea referindu-se la toate valorile întregi ale lui X, mai mici decât k. Dacă notăm cu $p(i) = P(\{X = i\})$, $q(j) = P(\{Y = j\})$, $r(k) = P(\{Z = k\})$, obţinem

$$r(k) = \sum_{i=0}^{k} p(i)q(k - i) = \sum_{j=0}^{k} p(k - j)q(j),$$

acestea reprezentând produsul de convoluţie a lui p şi q.

Propoziţia 2.2.2 *Variabilele aleatoare simple* X *şi* Y *sunt independente dacă şi numai dacă evenimentele* $\{x' < X < x\}$ *şi* $\{y' < Y < y\}$ *sunt independente, oricare ar fi* $x, x', y, y' \in \overline{I\!R}$.

Demonstraţie.Presupunem că X şi Y sunt independente. Deoarece

$$\{x' < X < x, y' < Y < y\} = \bigcup_{x' < x_i < x,\ y' < y_j < y} \{X = x_i, Y = y_j\}$$

rezultă, datorită independenţei,

$$P(\{x' < X < x,\ y' < y_j < y\}) = P(\bigcup_{x' < x_i < x,\ y' < y_j < y} \{X = x_i, Y = y_j\}) =$$

$$= \sum_{x'<x_i<x; y'<y_j<y} P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{x'<x_i<x} P(\{X = x_i\}) \sum_{y'<y_j<y} P(\{Y = y_j\}) =$$

$$= P(\bigcup_{x'<x_i<x} \{X = x_i\}) P(\bigcup_{y'<y_j<y} \{Y = y_j\}) = P(\{x' < X < x\})P(\{y' < Y < y\}).$$

Reciproc, presupunem că evenimentele $\{x' < X < x\}$ şi $\{y' < Y < y\}$ sunt independente, oricare ar fi $x, x', y, y' \in \overline{I\!R}$. Atunci

$$\{X = x_i, Y = y_j\} = \{x_{i-1} < X < x_{i+1},\ y_{j-1} < Y < y_{j+1}\},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},$$

unde $x_0 = y_0 = -\infty, x_n = y_n = \infty$. Rezultă că

$$P(\{X = x_i,\ Y = y_j\}) = P(\{x_{i-1} < X < x_{i+1},\ y_{j-1} < Y < y_{j+1}\}) =$$

$$= P(\{x_{i-1} < X < x_{i+1}\})P(\{y_{j-1} < Y < y_{j+1}\}) = P(\{X = x_i\})P(\{Y = y_j\}).$$

■

Caracteristici numerice pentru variabile aleatoare discrete simple.

Definiţia 2.2.4 *Fie variabila aleatoare discretă simplă*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad p_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{2.4}$$

Vom numi media *variabilei aleatoare discrete simple* X *numărul*

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i.$$

Denumirea de medie este îndreptăţită dacă ţinem seama de sensul ei practic. Presupunem că am repetat de N ori o experienţă care ne-a condus la variabila aleatoare X. Dacă valoarea x_1 este luată de n_1 ori, valoarea x_2 de n_2 ori,..., valoarea x_m de n_m ori, unde $n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$, atunci suma valorilor luate de variabila aleatoare X este $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m$, iar media aritmetică a valorilor luate de X va fi

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m}{N} = \frac{n_1}{N} x_1 + \frac{n_2}{N} x_2 + \dots + \frac{n_m}{N} x_m.$$

Dar $\dfrac{n_1}{N}$ reprezintă raportul dintre numărul cazurilor în care s-a luat valoarea x_1 şi numărul total de experimentări, adică p_1. La fel $\dfrac{n_2}{N} = p_2, \dots, \dfrac{n_m}{N} = p_m$.

Media aritmetică a valorilor luate de X poate fi aproximată cu $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m$, adică media lui X. Media lui X ne arată la ce valoare putem să ne aşteptăm pentru media aritmetică a unui mare număr de valori ale lui X, obţinute în urma repetării experienţei date.

Exemplul 2.2.7 Variabilele aleatoare discrete simple din Exemplul 2.2.5, X_1 şi X_2, având repartiţiile:

$$X_1, X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

au valoarea medie

$$M[X_i] = 1p + 0q = p, \quad i = 1, 2,$$

iar

$$X_1 + X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix},$$

are media

$$M[X_1 + X_2] = 2pq + 2p^2 = 2p.$$

Definiţia 2.2.5 *Se numeşte* moment iniţial de ordin k, $k \in \mathbb{N}$, *al variabilei aleatoare* X *media lui* X^k. *Notăm*

$$\upsilon_k = M_k[X] = M[X^k].$$

Observaţia 2.2.7 Momentul iniţial de ordin 1 al variabilei alearoare X este chiar media variabilei aleatoare.

Proprietăţi ale mediei.

1. Valoarea medie a unei constante este egală cu constanta,

$$X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M[X] = c.$$

2. Dacă X este o variabilă aleatoare simplă şi $a \in \mathbb{R}$ o constantă, atunci au loc relaţiile:

$$M[a + X] = a + M[X], \quad M[aX] = aM[X],$$

Într-adevăr, deoarece

$$a + X : \begin{pmatrix} a + x_1 & a + x_2 & \dots & a + x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

$$M[a + X] = \sum_{i=1}^{m} (a + x_i)p_i = a \sum_{i=1}^{m} p_i + \sum_{i=1}^{m} x_i p_i = a + M[X];$$

$$aX : \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \dots & ax_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

$$M[aX] = \sum_{i=1}^{m} (ax_i)p_i = a \sum_{i=1}^{m} x_i p_i = aM[X].$$

3. Valoarea medie a unei variabile aleatoare este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile posibile ale variabilei aleatoare. Fie $a = \min_i x_i$ şi $A = \max_i x_i$.

$$\left.\begin{array}{l} M[X] = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i p_i > a \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = a, \\ M[X] = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i p_i < A \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = A, \end{array}\right\} \Leftrightarrow a < M[X] < A.$$

4. Valoarea medie a unei sume finite de variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii ale variabilelor aleatoare respective. Fie

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \dots & x_m + y_n \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$M[X+Y] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_i + y_j) p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i (\sum_{j=1}^{n} p_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} y_j (\sum_{i=1}^{m} p_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i + \sum_{j=1}^{n} y_j q_j = M[X] + M[Y].$$

Demonstraţia pentru suma unui număr finit de variabile aleatoare se face prin inducţie.

5. Valoarea medie a unui produs de variabile aleatoare independente este egală cu produsul mediilor variabilelor considerate.

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

$$XY : \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_m y_n \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix},$$

$$M[XY] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij}.$$

Dacă variabilele sunt independente, se produc simplificări importante deoarece putem scrie

$$p_{ij} = p_i q_j$$

şi atunci

$$M[XY] = \sum_{j=1}^{n} x_1 y_j p_1 q_j + \sum_{j=1}^{n} x_2 y_j p_2 q_j + \ldots + \sum_{j=1}^{n} x_m y_j p_m q_j =$$

$$= (\sum_{i=1}^{m} x_i p_i)(\sum_{j=1}^{n} y_j q_j) = M[X]M[Y].$$

6. Oricare ar fi variabila aleatoare X, are loc relaţia
$$\sqrt{M[X^2]} \geqslant |M[X]|.$$
Considerăm variabila aleatoare X având tabloul (2.4) şi fie $Y = (X+a)^2$, $a \in I\!R$ Deoarece valorile lui Y sunt pozitive, rezultă că $M[Y] \geqslant 0$ şi deci
$$M[Y] = \sum_{i=1}^{m}(x_i+a)^2 p_i = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i + 2a\sum_{i=1}^{m} x_i p_i + a^2 =$$
$$= M[X^2] + 2aM[X] + a^2 \geqslant 0 \quad \forall a \in I\!R.$$
Rezultă $\Delta \leqslant 0$ şi cum
$$\Delta = (M[X])^2 - M[X^2] \leqslant 0$$
obţinem inegalitatea dorită.

7. Inegalitatea lui Schwarz. Fie x şi Y două variabile aleatoare discrete simple. Are loc inegalitatea
$$|M[XY]| \leqslant \sqrt{M[X^2]M[Y^2]}.$$
Demonstraţia poate fi găsită în Capitolul 3.4, Formula (3.42).

Definiţia 2.2.6 *Fie o variabilă aleatoare X şi o constantă $a \in I\!R$. Numim* abaterea de la constanta *a a variabilei aleatoare X variabila $X - a$.*

Definiţia 2.2.7 *Se numeşte* moment centrat de ordin k raportat la constanta *a a variabilei aleatoare X media variabilei $(X-a)^k$.*

Observaţia 2.2.8 Pentru $a = 0$ obţinem momentul iniţial de ordin k.

Observaţia 2.2.9 Pentru $a = M[X] = m$ obţinem momentul centrat de ordin k al variabilei aleatoare X.

Definiţia 2.2.8 *Variabila aleatoare $X - M[X]$ se numeşte* abaterea de la medie *a variabilei aleatoare X.*

Propoziţia 2.2.3 *Valoarea medie a abaterii oricărei variabile aleatoare este nulă.*
$$M[X - M[X]] = M[X] - M[M[X]] = M[X] - M[X] = 0.$$

De multe ori la o variabilă aleatoare ne interesează cât de mult se abat valorile variabilei de la valoarea medie. Trebuie să stabilim un indicator numeric al împrăştierii valorilor variabilei aleatoare în jurul valorii medii. Valoarea medie a abaterii de la medie nu poate caracteriza această împrăştiere deoarece este nulă pentru orice variabilă aleatoare. Abaterile diferitelor valori, având semne diferite, se compensează. Este firesc să caracterizăm împrăştierea variabilei aleatoare X prin valoarea medie a abaterilor absolute $| X - M[X] |$ pe care o numim *abatere medie.* Dacă X are tabloul de repartiţie
$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

atunci repartiţia abaterii absolute este

$$\begin{pmatrix} \mid x_1 - m \mid & \mid x_2 - m \mid & \dots & \mid x_n - m \mid \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

unde $m = M[X]$, iar abaterea medie este

$$p_1 \mid x_1 - m \mid + p_2 \mid x_2 - m \mid + \ldots + p_n \mid x_n - m \mid .$$

Se observă că semnul expresiilor $x_i - m$ nu influenţează valoarea abaterii medii. Folosirea abaterii medii este foarte incomodă în calcule. Foarte comodă este în schimb folosirea expresiei

$$M[(X - m)^2].$$

Definiţia 2.2.9 *Se numeşte* dispersie *a variabilei aleatoare X momentul centrat de ordinul al doilea al variabilei, notat*

$$\sigma^2 = D^2[X] = M[(X - m)^2], \ \ m = M[X].$$

Observaţia 2.2.10 Demonstrăm o formulă utilă în aplicaţii şi anume că dispersia unei variabile aleatoare este egală cu media pătratului variabilei aleatoare minus pătratul mediei, adică

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Într-adevăr,

$$D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - 2m \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + m^2 = M[X^2] - 2m^2 + m^2 = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Arătăm că dispersia unei variabile aleatoare X este, într-un anume sens, cea mai bună valoare care caracterizează împrăştierea valorilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sau, cu alte cuvinte, $M[X]$ este punctul cel mai potrivit faţă de care trebuie să măsurăm devierile acestor valori. Acest lucru rezultă din următoarea propoziţie.

Propoziţia 2.2.4 *Dacă X este o variabilă aleatoare care ia valorile $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ cu probabilităţile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, iar m este media, atunci*

$$D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x)^2, \quad \forall x \in I\!R.$$

Demonstraţie. Putem scrie $x_i - x = (x_i - m) + (m - x), \ \ i = \overline{1, n}.$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i [(x_i - m) + (m - x)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - m)^2 + 2(m-x)\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - m) + (m-x)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - m)^2 + 2(m-x)(m-m) + (m-x)^2 =$$

$$= D^2[X] + (m-x)^2 \leqslant D^2[X].$$

■

Proprietăţi ale dispersiei.

1. Dispersia unei constante este nulă deoarece, ţinând seama de proprietăţile mediei,

$$D^2[c] = M[c^2] - (M[c])^2 = 0.$$

2. Două variabile aleatoare care diferă printr-o constantă au dispersiile egale.

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

$$Y = a + X : \begin{pmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \ldots & a+x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

$$M[Y] = M[X+a] = M[X] + a,$$

$$D^2[Y] = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a - M[Y])^2 p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i + a - M[X] - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - M[X])^2 = D^2[X].$$

3. $D^2[aX] = a^2 D^2[X]$ deoarece

$$D^2[aX] = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i - am)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i a^2 (x_i - m)^2 =$$

$$= a^2 \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - m)^2 = a^2 D^2[X].$$

4. Dacă variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sunt independente, atunci dispersia sumei este egală cu suma dispersiilor.

$$D^2[X_1 + X_2 + \ldots + X_k] = D^2[X_1] + D^2[X_2] + \ldots + D^2[X_k].$$

Într-adevăr, fie

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

atunci

$$D^2[Y] = M[Y^2] - (M[Y])^2 = M[(\sum_{i=1}^{k} X_i)^2] - (M[\sum_{i=1}^{k} X_i])^2 =$$
$$= M[X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + \ldots + 2X_{k-1}X_k] -$$
$$-(M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_k])^2 = M[X_1^2] + M[X_2^2] + \ldots + M[X_k^2] +$$
$$+2M[X_1X_2] + 2M[X_1X_3] + \ldots + 2M[X_{k-1}X_k] - (M[X_1])^2 -$$
$$-(M[X_2])^2 - \ldots - (M[X_k])^2 - 2M[X_1]M[X_2] - 2M[X_1]M[X_3] - \ldots -$$
$$-2M[X_{k-1}]M[X_k] = M[X_1^2] - (M[X_1])^2 + M[X_2^2] - (M[X_2])^2 + \ldots +$$
$$+M[X_k^2] - (M[X_k])^2 = D^2[X_1] + D^2[X_2] + \ldots + D^2[X_k],$$

folosind Proprietatea 5 a mediei.

Observaţia 2.2.11 Proprietatea rămâne adevărată în condiţii mai puţin restrictive. În cursul demonstraţiei s-a folosit faptul că variabilele aleatoare $X_i, i = \overline{1,k}$ sunt independente două câte două şi nu în totalitatea lor.

Mai general, combinând Proprietăţile 3 şi 4, avem

$$D^2[\sum_{i=1}^{k} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{k} a^2 D^2[X_i]$$

În particular,

$$D^2[X - Y] = D^2[X] + D^2[Y].$$

De obicei, gradul de împrăştiere a valorilor unei variabile aleatoare X se exprimă nu prin dispersie, ci prin *abaterea medie pătratică*, notată D[X] şi definită prin relaţia

$$\sigma = D[X] = \sqrt{D^2[X]}.$$

Aceasta are avantajul că se exprimă prin aceleaşi unităţi de măsură ca şi valorile variabilei aleatoare X.

Proprietăţi ale abaterii medii pătratice.

1. $D[c] = 0$, dacă $c =$ const., $c \in I\!R$.
2. $D[a + X] = D[X]$.
3. $D[aX] =\mid a \mid D[X]$.

Proprietăţile de mai sus rezultă din proprietăţile dispersiei.

Teorema 2.2.1 (Inegalitatea lui Cebâşev). *Fie X o variabilă aleatoare care admite medie şi dispersie finite. Atunci, oricare ar fi $\epsilon \geqslant 0$, are loc inegalitatea*

$$P(\{\mid X - m \mid < \epsilon\}) \geqslant 1 - \frac{D^2[X]}{\epsilon^2}, \quad m = M[X]. \tag{2.5}$$

Demonstraţie. Facem observaţia că această inegalitate dă o margine inferioară pentru probabilitatea ca abaterea absolută a unei variabile aleatoare cu dispersia cunoscută să fie mai mică decât un număr dat.

Pentru demonstraţie considerăm repartiţia variabilei aleatoare X,

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

în care presupunem că am scris valorile în ordine crescătoare, şi deci aşa vor fi scrise şi valorile $\mid x_i - m \mid, i = \overline{1,n}$, adică

$$|x_1 - m| \leqslant |x_2 - m| \leqslant \dots \leqslant |x_n - m|.$$

Dacă luăm un $\epsilon \geqslant 0$ oarecare, unele din valorile $|x_i - m|, i = \overline{1,n}$, vor fi mai mari sau egale cu ϵ, altele mai mici. Există deci un l astfel încât

$$|x_1 - m| \leqslant |x_2 - m| \leqslant \dots \leqslant |x_l - m| < \epsilon \leqslant |x_{l+1} - m| \leqslant \dots \leqslant |x_n - m|.$$

Aceste inegalităţi se mai pot scrie

$$(x_1 - m)^2 \leqslant (x_2 - m)^2 \leqslant \dots \leqslant (x_l - m)^2 < \epsilon^2 \leqslant (x_{l+1} - m)^2 \leqslant \dots \leqslant (x_n - m)^2.$$

Variabila aleatoare $|X - m|$ are repartiţia

$$\begin{pmatrix} |x_1 - m| & |x_2 - m| & \dots & |x_l - m| & |x_{l+1} - m| & \dots & |x_n - m| \\ p_1 & p_2 & \dots & p_l & p_{l+1} & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

şi ia valoarea $|x_i - m|$ atunci când X ia valoarea x_i. Inegalitatea $|X - m| < \epsilon$ este verificată atunci când $|X - m|$ ia una din valorile $|x_1 - m|, |x_2 - m|, \dots, |x_l - m|$ adică atunci şi numai atunci când X ia una din valorile $x_1, x_2, \dots, x_l$. Putem scrie deci evenimentul $(|X - m| < \epsilon)$ ca o reuniune finită de evenimente incompatibile

$$\{|X - m| < \epsilon\} = \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} \cup \dots \cup \{X = x_l\}.$$

de unde

$$P(\{|X - m| < \epsilon\}) = \sum_{i=1}^{l} p_i = 1 - \sum_{i=l+1}^{n} p_i.$$

Scriem acum dispersia variabilei aleatoare X

$$\sigma^2 = (x_1 - m)^2 p_1 + \dots + (x_l - m)^2 p_l + (x_{l+1} - m)^2 p_{l+1} + \dots + (x_n - m)^2 p_n.$$

Vom transforma această egalitate în inegalitate prin micşorarea membrului drept. Această minorare o realizăm astfel: valorile $(x_i - m)^2$ care sunt mai mici ca ϵ^2 le înlocuim cu 0, iar cele care sunt mai mari sau egale cu ϵ^2 le înlocuim cu ϵ^2. Atunci

$$\sigma^2 \geqslant 0p_1 + \dots + 0p_l + \epsilon^2 p_{l+1} + \dots + \epsilon^2 p_n = \epsilon^2 \sum_{i=l+1}^{n} p_i$$

şi deci

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \geqslant \sum_{i=l+1}^{n} p_i,$$

$$1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \leqslant 1 - \sum_{i=l+1}^{n} p_i = P(\{|X - m|\} < \epsilon),$$

care este echivalentă cu Inegalitatea (2.5). ■

Dacă luăm $\epsilon = k\sigma$ această inegalitate se scrie

$$P(\{|X - m| < k\sigma\}) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}$$

sau $P(\{m - k\sigma < X < m + k\sigma\}) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}$. De exemplu, pentru $k = 3$ obţinem

$$P(\{m - 3\sigma < X < m + 3\sigma\}) \geqslant 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Deci, cu o probabilitate cuprinsă între $\frac{8}{9}$ şi 1, orice variabilă ia valori cuprinse în intervalul $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$.

Exemplul 2.2.8 Fie

$$X : \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Să se estimeze probabilitatea $P(\{|X - m| < 0,2\})$.

Utilizăm inegalitatea lui Cebâşev cu

$$P(\{|X - m| < 0,2\}) \geqslant 1 - \frac{D^2[X]}{0,2^2}.$$

$M[X] = 0,4,\ M[x^2] = 0,\ D^2[X] = 0,01.$ Înlocuim mai sus şi obţinem:

$$P(\{|X - 0,4| < 0,2\}) \geqslant 0,75.$$

2.3 Exemple de variabile aleatoare discrete simple

1. **Repartiţia Poisson.**

Fie X o variabilă aleatoare care ia ca valori numărul de bile albe extrase din n urne $U_i,\ i = \overline{1,n}$, care conţine fiecare, în proporţii diferite, bile albe şi negre. Probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U_i este p_i, iar o bilă neagră este $q_i = 1 - p_i$. Fie $X_i, i = \overline{1,n}$, variabilele aleatoare care iau valoarea 1 dacă din urna U_i se extrage o bilă albă şi 0 dacă din aceeaşi urnă se extrage o bilă neagră.

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i & p_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n},$$

$$M[X_i] = p_i.$$

Cu notaţiile introduse, putem scrie

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$M[X] = M[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

$$D^2[X] = D^2[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} D^2[X_i],$$

deoarece variabilele aleatoare $X_i, i = \overline{1,n}$, sunt independente. Dar

$$D^2[X_i] = M[X_i^2] - (M[X_i])^2.$$

Deoarece

$$X_i^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i & p_i \end{pmatrix},$$

avem

$$M[X_i^2] = p_i,$$

deci

$$D^2[X_i] = p_i - p_i^2 = p_i q_i \text{ şi } D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

2. **Repartiţia Bernoulli**.

Este de fapt repartiţia Poisson în care structurile urnelor $U_i, i = \overline{1,n}$, sunt identice, adică $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p, q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$. Variabila aleatoare corespunzătoare este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ C_n^0 p^0 q^n & C_n^1 p^1 q^{n-1} & C_n^2 p^2 q^{n-2} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & \ldots & C_n^n p^n q^0 \end{pmatrix}.$$

Scriem, în acest caz, $X : Bi(n, p)$. Particularizând schema lui Poisson, obţinem

$$M[X] = np, \quad D^2[X] = npq.$$

De fapt variabila aleatoare binomială descrie o experienţă în care un eveniment A se repetă independent de n ori şi interesează de câte ori s-a realizat în decursul celor n repetări. Fie X numărul de realizări ale evenimentului A în cele n efectuări. Deci X va lua valorile $1, 2, 3, \ldots n$ cu probabilităţile $P(\{X = k\}) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Figura 2.2 şi 2.3 sunt desenate densităţile de probabilitate generalizate pentru variabila aleatoare binomială, pentru $n = 24$, (a) $p = 0,2$ şi respectiv (b) $p = 0.5$.

Remarcăm că $P(\{X = k\})$ este maxim când $k_{max} = \Big[(n+1)p\Big]$, unde $\Big[x\Big]$ notează partea întreagă a lui x. Dacă $(n+1)p$ este întreg, atunci maximum este atins în k_{max} şi $k_{max} - 1$.

Variabila aleatoare binomială apare în aplicaţii în care sunt două tipuri de situţii: realizări/nerealizări, bit corect/eronat, aparat bun/defect etc.

3. **Repartiţia hipergeometrică.**

Fie X variabila aleatoare care ia ca valori numărul de bile albe care se obţin extrăgând n bile dintr-o urnă care conţine a bile albe şi b bile negre ($n \leqslant a+b$). Tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare X este

$$X : \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & \min\{n,a\} \\ \dfrac{C_a^0 C_b^n}{C_{a+b}^n} & \dfrac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \dfrac{C_a^2 C_b^{n-2}}{C_{a+b}^n} & \dots & \dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} & \dots & \dfrac{C_a^{\min\{n,a\}} C_b^{n-\min\{n,a\}}}{C_{a+b}^n} \end{array} \right).$$

Calculăm caracteristicile numerice ale variabilei aleatoare X. Avem

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\min\{a,n\}} k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_k k C_a^k C_b^{n-k} = = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_k a C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} =$$

$$= \frac{a}{C_{a+b}^n} C_{a+b-1}^{n-1} = a \frac{n!(a+b-n)!}{(a+b)!} \frac{(a+b-1)!}{(n-1)!(a+b-n)!} = \frac{an}{a+b}.$$

Pentru calculul dispersiei utilizăm formula

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Calculăm mai întâi

$$M[X^2] = \sum_k k^2 \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \sum_k k(k-1) \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} + \sum_k k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n};$$

$$\sum_k k(k-1) \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_k a(a-1) C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} = \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n} C_{a+b-2}^{n-2} =$$

$$= a(a-1) \frac{n!(a+b-n)!(a+b-2)!}{(a+b)!(n-2)!(a+b-n)!} = \frac{a(a-1)n(n-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

De aici rezultă că

$$M[X^2] = \frac{a(a-1)n(n-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{an}{a+b} = \frac{an}{a+b}\left(\frac{(a-1)(n-1)}{a+b-1} + 1\right),$$

$$D^2[X] = \frac{an(an-n+b)}{(a+b)(a+b-1)} - \frac{a^2n^2}{(a+b)^2} = \frac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

şi în cazul schemei bilei neîntoarse, variabila aleatoare hipergeometrică poate fi scrisă sub forma unei sume de variabile aleatoare. Să notăm cu X_1 numărul de bile albe obţinute la prima extragere, cu X_2 numărul de bile albe obţinute la a doua extragere etc. Tabloul de repartiţie al variabilei X_1 este

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Vom arăta că şi celelalte variabile aleatoare $X_i, i = \overline{2,n}$, au aceeaşi repartiţie. Pentru aceasta calculăm probabilitatea obţinerii unei bile albe la extracţia de ordin k, atunci când se fac extrageri fără întoarcerea bilei. Numărul cazurilor posibile A_{a+b}^k. Numărul cazurilor favorabile coincide cu numărul de moduri în care pot fi luate k bile astfel încât pe locul k să fie o bilă albă. O bilă albă poate fi luată în a moduri.

Celelalte $k-1$ locuri pot fi ocupate în A_{a+b-1}^{k-1} moduri, în total aA_{a+b-1}^{k-1} cazuri favorabile. Probabilitatea cătată va fi deci

$$\frac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k} = \frac{a(a+b-1)(a+b-2)\dots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)\dots(a+b-k+1)} = \frac{a}{a+b} = p.$$

Rezultă că X_k are repartiţia

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Din relaţiile

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

şi

$$M[X_1] = M[X_2] = \dots = M[X_n] = p,$$

rezultă

$$M[X] = np.$$

Ca şi în cazul repatiţiei lui Bernoulli, X se scrie ca o sumă de variabile aleatoare având aceeaşi repartiţie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Deosebirea este esenţială: în cazul repartiţiei hipergeometrice, variabilele aleatoare nu sunt independente. Din această cauză nu putem calcula dispersia variabilei aleatoare X ca suma dispersiilor variabilelor aleatoare X_i.

Teorema 2.3.1 *Dacă X este o variabilă aleatoare repartizată hipergeometric cu parametrii $a+b, a, n$, pentru care*

$$P(\{X = k\}) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},$$

atunci

$$\lim_{a+b\to\infty} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{2.6}$$

unde $p = \dfrac{a}{a+b}, q = 1-p$ şi deci pentru valori mari ale lui $a+b$, o variabilă aleatoare repartizată hipergeometric poate fi aproximată cu o variabilă repartizată binomială $Bi(n, \dfrac{a}{a+b})$.

Demonstraţie.

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}.$$

$$\cdot \frac{b(b-1)\dots(b-n+k-1)}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(a+b)\dots(a+b-n+1)} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)b(b-1)\dots(b-n+k-1)}{(a+b)\dots(a+b-n+1)} =$$

$$= C_n^k \frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b}\dots\frac{a-k+1}{a+b}\frac{b}{a+b}\frac{b-1}{a+b}\dots\frac{b-n+k-1}{a+b}\cdot$$

$$\cdot \frac{(a+b)^n}{(a+b)\dots(a+b-n+1)} = C_n^k p(p-\frac{1}{a+b})\dots(p-\frac{k-1}{a+b})\cdot$$

$$\cdot q(q-\frac{1}{a+b})\dots(q-\frac{n-k+1}{a+b})\frac{(a+b)^n}{(a+b)\dots(a+b-n+1)}.$$

Trecând la limită obţinem (2.6).

Exemplul 2.3.1 Să se arate că dacă X, Y sunt două variabile aleatoare independente, $X : Bi(n, p), Y : Bi(m, p)$ atunci $X + Y : Bi(n + m, p)$.

$$P(\{X+Y=k\}) = \sum_{l=0}^{k} P(\{X=l, Y=k-l\}) = \sum_{l=0}^{k} C_n^l p^l q^{n-l} C_m^{k-l} p^{k-l} q^{m-k+l} =$$

$$= (\sum_{l=0}^{k} C_n^l C_m^{k-l}) p^k q^{n+m-k} = C_{m+n}^k p^k q^{n+m-k}.$$

2.4 Variabile aleatoare discrete simple bidimensionale

În aplicaţiile practice ale teoriei probabilităţilor se întâlnesc adesea probleme în care rezultatele nu pot fi descrise de o variabilă aleatoare, ci de două sau mai multe, ele formând un vector aleator.

De exemplu, într-un anumit experiment ne interesează să măsurăm atât viteza cât şi direcţia particulelor atomice emise de o suprafaţă. Acestea sunt date de perechile (v, θ), unde θ este mărimea unghiului orientat în raport cu sistemul de referinţă şi v viteza. Acestea pot fi studiate ca un vector aleator.

Orice variabilă aleatoare discretă simplă bidimensională (X, Y) se consideră ca un vector aleator de componente X şi Y.

Dacă vectorul aleator (X, Y) ia un număr finit de valori, se poate obţine următoarul tablou numit *repartiţia bidimensională* sau *tablou de repartiţie bidimensional.*

X \ Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}	$p_{m\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot n}$	1

Variabilele aleatoare :

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_{i.} \end{pmatrix}, i = \overline{1,m}, \qquad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ p_{.j} \end{pmatrix}, j = \overline{1,n},$$

se numesc *legi de probabilitate marginală* pentru vectorul bidimensional (X, Y).

Din faptul că evenimentele $\{e \in E \mid X(e) = x_i, Y(e) = y_j\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, formează un sistem complet de evenimente, rezultă că

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,$$

unde

$$p_{ij} = P(\{e \in E \mid X(e) = x_i,\ Y(e) = y_j\}).$$

Am notat

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik} = p_{i.}, \quad i = \overline{1,m}, \quad \sum_{k=1}^{m} p_{kj} = p_{.j}, \quad j = \overline{1,n},$$

cantităţi care se numesc *probabilităţi marginale.* Ca şi în cazul variabilelor aleatoare unidimensionale, rezultă că

$$P(\{X = x_i\}) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{i.},$$

$$P(\{Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = p_{.j}.$$

Notăm cu $P(\{x_i|y_j\})$ *probabilitatea condiţionată*:

$$P(\{x_i|y_j\}) = P\left(\{X = x_i\} \mid \{Y = y_j\}\right).$$

şi atunci avem

$$P(\{x_i|y_j\}) = \frac{P\left(\{X = x_i\}| \cap \{Y = y_j\}\right)}{P(\{Y = y_j\})} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}. \tag{2.7}$$

Analog:

$$P(\{y_j|x_i\}) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}.$$

Dacă înmulţim relaţia (2.7) cu $P(\{Y = y_j\})$ obţinem

$$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{x_i|y_j\})P(\{Y = y_j\}),$$

adică am exprimat p_{ij} ca un produs dintre o probabilitate condiţionată şi o probabilitate marginală. Analog se obţine

$$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{y_j|x_i\})P(\{X = x_i\}),$$

Presupunem că ne interesează ca Y să ia valori într-o regiune A,

$$\begin{aligned} P\{Y \in A\} &= \sum_{x_i} \sum_{y_j \in A} P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \\ &= \sum_{x_i} \sum_{y_j \in A} P(\{y_j | x_i\}) P\{X = x_i\} = \sum_{x_i} P\{X = x_i\} \sum_{y_j \in A} P(\{y_j | x_i\}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dacă evenimentele $\{X = x_i\}$ şi $\{Y = y_j\}$ sunt independente, deci variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, atunci $p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ şi reciproc.

Deoarece evenimentul

$$(\{Y = y_1\} | \{X = x_i\}) \cup (\{Y = y_2\} | \{X = x_i\}) \cup \ldots (\{Y = y_n\} | \{X = x_i\}) =$$

$$= E | \{X = x_i\}$$

rezultă că

$$\sum_{j=1}^{n} P(\{y_j | x_i) = 1\}.$$

La fel

$$\sum_{i=1}^{m} P(\{x_i | y_j) = 1\}.$$

Observaţie. Putem ataşa vectorului aleator (X, Y) tabloul de repartiţie dat de legile de probabilitate condiţionată :

$$X | \{Y = y_j\} : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots & x_m \\ \dfrac{p_{1j}}{p_{.j}} & \dfrac{p_{2j}}{p_{.j}} & \ldots & \dfrac{p_{ij}}{p_{.j}} & \ldots & \dfrac{p_{mj}}{p_{.j}} \end{pmatrix},$$

şi respectiv

$$Y | \{X = x_i\} : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_i & \ldots & y_m \\ \dfrac{p_{i1}}{p_{i.}} & \dfrac{p_{i2}}{p_{i.}} & \ldots & \dfrac{p_{ij}}{p_{i.}} & \ldots & \dfrac{p_{in}}{p_{i.}} \end{pmatrix}.$$

Deci avem n legi condiţionate ale variabilei aleatoare X corespunzătoare celor n valori ale variabilei aleatoare Y şi respectiv m legi de probabilitate ale variabilei aleatoare Y condiţionate de cele m valori ale lui X.

Exemplul 2.4.1 Numărul biţilor, N, dintr-un mesaj transmişi corect este o variabilă aleatoare care urmează o repartiţie geometrică cu parametrul p. Presupunem că mesajul este împărţit în pachete de maximum M biţi lungime. Fie Q numărul pachetelor complete formate cu biţii unui mesaj şi R numărul biţilor rămaşi în ultimul pachet care poate fi incomplet. Să se calculeze probabilitatea ca mesajul transmis să conţină q pachete complete, iar ultimul pachet să conţină r biţi. Notăm cu Y variabila aleatoare care ia ca valori numărul de pachete complete dintr-un mesaj şi cu Z variabila aleatoare care ia ca valori numărul R de biţi incompleţi din ultimul pachet.

Dacă mesajul are N biţi, atunci numărul pachetelor complete din mesaj este câtul Q a împărţirii lui N la M, iar restul este numărul R al biţilor din ultimul pachet, $N = MQ + R$. Variabila aleatoare Y ia valorile $0, 1, 2, \ldots$ iar variabila aleatoare Z ia valorile $0, 1, 2, \ldots, M-1$. Asociat acestui eveniment considerăm variabila aleatoare bidimensionaă (Y, Z). Probabilitatea ca mesajul corect să conţină q pachete complete şi ultimul pachet să conţină r biţi este dată de

$$P(\{Y = q, Z = r\}) = P(\{X = N\}) = p^{qM+r}(1-p),$$

unde $N = qM + r$. Probabilitatea ca mesajul transmis să conţină q pachete complete

$$P(\{Y = q\}) = P(\{X \in \{qM, qM+1, \ldots, qM+(M-1)\}\}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{M-1} p^{qM+k}(1-p) = (1-p)p^{qM}\frac{1-p^M}{1-p} = (1-p^M)(p^M)^q, \quad q = 0, 1, \ldots.$$

Observăm că variabila aleatoare Y urmează o repartiţie geometrică cu parametrul p^M. Probabilitatea ca ultimul pachet să conţină r biţi este

$$P(\{Z = r\}) = P(\{X \in \{r, M+r, 2M+r, \ldots\}\}) = \sum_{q=0}^{\infty}(1-p)p^{qM+r} =$$
$$= \frac{1-p}{1-p^M}p^r, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

Observăm că variabila aleatoare Z urmează o repartiţie geometrică trunchiată.

Ne punem întrebarea dacă sunt variabilele aleatoare Y şi Z independente. Avem:

$$P(\{Y = q\})P(\{Z = r\}) = (1-p^M)(p^M)^q \frac{1-p}{1-p^M}p^r =$$
$$= \frac{1-p}{1-p^M}p^r = P(\{Y = q\})P(\{Z = r\}), \quad \forall q = 0, 1, \ldots, \quad r = 0, 1, \ldots, M-1.$$

Variabilele aleatoare Y şi Z sunt independente.

2.5 Variabile aleatoare cu un număr infinit numărabil de valori

Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ constituie un sistem numărabil de evenimente care formează domeniul de definiţie al unei astfel de variabile aleatoare cu $P(A_n) = p_n, n \in \mathbb{N}$, atunci tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare este

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix},$$

$$A_i = \{e \in E, X(e) = x_i\}.$$

Un astfel de tabel trebuie să aibă proprietăţile:

$$p_i \geqslant 0, \ \ \forall i \in I\!N; \ \ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Operaţiile cu variabile cu un număr infinit numărabil de valori se definesc ca şi în cazul variabilelor aleatoare discrete simple. La fel se pune problema şi în cazul independenţei variabilelor aleatoare cu un număr infinit numărabil de valori.

Repartiţia Poisson.

Spunem că variabila aleatoare X este repartizată Poisson cu paramatru $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}_+$, dacă tabloul său de repartiţie este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}.$$

Folosim notaţia

$$P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Evident $P(k;\lambda) > 0$ şi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

În Figura 2.4 desenăm densitatea de probabilitate generalizată pentru valorea lui $\lambda = 9$.

Proprietăţi ale repartiţiei Poisson.

P1. Media repartiţiei Poisson este aceeaşi cu dispersia repartiţiei şi egală cu λ.

Într-adevăr,

$$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda.$$

Pentru calculul dispersiei folosim formula $D^2[x] = M[x^2] - (M[X])^2$.

$$M[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty}(k^2-k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty} k^2\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$D^2[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda = \lambda.$$

P2. Suma a două variabile aleatoare independente repartizate Poisson de parametrii λ_1 şi respectiv λ_2 este o variabilă aleatoare repartizată Poisson de parametru $\lambda_1 + \lambda_2$.

Într-adevăr

$$\{X_1 + X_2 = k\} =$$
$$= \{X_1 = 0, X_2 = k\} \cup \{X_1 = 1, X_2 = k-1\} \cup \ldots \cup \{X_1 = k, X_2 = 0\},$$

deci

$$P(\{X_1 + X_2 = k\}) = \sum_{k_1=0}^{k} P(\{X_1 = k_1, X_2 = k - k_1\}) =$$

$$\sum_{k_1=0}^{k} P(\{X_1 = k_1\})P(\{X_2 = k-k_1\}) = \sum_{k_1}^{k} \frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-k_1}}{(k-k_1)!}e^{-\lambda_2} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{k_1=0}^{k}\frac{k!}{k_1!(k-k_1)!}\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k-k_1} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k.$$

P3. Repartiţia Poisson se obţine ca un caz limită a repartiţiei binomiale când $n \to \infty$ şi p scade astfel încât $np = \lambda =$ const.(în general, $n > 30, p \in (0; 0,1)$).

Repartiţia Poisson a apărut odată cu studiul variabilelor aleatoare cu un număr foarte mare de valori. Exemple clasice de astfel de variabile aleatoare sunt cele legate de evenimentele care apar rar într-un interval de timp, ca de exemplu:

- numărul de particule emise de o suprafaţă radioactivă într-un interval de timp;

- numărul accidentelor dintr-o fabrică în decurs de o săptămână;

- numărul maşinilor care trec printr-un anumit loc într-un interval de timp;

- numărul cererilor de I/O la o reţea de calculatoare într-un interval de timp.

Toate aceste procese se numesc Poisson şi ele vor fi studiate în Capitolul 5. În aceste cazuri λ este proporţională cu durata intervalului de timp (adică $\lambda = tw$, w coeficient de proporţionalitate). Parametrul $w = \dfrac{\lambda}{t}$ se mai numeşte parametru de intensitate, reprezentând media numărului de evenimente care se produc în unitatea de timp.

P4. Deoarece repartiţia Poisson se întâlneşte în cazul evenimentelor care se întîmplă rar (n mare, $np =$ constant, rezultă p mic), ea mai poartă denumirea de **legea evenimentelor rare**.

Observaţia 2.5.1 Repartiţia Poisson permite calculul probabilităţii ca un număr de particule să fie emise de o masă radioactivă intr-un interval de timp. Presupunem că masa radioactivă conţine n atomi. Într-o perioada fixată de timp fiecare atom are o probabilitate p foarte mică de dezintegrare şi emitere a particulei radioctive. Dacă atomii se dezinegrează independent unii de alţii, atunci numărul emisiilor într-un interval de timp poate fi privit ca efectuarea repetată de n ori a unui acelaşi eveniment. De exemplu, un microgram de radiu conţine aproximativ $n = 10^{16}$ atomi şi probabilitatea ca un atom să se dezintegreze într-un interval de timp de o milisecundă este $p = 10^{-15}$ (Rozanov, 1969). Astfel sunt îndeplinite condiţiile din Proprietatea P3: n mare şi p mic astfel încât numărul emisiilor urmează o variabilă aleatoare repartizată Poisson.

Teorema 2.5.1 *Dacă X urmează o repartiţie binomială,*

$$P(\{X = k\}) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

unde $np = \lambda =$ const.

Demonstraţie.

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

■

Pentru calculul probabilităţilor $P(k,\lambda)$ s-au întocmit tabele pentru λ cuprins între $0,1,\dots,20$. Aceste tabele dau probabilităţile ca evenimentele să se realizeze de cel puţin m ori.

$$P(\{X \geqslant m\}) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Teorema 2.5.1 ne permite să aproximăm probabilităţile unei repartiţii binomiale.

Exemplul 2.5.1 Probabilitatea de eroare la transmiterea unui bit printr-o linie de comunicaţie este de 10^{-3}. Să se calculeze probabilitatea ca la transmiterea unui bloc de 1000 de biti să avem cinci sau mai mult de cinci erori.

Transmiterea fiecărui bit reprezintă o experienţă Bernoulli care se realizează dacă s-a produs o eroare la transmiterea bitului. Probabilitatea ca să se producă k erori în 1000 de transmisii este dată de probabilitatea calculată cu legea binomială cu $n = 1000$ şi $p = 10^{-3}$. Legea Poisson cu parametrul $\lambda = np = 1000 \cdot 10^{-3} = 1$ aproximează legea binomială. Astfel

$$P[N \geqslant 5] = 1 - P[N < 5] = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\alpha} = 1 - e^{-1}\Big\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\Big\} = 0,00366$$

Exemplul 2.5.2 O fabrică produce becuri şi dă 2 % rebut. Să se aproximeze probabilitatea ca într-o cutie de 100 de becuri să obţinem cel mult trei becuri defecte?

Presupunând indepependenţa, avem de-a face cu o variabilă aleatoare repatizată binomial cu $p = 0,02$ şi $n = 100$. Dacă dorim să calculăm probabilitatea cu ajutorul schemei binomiale, după calcule laborioase obţinem

$$\sum_{k=0}^{3} C_{100}^k (0,2)^k (0,98)^{100-k} = 0,859.$$

Dacă aproximăm X cu o variabilă aleatoare repartizată Poisson, $\lambda = 100 \times 0,02 = 2$,

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k e^{-2}}{k!} = 0,857.$$

Următorul exemplu justifică trecerea la limită şi alegerea parametrului λ.

Exemplul 2.5.3 Un generator de particule emite particule în unitatea de timp. Care este probabilitatea ca în intervalul t să apară k impulsuri ?

Pentru n suficient de mare împărţim $[0,t]$ în intervale de lungime $\frac{t}{n}$, încât în fiecare interval să existe cel mult un impuls. Probabilitatea ca într-un interval de timp de lungime $\frac{t}{n}$ să fie înregistrat un impuls este $\approx w\frac{t}{n} = p$ (se observă că $\frac{wt}{n} \longrightarrow 0$, pentru $n \to \infty$, ceea ce justifică încă o dată denumirea de eveniment rar). Probabilitatea ca în intervalul $[0,t]$ să fie înregistrate k impulsuri este dată de schema lui Bernoulli

$$C_n^k(\frac{wt}{n})^k(1-\frac{wt}{n})^{n-k} \longrightarrow \frac{(wt)^k}{k!}e^{-wt} \text{ pentru } n\to\infty \text{ cu } \lambda = wt.$$

Repartiţia geometrică.

Spre deosebire de variabila aleatoare binomială care apare când fixăm un număr de repetări ale unei experienţe care poate consta în realizarea sau nerealizarea evenimentului A şi numărăm numărul de realizări ale acestuia, în cazul variabilei geometrice numărăm numărul m de efectuări ale experienţei (experienţe de tip Bernoulli, adică independente şi repetate în aceleaşi condiţii) până la prima realizare a evenimentului A. În acest caz variabila aleatoare X ia valorile $X=k,\ k=1,2,\dots,m,\dots$ şi avem

$$P(\{X=k\}) = pq^{k-1},\ \ q=1-p,\ \ k=1,2,3,\dots,$$

unde $P(A)=p$ este probabilitatea de realizare a evenimentului A.

În acest caz

$$F(k) = P(\{X<k\}) = \sum_{j=1}^{k-1} pq^{j-1} = p\sum_{j'=0}^{k-2} pq^{j'} = p\frac{1-g^{k-1}}{1-q} = 1-q^{k-1},$$

unde $q=1-p$.

Uneori ne interesează $M'=M-1$, numărul de repetări ale experienţei până la reuşita ei:

$$P[M'=k] = P[M=k+1] = (1-p)^k p, \quad k=0,1,2,\dots$$

Variabila aleatoare X va lua valoarea 1 dacă evenimentul se realizează în cadrul primei experienţe şi deci $P(\{X=1\})=p$; X va lua valoarea 2 dacă evenimentul A nu s-a realizat la prima experienţă, dar se realizează la a doua experienţă, $P(\{X=2\}) = P(\bar{A}\cap A) = P(\bar{A})P(A) = (1-p)p = qp$. Analog, $P(\{X=3\}) = P(\bar{A}\cap\bar{A}\cap A) = P(\bar{A})P(\bar{A})P(A) = q^2p$ etc. Avem, evident

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\{X=k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p\frac{1}{1-q} = 1.$$

Calculăm media şi dispersia variabilei aleatoare.

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\frac{d}{dq}(\sum_{k=1}^{\infty} q^k) =$$

$$= p\frac{d}{dq}[\frac{q}{1-q}] = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p},$$

ţinând seama de proprietăţile seriilor de puteri pentru $|q|<1$.

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2,$$

$$M[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} k q^k =$$
$$= p \frac{d}{dq} [\frac{q}{(1-q)^2}] = p \frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2},$$

şi deci

$$D^2[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

În Figura 2.5 a) şi b) desenăm densitatea de probabilitate generalizată pentru diferite valori ale lui p.

Exemplul 2.5.4 Calculatorul A transmite un mesaj calculatorului B printr-o linie telefonică. Mesajul este codat astfel încât B detectează când se produc erori în cursul transmiterii mesajului. Dacă B detectează o eroare cere calculatorului A retransmiterea mesajului. Dacă probabilitatea ca transmiterea mesajului să fie eronată este $q = 0,1$, care este probabilitatea ca mesajul să necesite mai mult de două transmisii.

Fiecare transmitere a mesajului urmează o repartiţie binomială cu probabilitatea ca mesajul să fie corect $p = 1 - q$. Experienţele se repetă până când prima transmisie este corectă. Probabilitatea ca mesajul să necesite mai mult de două transmisii este

$$P(\{X > 2\}) = q^2 = 10^{-2}.$$

Exemplul 2.5.5 Fie N numărul de apeluri pe care le face un calculator spre un terminal până când terminalul are un mesaj gata de a fi transmis. Dacă presupunem că terminalul produce mesaje care formează un şir de experienţe care urmează legea binomială, atunci N are o repartiţie geometrică. Aflaţi media variabilei aleatoare care ia ca valori numărul de apeluri. Presupunem $p = 0,4$.

$$M[X = N] = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = \frac{1}{p} = 2,5$$

Aceasta nu este o valoare pe care o poate lua N. Afirmaţia "N este egală cu 2.5 în medie" nu are sens. Sensul afirmaţiei este că media aritmetică a unui număr mare de experienţe va fi aproape de 2.5.

Repartiţia binomială cu exponent negativ.

Se spune că variabila aleatoare X are repartiţie binomială cu exponent negativ, cu parametrii m şi p, $(m = 1, 2, \ldots, 0 < p < 1)$, dacă X poate lua valorile $m, m+1, m+2, \ldots$ iar

$$P(\{X = k\}) = C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}, \quad q = 1 - p.$$

Acestă repartiţie apare în modele de tipul următor: să presupunem că s-a efectuat un număr de observaţii independente, în cursul fiecărei observaţii evenimentul A (de exemplu nefuncţionarea unui subansamblu al unui aparat) poate să se producă cu probabilitatea p. Observaţiile continuă până când evenimentul se produce de m ori şi se caută probabilitatea pentru ca aceasta să se producă exact în decursul a k observaţii ($k \geqslant m$).

Evenimentul $\{X = k\}$ se scrie ca intersecţie a două evenimente: în primele $k-1$ observaţii evenimentul A se produce de $m-1$ ori şi în observaţia k se produce evenimentul A. Din schema lui Bernoulli se deduce că probabilitatea primului eveniment este $C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}$ iar probabilitatea celui de-al doilea eveniment este egală cu p. Deci

$$P(\{X = k\}) = pC_{k-1}^{m-1} p^{m-1} q^{k-m} = C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}.$$

Numele acestei repartiţii provine din faptul că probabilitatea căutată este coeficient în dezvoltarea în serie a lui

$$(\frac{1}{p} - \frac{q}{p})^{-m} = p^m (1-q)^{-m} = p^m \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} q^{k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}.$$

Observăm că definirea acestei variabile aleatoare este corectă deoarece $P(\{X = k\}) > 0$ şi $\sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = 1$.

Pentru a calcula media ţinem seama că $(1-x)^{-m} = \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^{k-m}$ şi deci

$$\frac{x^m}{(1-x)^m} = \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^k \ \text{ dacă } \ |x| < 1, \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^{k-1} = \frac{d}{dx}(\frac{x^m}{(1-x)^m}) = \frac{mx^{m-1}}{(1-x)^{m+1}} \ \text{ dacă } \ |x| < 1,$$

adică

$$M[X] = \sum_{k=m}^{\infty} kC_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = p^m q^{-m+1} \sum_{k=m}^{\infty} kC_{k-1}^{m-1} q^{k-1} = p^m q^{-m+1} \frac{mq^{m-1}}{p^{m+1}} = \frac{m}{p},$$

$$M[X] = \frac{m}{p}.$$

Pentru calculul dispersiei folosim

$$M[X^2] = \sum_{k=m}^{\infty} k^2 C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = p^m q^{-m+1} \sum_{k=m}^{\infty} k^2 q^{k-1}.$$

Pentru a calcula ultima sumă înmulţim (2.9) cu x şi derivăm

$$\sum_{k=m}^{\infty} k^2 C_{k-1}^{m-1} x^{k-1} = \frac{d}{dx}[\frac{mx^m}{(1-x)^{m+1}}] = \frac{mx^{m-1}(m+x)}{(1-x)^{m+2}},$$

deci

$$M[X^2] = \frac{m(m+q)}{p^2},$$

iar

$$D^2[X] = \frac{mq}{p^2}.$$

2.6 Funcţia generatoare

În problemele în care apar variabile aleatoare nenegative se utilizeaă funcţia generatoare a variabilei aleatoare X, $G_X(z)$ care se defineşte prin relaţia

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \tag{2.10}$$

unde $P(\{X = k\}) = p_k, k = 0, 1, 2, \ldots$. Deci cunoscând probabilităţile p_k putem determina funcţia generatoare. Deoarece $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, seria de puteri (2.10) converge pentru $|z| \leqslant 1$. Pentru $|z| < 1$ seria de puteri se poate deriva terman cu termen şi obţinem:

$$G_X^{(j)}(z) = \sum_{k=j}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-j+1)p_j z^{(n-k)} = \sum_{k=j}^{\infty} C_n^j j! p_j z^{(n-k)}.$$

Dacă în relaţia de mai sus facem $z = 0$ obţinem

$$G_X^{(j)}(0) = j! p_j \ \text{ sau } \ p_j = \frac{1}{j!} G_X^{(j)}(0).$$

Aceasta ne arată că putem determina toate probabilităţile p_k cu ajutorul funcţiei generatoare. Din acestă cauză $G_X^{(j)}$ se numeşte funcţie generatoare. În particular, punând $z = 1$ în G'_X şi în G''_X obţinem:

$$M[X] = G'_X(1), \quad M[X^2] = G'_X(1) + G''_X(1).$$

Exemplul 2.6.1 Funcţia generatoare pentru variabila aleatoare Poisson cu parametru λ este dată de

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

Primele două derivate ale lui $G_X(z)$ sunt date de

$$G'_X(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)}; \quad G''_X(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}.$$

De aici rezultă media şi dispersia variabilei aletoare Poisson

$$\begin{aligned} &M[X] = \lambda \\ &D^2[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

2.7 Probleme propuse

Problema 2.1 Se defineşte variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Să se scrie tabloul de repartiţie al variabilelor aleatoare X^2, $X + X^2$, $X + X^3$.

Indicaţie. $P(\{X^2 = 0\}) = P(\{X = 0\}) = 1/3, P(\{X^2 = 1\}) = P(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = 1/3 + 1/3 = 2/3$.

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$X + X^2 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$X + X^3 : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.2 Fie

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,15 & 0,45 & 0,20 & 0,15 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

Să secalculeze:

a) valoarea medie a variabilei aleatoare X şi momentul iniţial de ordin 2;

b) dispersia;

c) momentul centrat de ordin 3.

Indicaţie.

a) $M[X] = \sum_1^5 x_i p_i = 1,5,\ M[X^2] = \sum_1^5 x_i^2 p_i = 3,4.$

b) Notăm $m = M[X] = 1,5,\ D^2[X] = M[(X - m)^2]$.

$$X - m : \begin{pmatrix} -1,5 & -0,5 & 0,5 & 1,5 & 2,5 \\ 0,15 & 0,45 & 0,20 & 0,15 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

$$X - m : \begin{pmatrix} 0,25 & 2,25 & 6,25 \\ 0,65 & 0,30 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

$D^2[X] = M[(X - m)^2] = 1,15$ sau $D^2[X] = M[X^2] - (M(X))^2$.

b) $M[(X - m)^3] = \sum_1^5 (x_i - m)^3 p_i,$

$$(X - m)^3 : \begin{pmatrix} (-1,5)^3 & (-0,5)^3 & (0,5)^3 & (1,5)^3 & (2,5)^3 \\ 0,15 & 0,45 & 0,20 & 0,15 & 0,05 \end{pmatrix}.$$

astfel încât $M[(X - m)^3] = 0,75$.

Problema 2.3 Fie X o variabilă aleatoare repartizată binomial.

a. Să se atate că

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}$$

b. Să se atate că a. implică:(1) $P(\{X=k\})$ este maximă pentru $k_{max} = [(n+1)p]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x; (2) dacă $(n+1)p$ este un întreg, atunci maximum este atins în k_{max} şi $k_{max}-1$.

Indicaţie. b. Impunem condiţiile $p_k/p_{k-1} > 1,\ p_{k+1}/p_k < 1$.

Problema 2.4 Fie X o variabilă aleatoare repartizată geometric. Să se calculeze $P(\{X > k\})$ şi $P(\{X \text{este un număr par}\})$.

Indicaţie. $P(\{X > k\}) = 1 - P(\{X < k\}) - P(\{X = k\}) = 1 - (1 - q^{k-1})pq^{k-1} = q^k$; $P\big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{X = 2k\}\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\{X = 2k\}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{p}{1-q^2} = \dfrac{1}{1+q}$.

Problema 2.5 Să se arate că variabila aleatoare geometrică are proprietatea de pierdere a memoriei

$$P(\{X \geqslant k + j | X > j\}) = P(\{X \geqslant k\}), \quad \forall j, k > 0$$

În ce sens are loc pierdera memoriei?

Indicaţie. $P(\{X \geqslant k+j\}|\{X \geqslant j\}) = \dfrac{P\big((X \geqslant k+j) \cap (X \geqslant j)\big)}{P(\{X > j\})} = q^k$. Pierderea memoriei are loc în sensul că probabilitatea realizării unui eveniment, legat de o experienţă Bernoulli, după $k+j-1$ nerealizări, ştiind că nu s-a realizat după j efectuări ale experienţei, depinde numai de k.

Problema 2.6 Fie X o variabilă aleatoare repartizată geometric. Să se calculeze $P(\{X = k \,|\, X \leqslant m\})$.

Indicaţie. $q^{k-1}p/(1-q^m), \quad 1 \leqslant k \leqslant m$.

Problema 2.7 Fie X o variabilă aleatoare repartizată binomial.

a. Să se atate că

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}$$

b. Să se atate că a. implică:(1) $P(\{X=k\})$ este maximă pentru $k_{max} = [(n+1)p]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x; (2) dacă $(n+1)p$ este un întreg, atunci maximum este atins în k_{max} şi $k_{max}-1$.

Indicaţie. b. Impunem condiţiile $p_k/p_{k-1} > 1,\ p_{k+1}/p_k < 1$.

Problema 2.4 Fie X o variabilă aleatoare repartizată geometric. Să se calculeze $P(\{X > k\})$ şi $P(\{X \text{este un număr par}\})$.

Indicaţie. $P(\{X > k\}) = 1 - P(\{X < k\}) - P(\{X = k\}) = 1 - (1 - q^{k-1})pq^{k-1} = q^k$; $P\big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{X = 2k\}\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\{X = 2k\}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{p}{1-q^2} = \dfrac{1}{1+q}$.

Problema 2.8 Comparaţi aproximaţia obţinută cu variabila Poisson cu probabilitatea binomială pentru $k = 0, 1, 2, 3$ şi $n = 19, p = 0,1;\ \ n = 20, p = 0,05;\ \ n = 100, p = 0,01$.

Problema 2.9 Fie X o variabilă aleatoare repartizată Poisson. Să se arate că pentru $\lambda < 1$, $P(\{X = k\})$ este maxim în $k = 0$; pentru $\lambda > 1$, $P(\{X = k\})$ este maximum pentru $[\lambda]$; dacă λ este întreg pozitiv, $P(\{X = k\})$ este maximum pentru $\lambda = k$ şi $k = \lambda - 1$.

Problema 2.10 Calculaţi media şi dispersia unei variabile aleatoare discrete care ia valorile $\{1, 2, \ldots, n\}$ cu aceeaşi probabilitate.

Indicaţie. $P(\{X = k\}) = \dfrac{1}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$..

Problema 2.11 Să se calculeze probabilităţile marginale pentru următorii vectori aleatori bidimensionali:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	1/6	0	1/6
0	0	1/3	0
1	1/6	0	1/6

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	1/9	1/9	1/9
0	1/9	1/9	1/9
1	1/9	1/9	1/9

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0	0	1/3
0	0	1/3	0
1	1/3	0	0

Să se calculeze probabilităţile evenimentelor $A = \{X \leqslant 0\}, B = \{x \leqslant Y\}$ şi $C = \{X = -Y\}$.

Indicaţie. În toate cazurile $P(\{X = -1\}) = P(\{X = 0\}) = P(\{X = 1\}) = 1/3$, $P(\{Y = -1\}) = P(\{Y = 0\}) = P(\{Y = 1\}) = 1/3$.

Problema 2.12 Un mesaj necesită X unităţi de timp pentru a fi transmis, unde X este o variabilă aleatoare repartizată geometric cu $p_j = (1 - \alpha)\alpha^{j-1}, j = 1, 2, \ldots$. Un singur nou mesaj este transmis într-o unitate de timp cu probabilitatea p şi nici un mesaj cu probabilitatea $1 - p$. Fie K numărul de mesaje noi care apar de-a lungul transmiterii unui singur mesaj. Să se calculeze probabilitatea $P(\{X = k\})$. Să se calculeze $M[X]$ şi $D^2[X]$.

Indicaţie. $P(\{X = k\}) = \dfrac{(1 - \alpha)}{\alpha(1 - \alpha(1 - p))}(\dfrac{p\alpha}{1 - \alpha(1 - p)})^k$.

Problema 2.13 Numărul total de defecte care apar la un circuit urmează o distribuţie Poisson cu parametrul λ. Presupunem că fiecare defect apare într-o anumită regiune R cu probabilitatea p şi că apariţia unui defect este independentă de apariţia altor defecte. Să se determine probabilitatea ca numărul de defecte Y care apar în regiunea R să fie j.

Indicaţie. Folosind ecuaţia (2.8) avem

$$P(\{Y = j\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{Y = j/X = k\})P(\{X = k\}).$$

Defectele care apar în fiecare moment pot fi considerate ca experienţe Bernoulli care se realizează cu succes dacă defectul este în regiunea R. Dacă numărul total de defecte este $X = k$, atunci numărul de defecte care apar în regiunea R urmează o repartiţie Bernoulli de parametrii k şi p:

$$P(\{Y = j | X = k\}) = C_k^j p^j (1-p)^{k-j}, \ \ 0 \leqslant j \leqslant k.$$

Atunci

$$\begin{aligned} P(\{Y = j\}) &= \sum_{k=j}^{\infty} \frac{k!}{j!(k-j)!} p^j (1-p)^{k-j} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda}}{j!} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{-\lambda p}. \end{aligned}$$

Astfel Y este o variabilă aleatoare repartizată Poisson cu media λp.

Capitolul 3

Variabile aleatoare continue

3.1 Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare unidimensionale

În cele ce urmează $\{E, K, P\}$ este un câmp borelian de probabilitate, noţiune care a fost definită în Capitolul 1.8.

Definiţia 3.1.1 *Funcţia* $X : E \rightarrow \mathbb{R}$ *se numeşte* variabilă aleatoare *dacă*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{e \in E | X(e) < x\} \in K. \tag{3.1}$$

Pentru simplificare vom nota $\{X < x\} = \{e \in E | X(e) < x\}$. Această condiţie are loc totdeauna în cazul unei variabile aleatoare discrete (alegând eventual un câmp borelian convenabil). Din definiţie şi din proprietăţile lui K (de a fi închis la complementară, reuniuni şi intersecţii numărabile), fiecare din mulţimile

$$\{X \leqslant x\}, \ \{X > x\}, \ \{X \geqslant x\}, \ \{a \leqslant X < b\},$$

$$\{a < X \leqslant b\}, \ \{a < X < b\}, \ \{a \leqslant X \leqslant b\}, \ \forall x, a, b \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

aparţine lui K, dacă (3.1) are loc şi reciproc, apartenenţa la K a oricărei mulţimi (3.2) implică (3.1). Pentru exemplificare, să demonstrăm că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

i. $\{X < x\} \in K$;

ii.$\{X \leqslant x\} \in K$.

Să demonstrăm $(i) \Rightarrow (ii)$. Putem scrie

$$\{X \leqslant x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X < x + 1/n\}.$$

Din (i) avem $\{X < x + 1/n\} \in K$ şi din faptul că familia K este închisă la intersecţii numărabile, rezultă că $\{X \leqslant x\} \in K$.

Pentru implicaţia $(ii) \Rightarrow (i)$, observăm că

$$\{X < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leqslant x - 1/n\},$$

iar $\{X \leqslant x - 1/n\} \in K$. Echivalenţa $\{X < x\} \in K \Leftrightarrow \{X > x\} \in K, \ \ \forall x \in R$, rezultă din faptul că $\overline{\{X \leqslant x\}} = \{X > x\}$ şi axioma $a)$ din definiţia câmpului borelian.

Exemplul 3.1.1 Dacă $E = \mathbb{R}$, iar K este cel mai mic corp borelian ce conţine toate intervalele (a, b), $\forall a, b \in \mathbb{R}$, elementele lui K se numesc *mulţimi boreliene*. Orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă este o variabilă aleatoare, deoarece contraimaginea unei mulţimi deschise este o mulţime deschisă. Se poate demonstra că acest rezultat se păstrează şi în cazul mulţimilor boreliene (contraimaginea unei mulţimi boreliene este boreliană).

Următoarele propoziţii ne arată că operaţiile uzuale cu funcţii, aplicate variabilelor aleatoare, au ca rezultat tot variabile aleatoare.

Propoziţia 3.1.1 *Fie X o variabilă aleatoare şi $c \in \mathbb{R}$, atunci următoarele funcţii:*

1. $X + c$;
2. cX;
3. $|X|$;
4. X^2;
5. $1/X$;

sunt variabile aleatoare.

Demonstraţie. Vom transforma convenabil relaţia (3.1) în fiecare caz şi vom folosi faptul că X este variabilă aleatoare.

1.$\{X + c < x\} = \{X < x - c\} \in K, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

2.$\{cX < x\} = \begin{cases} \{X > x/c\}, & \text{dacă } c < 0 \\ \{X < x/c\}, & \text{dacă } c > 0 \end{cases} \in K.$

Dacă $c = 0$, afirmaţia este imediată.

3.$\{|X| < x\} = \{X < x\} \cap \{X > -x\} \in K$.

4.$\{X^2 < x\} = \{|X| < \sqrt{x}\} \in K, \ \ \forall x > 0$.

5.$\{\frac{1}{X} < x\} = \begin{cases} \{X < 0\} \cap \{X > 1/x\}, & \text{dacă } x < 0 \\ \{X < 0\}, & \text{dacă } x = 0 \\ \{X < 0\} \cup \{X > 1/x\}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \in K.$ ∎

Propoziţia 3.1.2 *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare, atunci:*

1. $X - Y$;
2. $X + Y$;
3. XY;
4. X/Y;
5. $\max(X, Y)$;

6. $\min(X, Y)$;

sunt variabile aleatoare.

Demonstrație. Toate afirmațiile *2-6*, decurg din prima. Să demonstrăm *1.* Folosind numărabilitatea mulțimii $\mathbf{Q}$ și faptul că între două numere reale există cel puțin un număr rațional putem scrie:

$$\{X - Y < x\} = \{X < Y + x\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\{X < r_n\} \cap \{r_n - x < Y\}) \right) \in K,$$

unde $r_n \in \mathbf{Q}$.

Pentru *2*, observăm că $X + Y = X - (-Y)$, iar pentru XY, afirmația rezultă din identitatea $XY = \frac{1}{4}[(X + Y)^2 - (X - Y)^2]$.

4 este o consecință a afirmației precedente și a Propoziției 3.1.1.

Ultimele două afirmații rezultă din egalitățile:

$$\max(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y + |X - Y|),$$

$$\min(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y - |X - Y|).$$

■

Definiția 3.1.2 $\{X_i\}$, $i \in I$ *este o familie de* variabile aleatoare independente*, dacă pentru orice* $J \subset I$*,* J *finită și orice familie* $\{B_j\}$*,* $j \in J$ *de mulțimi boreliene (vezi Exemplul 3.1.1) are loc:*

$$P(\{\bigcap_{j \in J} X_j^{-1}(B_j)\}) = \prod_{j \in J} P(\{X_j^{-1}(B_j)\}).$$

Propoziția 3.1.3 *Fie* $\{X_i\}$ *,*$i \in I$ *o familie de variabile aleatoare independente și* $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o familie de funcții continue. Atunci familia* $\{f_i \circ X_i\}$ *constituie o familie de variabile aleatoare independente.*

Demonstrație. Pentru orice $J \subset I$ finită, are loc:

$$P(\{\bigcap_{j \in J} (f_j \circ X_j)^{-1}(B_j)\}) = P(\{\bigcap_{j \in J} X_j^{-1} \circ f_j^{-1}(B_j)\}) = \prod_{j \in J} P(\{X_j^{-1}(f_j^{-1}(B_j))\}).$$

Deoarece f_j este o funcție continuă, contraimaginea unei mulțimi boreliene este de asemenea boreliană, iar afirmația rezultă din faptul că X_j este variabilă aleatoare. ■

Definiția 3.1.3 *Funcția* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$*, definită prin*

$$F(x) = P(\{X < x\}) \tag{3.3}$$

se numește funcția de repartiție *a variabilei aleatoare* X*.*

Dacă se particularizează definiţia în cazul unei variabile aleatoare discrete, se obţine funcţia în scară dată în Capitolul 2.2.

Propoziţia 3.1.4 *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. *Dacă* $x_1 < x_2$, *atunci* $F(x_1) \leqslant F(x_2), \ \ \forall x_1, x_2 \in I\!R$;
2. $F(x-0) = F(x), \ \ \forall x \in I\!R$ *(*F *este continuă la stânga);*
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$*;*
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

Demonstraţie.

1. Observăm că $\{X < x_2\} = \{X < x_1\} \cup \{x_1 \leqslant X < x_2\}$, iar cele două evenimente sunt incompatibile. Aplicând probabilitatea peste ultima relaţie, găsim

$$F(x_2) = P(\{X < x_2\}) = F(x_1) + P(\{x_1 \leqslant X < x_2\}) \geqslant F(x_1),$$

deoarece din definiţie, $P(\{x_1 \leqslant X < x_2\}) \geqslant 0$.

2. Fie x_n un şir crescător la x. Avem:

$$\{X < x\} = \{X < x_1\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n \leqslant X < x_{n+1}\}).$$

Aplicând probabilitatea, găsim

$$F(x) = F(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (F(x_{n+1}) - F(x_n))$$

deci seria precedentă este convergentă şi are ca sumă limita şirului de sume parţiale.

$$F(x) = F(x_1) + \lim_{n \to \infty} (F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \ldots + F(x_{n+1}) - F(x_n)) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} F(x_{n+1}) = F(x-0).$$

3. Dacă x_n este un şir descrescător la $-\infty$, atunci

$$\{X < x\} = \{x_1 \leqslant X < x\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_{n+1} \leqslant X < x_n\}).$$

Aplicând probabilitatea, rezultă

$$F(x) = F(x) - F(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (F(x_n) - F(x_{n+1})),$$

de unde $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_{n+1}) = 0$.

4. Se constată că

$$\{X \leqslant \infty\} = \{X < x_1\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n \leqslant X < x_{n+1}\}),$$

unde x_n este un şir crescător la $+\infty$. Procedând ca mai sus, găsim $1 = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. ■

Observaţie. Dacă $x_1 < x_2$, atunci

$$P(\{x_1 \leqslant X < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1).$$

Afirmaţia rezultă folosind demonstraţia punctului *1.*

Folosind relaţia dintre probabilitatea unui eveniment şi cea a evenimentului contrar, mai rezultă

$$P(\{X \geqslant x\}) = 1 - F(x).$$

Observaţie. Se poate demonstra că, reciproc, orice funcţie $F : I\!R \to I\!R$ având proprietăţile *1-4*, este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare, pe un anumit câmp de probabilitate, de aceea vom spune că aceste proprietăţi reprezintă o caracterizare a funcţiei de repartiţie. De exemplu putem lua $E = (0, 1)$ şi K corpul borelian generat de intervalele deschise ale lui E, iar P măsura Lebesgue [22] pentru care vom schiţa modul de construcţie. Notăm cu

$$\mathcal{D} = \{\bigcup_{i\in I}(a_i, b_i) | (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, I \subseteq I\!N\}, \quad \forall a_i, b_i \in (0, 1).$$

Elementele lui $\mathcal{D}$ se numesc *mulţimi deschise*. Definim aplicaţia

$$P_0 : \mathcal{D} \to [0, 1],$$

$$P_0(\bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)) = \sum_{i\in I}(b_i - a_i), \quad \forall a_i, b_i \in (0, 1).$$

Se observă că dacă I are un singur element, condiţia de mai sus devine:

$$P_0(a, b) = b - a, \quad \forall a, b \in (0, 1)$$

formulă care dă lungimea intervalului (a, b); deci măsura Lebesgue a unei reuniuni numărabile de intervale disjuncte este suma lungimilor lor. Seria din membrul al doilea are şirul sumelor parţiale s_n mărginit. Într-adevăr, ordonând intervalele din şirul sumelor parţiale, putem presupune $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots a_n$ şi $b_n \leqslant 1$. Atunci

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - b_i) = b_n - a_1 \leqslant 1 - 0 = 1.$$

Fie K cel mai mic corp borelian (se poate arăta că există), care conţine $\mathcal{D}$, pe care îl notăm K; aplicaţia P_0 poate fi prelungită la o probabilitate pe K, astfel încât să aibă loc $\forall D \in \mathcal{D}, P(D) = P_0(D)$.

Fie F o funcţie care satisface condiţiile propoziţiei precedente; pentru simplificare să presupunem că F este strict monotonă şi continuă (deci este inversabilă) şi notăm $X = F^{-1}$. Atunci F este funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X. Într-adevăr,

$$P(\{y \in (0,1) | X(y) < x\}) = P(\{y \in (0,1) | F^{-1}(y) < x\}) =$$

$$= P_0(\{y \in (0,1) | y < F(x)\}) = F(x) - 0 = F(x),$$

unde P este măsura Lebesgue introdusă anterior.

Propoziţia 3.1.5 *Pentru orice variabilă aleatoare X, are loc*

$$P(\{X = x\}) = F(x + 0) - F(x).$$

Demonstraţie. Fie $x_1 > x_2 > \ldots x_n > x_{n+1} > \ldots$ un şir convergent la x. Atunci are loc

$$\{X \geqslant x\} = \{X = x\} \cup \{X \geqslant x_1\} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_{n+1} \leqslant X < x_n\}).$$

Aplicând probabilitatea, găsim

$$1 - F(x) = P(\{X = x\}) + 1 - F(x_1) + \lim_{n\to\infty} (F(x_1) - F(x_2) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n+1})) =$$

$$= P(\{X = x\}) + 1 - \lim_{n\to\infty} F(x_n) = P(\{X = x\}) + 1 - F(x + 0).$$

Deci afirmaţia este adevărată. ■

Din propoziţia precedentă deducem că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i. $P(\{X = x\}) = 0$;
ii. F este continuă în x.

Propoziţia 3.1.6 *O funcţie de repartiţie are o mulţime cel mult numărabilă de puncte de discontinuitate de prima speţă.*

Demonstraţie. Fiind monotonă, funcţia de repartiţie F nu poate avea decât discontinuităţi de prima speţă (deci în orice punct $x \in R$, există $F(x - 0) = F(x)$ şi $F(x + 0)$ finite). Deoarece $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, F nu poate avea un salt mai mare ca $1/2$, cel mult trei salturi cuprinse între $1/4$ şi $1/2$, iar în general cel mult $2^n - 1$ salturi cuprinse între $\frac{1}{2^n}$ şi $\frac{1}{2^{n-1}}$. Renumerotând, obţinem mulţimea salturilor cel mult numărabilă. ■

O variabilă aleatoare cu funcţie de repartiţie continuă va fi numită *variabilă aleatoare continuă*. Dacă X este o variabilă aleatoare continuă, iar A este o mulţime cel mult numărabilă, atunci probabilitatea ca X să ia valori în A este nulă, adică

$$P(\{e \in E | X(e) \in A\}) = P(\{X^{-1}(A)\}) = 0.$$

Definiţia 3.1.4 *Fie X o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie F şi $q \in I\!N^*$; numerele $c_i, i = 1, \ldots q - 1$ definite prin*

$$F(c_i) \leqslant \frac{i}{q}, \ F(c_i + 0) \geqslant \frac{i}{q}$$

se numesc q-cvantile .

q-cvantilele sunt unic determinate dacă F este continuă şi strict crescătoare ca soluţii ale ecuaţiei

$$F(c_i) = \frac{i}{q},\ i = 1 \dots q-1.$$

Pentru $q = 2$ se obţine *mediana*, pe care o vom nota m_e şi care se caracterizează prin

$$F(m_e) \leqslant \frac{1}{2},\ F(m_e + 0) \geqslant \frac{1}{2}, \tag{3.4}$$

iar în cazul continuităţii lui F,

$$F(m_e) = \frac{1}{2}.$$

Pentru $q = 4$ se obţin *cvartilele*, pentru $q = 10$,*decilele* etc.

Funcţia de repartiţie condiţionată.

În câmpul de probabiliatate $\{E, K, P\}$ considerăm $A \in K$, cu proprietatea $P(A) \neq 0$. Reamintim că în Capitolul 1.2 s-a definit noţiunea de probabilitate condiţionată prin formula

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},\quad \forall B \in K.$$

Definiţia 3.1.5 *Dată o variabilă aleatoare X, numim* funcţie de repartiţie condiţionată de evenimentul A, *funcţia dată de*

$$F(x|A) = P(\{X < x\}|A) = \frac{P(\{X < x\} \cap A)}{P(A)}.$$

Toate proprietăţile funcţiei de repartiţie se păstrează; menţionăm

$$F(+\infty|A) = 1;\quad F(-\infty|A) = 0.$$

Să demonstrăm următoarea formulă

$$P(\{a \leqslant X < b\}|A) = F(b|A) - F(a|A). \tag{3.5}$$

Într-adevăr, dacă $a < b$ avem $\{X < a\} \subset \{X < b\}$ şi

$$P(\{a \leqslant X < b\}|A) = \frac{P(\{a \leqslant X < b\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P\left((\{X < b\} \cap A) \setminus (\{X < a\} \cap A)\right)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(\{X < b\} \cap A) - P(\{X < a\} \cap A)}{P(A)} = F(b|A) - F(a|A).$$

Ne interesează în continuare, pentru numeroasele aplicaţii practice, unele cazuri particulare ale evenimentului A.

1. Dacă $A = \{X < a\}$ şi $F(a) = P(\{X < a\}) \neq 0$, atunci

$$F(x|A) = \frac{P(\{X < x\} \cap \{X < a\})}{P(\{X < a\})} = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(a)}, & \text{dacă } x \leqslant a \\ 1, & \text{dacă } x > a. \end{cases}$$

Deci obţinem

$$F(x|\{X < a\}) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(a)}, & \text{dacă } x \leqslant a \\ 1, & \text{dacă } x > a. \end{cases} \tag{3.6}$$

În Figura 3.1 sunt ilustrate cele două funcţii.

2. Fie $A = \{a \leqslant X < b\}$ astfel ca $P(A) = F(b) - F(a) \neq 0$. Deducem imediat că

$$F(x|\{a \leqslant X < b\}) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant a, \\ \dfrac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}, & \text{dacă } a < x \leqslant b, \\ 1, & \text{dacă } x > b. \end{cases} \tag{3.7}$$

Demonstrăm următoarea formulă, care se dovedeşte utilă în aplicaţii. În ipotezele precedente are loc

$$P(A|\{a \leqslant X < b\}) = \frac{(F(b|A) - F(a|A))P(A)}{F(b) - F(a)}. \tag{3.8}$$

Aceasta rezultă imediat

$$P(A|\{a \leqslant X < b\}) = \frac{P(A \cap \{a \leqslant X < b\})}{P(\{a \leqslant X < b\})} =$$

$$= \frac{P(\{a \leqslant X < b\}|A)P(A)}{F(b) - F(a)} = \frac{(F(b|A) - F(a|A))P(A)}{F(b) - F(a)}.$$

În ultima relaţie s-a folosit (3.5).

3.2 Densitatea de probabilitate. Repartiţia normală

Fie $\{E, K, P\}$ un câmp borelian de probabilitate. Considerăm o clasă de variabile aleatoare X pentru care există o funcţie $f : I\!R \to I\!R_+$ cu un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă, ce satisface relaţia

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \tag{3.9}$$

unde $F(x)$ este funcţia de repartiţie a variabilei X.

Funcţia f se numeşte *densitate de probabilitate.*

Dacă f este continuă în $x \in I\!R$, atunci F este derivabilă în x şi

$$F'(x) = f(x).$$

Acest lucru rezultă imediat dacă se aplică teorema de medie în integrala Riemann şi continuitatea lui f. Într-adevăr,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = f(x).$$

Dacă $a, b \in I\!R$ şi F este continuă, atunci

$$P(\{a \leqslant X < b\}) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dacă în relaţia (3.9) trecem la limită pentru x tinzând la ∞ şi folosim faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$, deducem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1. \tag{3.10}$$

Reciproc, dacă o funcţie $f : I\!R \to I\!R_+$, cu un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă, satisface (3.10), atunci ea este integrabilă pe orice interval de forma $(-\infty, x)$, $\forall x \in I\!R$, deoarece

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

şi funcţia $F : I\!R \to I\!R$, definită prin

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

satisface condiţiile propoziţiei (3.1.4), deci este o funcţie de repartiţie, dacă ţinem cont de observaţia făcută după această propoziţie.

Repartiţia uniformă. Vom nota cu $X : U(a, b)$ o variabilă aleatoare uniform repartizată pe intervalul (a, b), $\forall a, b \in I\!R$, dacă densitatea de probabilitate este dată de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Se constată imediat că este îndeplinită condiţia (3.10). Funcţia de repartiţie este dată de

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } a < x \leqslant b, \\ 1, & \text{dacă } x > b. \end{cases}$$

Graficele celor două funcţii sunt reprezentate în figurile 3.2 şi 3.3.

Exemplul 3.2.1 Dacă efectuăm măsurători de precizie, iar rezultatul este cuprins între k şi $k+1$ unităţi, convenind să-l aproximăm cu $k + 1/2$, comitem o eroare care poate fi presupusă uniform repartizată pe intervalul $(-1/2, 1/2)$, deci are densitatea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [-1/2, 1/2], \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Repartiţia normală. Variabila aleatoare X este distribuită normal cu parametrii $m \in I\!R$, $\sigma > 0$ şi vom nota $X : N(m, \sigma^2)$, dacă are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in I\!R. \tag{3.11}$$

Observăm că $f(x) \geqslant 0$. Pentru calculul integralei din condiţia (3.10) facem schimbarea de variabilă $y = \dfrac{x-m}{\sigma}$ şi obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

Pentru calculul ultimei integrale vezi Anexa 3.

Dacă $m = 0$ şi $\sigma = 1$, repartiţia se mai numeşte *normată* şi are densitatea

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{3.12}$$

Graficul este cunoscut sub numele de "clopotul lui Gauss". Se constată că acesta este simetric faţă de dreapta $x = m$, pentru $x = m$ funcţia f are maxim egal cu $f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, iar punctele $m \pm \sigma$ sunt puncte de inflexiune. Pentru σ constant şi m variabil, graficul se translează corespunzător. Dacă m este constant, iar σ variabil se constată că punctul de maxim variază invers proporţional în raport cu σ. În Figura 3.4 se poate constata cum variază densitatea în funcţie de σ. Funcţia de repartiţie F are graficul dat de Figura 3.5

şi se poate determina numeric, dacă se cunosc valorile **funcţiei lui Laplace** , care se defineşte prin

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \forall z \in I\!R.$$

Se verifică uşor că $\Phi(-z) = -\Phi(z)$, ceea ce permite tabelarea funcţiei doar pentru valori pozitive. Mai observăm că are loc relaţia

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}. \tag{3.13}$$

Să exprimăm funcţia de repartiţie cu ajutorul funcţiei lui Laplace. În integrala $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ facem schimbarea de variabilă $\dfrac{t-m}{\sigma} = u$ şi obţinem

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_0^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma}).$$

În ultima egalitate s-a folosit relaţia (3.13). Se obţine astfel formula

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\frac{x-m}{\sigma}). \tag{3.14}$$

Din (3.14), folosind faptul că $P(\{a \leqslant X < b\}) = F(b) - F(a)$, deducem

$$P(\{a \leqslant X < b\}) = \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma}).$$

Probabilitatea ca abaterea faţă de m, notată $|X - m|$ să nu depăşească $\epsilon > 0$, este dată de

$$P(\{|X - m| < \epsilon\}) = 2\Phi(\frac{\epsilon}{\sigma}).$$

Regula celor 3σ. O variabilă normal repartizată $X : N(m, \sigma^2)$ ia valori semnificative în intervalul $(m-3\sigma, m+3\sigma)$. Într-adevăr, $P(\{|X-m| \geqslant 3\sigma\}) = 1 - P(\{|X-m| < 3\sigma\}) = 1 - 2\Phi(3) = 0,0027$, valoare care în unele situaţii poate fi neglijată.

Exemplul 3.2.2 Durata de funcţionare a unei baterii este o variabilă aleatoare, notată X, repartizată normal $N(m, \sigma^2)$, unde $m = 120$ zile reprezintă timpul mediu de funcţionare, iar $\sigma = 10$ zile reprezintă abaterea faţă de medie (aceste noţiuni vor fi introduse şi studiate şi în cazul continuu în Capitolul 3.4). Determinaţi

a. probabilitatea ca bateria să funcţioneze cel puţin 100 de zile;

b. probabilitatea ca bateria să funcţioneze între 100 şi 150 de zile;

c. intervalul de timp în care se poate presupune că bateria funcţionează aproape sigur.

a. $P(\{X \geqslant 100\}) = 1 - P(\{X < 100\}) = 1 - F(100) = 1 - (\frac{1}{2} + \Phi(\frac{100-120}{10})) = \frac{1}{2} + \Phi(2) = 0,97725$;

b. $P(\{100 \leqslant X \leqslant 150\}) = \Phi(\frac{150-120}{10}) - \Phi(\frac{100-120}{10}) = \Phi(3) + \Phi(2) = 0,9759$;

c. Aplicînd regula celor 3σ, găsim intervalul căutat de forma $|X - m| < 3\sigma$, deci bateria funcţionează aproape sigur între 90 şi 150 zile.

Exemplul 3.2.3 Repartiția erorilor accidentale de măsurare. Alte tipuri de erori decât cele datorate aproximărilor (în cazul măsurătorilor de precizie) sunt cele accidentale. Notăm cu X eroarea comisă la efectuarea unei măsurători, care este o variabilă aleatoare. Dacă valoarea exactă a mărimii este r, prin efectuarea a n măsurători obţinem valorile $r_1, r_2, \ldots, r_n$ aproximative şi erorilor $e_k = r - r_k, k = 1, \ldots n$. Să determinăm o funcţie derivabilă, f, care să fie densitatea de probabilitate a variabilei X. Probabilitatea ca eroarea să fie cuprinsă în intervalul $[e_k, e_k + h_k], k = 1, \ldots, n$, cu h_k suficient de mic poate fi aproximată cu $f(e_k)h_k$, iar în cele n măsurători independente este produsul

$$p(r) = h_1 f(e_1) h_2 f(e_2) \ldots h_n f(h_n) = h_1 h_2 \ldots h_n f(r - r_1) \ldots f(r - r_n).$$

Legea numerelor mari (care va fi studiată amănunţit în Capitolul 4) ne permite să luăm ca valoare cea mai probabilă media aritmetică, notată

$$\bar{r} = \frac{1}{n}(r_1 + \ldots r_n).$$

Deci $\bar{r}$ este un punct de maxim pentru $p(r)$. Notăm cu $g(r) = f(r - r_1) \ldots f(r - r_n)$. Din condiţia $p'(\bar{r}) = 0$, rezultă $g'(\bar{r}) = 0$. Are loc

$$\frac{g'(r)}{g(r)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(r - r_1) \ldots f(r - r_{i-1}) f'(r - r_i) f(r - r_{i+1}) \ldots f(r - r_n)}{f(r - r_1) \ldots f(r - r_n)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(r - r_i)}{f(r - r_i)}.$$

Din definiţia mediei, rezultă $(\bar{r} - r_1) + \ldots + (\bar{r} - r_n) = 0$, deci $\sum_{k=1}^{n} (\bar{r} - r_k) = 0$. Putem atunci scrie

$$0 = \frac{g'(\bar{r})}{g(\bar{r})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f'(\bar{r} - r_k)}{f(\bar{r} - r_k)} - c \sum_{k=1}^{n} (\bar{r} - r_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f'(\bar{r} - r_k)}{f(\bar{r} - r_k)} - c(\bar{r} - r_k) \right).$$

Punem condiţia ca termenul general al sumei să se anuleze. Aceasta conduce la ecuaţia diferenţială

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = cx$$

cu soluţia $f(x) = ke^{c\frac{x^2}{2}}$. Să determinăm constantele k şi c, astfel ca $f(x)$ să fie o densitate de probabilitate. Punând condiţia (3.10), găsim $c < 0, k > 0$. Dacă notăm $\sigma^2 = -\frac{1}{c}$, găsim $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma$ şi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Deci erorile accidentale de măsurare se repartizează după legea $N(0, \sigma^2)$. Constanta $h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ se numeşte *precizia măsurătorii.*

Exemplul 3.2.4 O variabilă aleatoare X este repartizată normal $N(0, \sigma^2)$. Dat un interval (α, β), cu $\alpha < 0$, $\beta > 0$, să determinăm valoarea σ, astfel ca probabilitatea $P(\{X \in (\alpha, \beta)\})$ să fie maximă. Are loc evident

$$P(\{\alpha < X < \beta\}) = \Phi(\frac{\beta}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\frac{\beta}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^{\frac{\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right).$$

Anulăm derivata în raport cu σ a integralei cu parametru şi găsim

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}} (-\frac{\beta^2}{\sigma^2}) - e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} (-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}) \right) = 0.$$

Deducem

$$\sigma = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln \beta - \ln |\alpha|)}}.$$

În practică apar des situaţii în care o variabilă aleatoare continuă este suma dintre o variabilă aleatoare discretă şi o variabilă aleatoare continuă. Ca aplicaţie a formulei probabilităţii totale se poate deduce densitatea de probabilitate.

Exemplul 3.2.5 Fie X o variabilă aleatoare discretă care are repartiţia:

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots n$$

şi Y o variabilă aleatoare continuă care are densitatea de probabilitate $f(x)$. Să determinăm densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X + Y$, dacă X şi Y sunt independente. Considerăm sistemul complet de evenimente $A_i = \{X = x_i\}, \ i = 1, \dots n$ şi să exprimăm funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare Z.

$$F_Z(x) = P(\{X + Y < x\}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(\{X + Y < x\} \cap A_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(\{Y + x_i < x\})P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i P(\{Y < x - x_i\}).$$

Prin derivare găsim

$$f_Z(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_Y(x - x_i).$$

Exemplul 3.2.6 O variabilă aleatoare continuă are densitatea de probabilitate $f_1(x)$ cu probabilitatea p_1 şi densitatea de probabilitate $f_2(x)$ cu probabilitatea p_2, cu $p_1 + p_2 = 1$. Găsiţi expresia densităţii de probabilitate şi a funcţiei de repartiţie a variabilei X. Considerăm sistemul complet de evenimente $A_i, i = 1, 2$, unde evenimentul A_i reprezintă faptul că X are densitatea de probabilitate f_i. Atunci funcţia de repartiţie este dată de

$$F(x) = P(\{X < x\}) = P(A_1)P(\{X < x\}|A_1) + P(A_2)P(\{X < x\}|A_2) =$$

$$= p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x).$$

Funcţia de densitate este atunci

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x).$$

Densităţi de probabilitate condiţionate. Fie X o variabilă aleatoare continuă şi $A \in K$, cu probabilitatea $P(A) \neq 0$. Presupunem că X are densitatea de probabilitate f, atunci *densitatea de probabilitate a lui X, condiţionată de A* este dată în punctele ei de continuitate de derivata funcţiei de repartiţie condiţionată

$$f(x|A) = F'(x|A).$$

1. Dacă $A = \{X < a\}$, prin derivarea formulei (3.6) se obţine

$$f(x|A) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(a)}, & \text{dacă } x \leqslant a, \\ 0, & \text{dacă } x > a. \end{cases} \tag{3.15}$$

2. Dacă $A = \{a \leqslant X < b\}$ prin derivarea relaţiei (3.7) găsim

$$f(x|\{a \leqslant X < b\} = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(b) - F(a)}, & \text{dacă } a < x \leqslant b, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{3.16}$$

Exemplul 3.2.7 Fie $X : N(m, \sigma^2)$. Să determinăm $f(x|\{|X-m| \leqslant k\sigma\})$. Observăm că $P(\{|X-m| \leqslant k\sigma\}) = 2\Phi(k)$ şi înlocuim în (3.16). Deci

$$f(x|\{|X-m| \leqslant k\sigma\}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma 2\Phi(k)} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{dacă } |x-m| \leqslant k\sigma \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Exemplul 3.2.8 Fie T variabila aleatoare care dă timpul de funcţionare până la prima defectare. Să determinăm $F(x|\{T \geqslant t\})$ şi $f(x|\{T \geqslant t\})$. Observăm că $P(\{T \geqslant t\}) = 1 - F(t)$, probabilitate care va fi definită ca funcţie de fiabilitate în Capitolul 3.7. Găsim

$$F(x|\{T \geqslant t\}) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(t)}{1 - F(t)}, & \text{dacă } x \geqslant t, \\ 0, & \text{dacă } x < t. \end{cases}$$

$$f(x|\{T \geqslant t\}) = \frac{f(x)}{1 - F(t)} = \frac{f(x)}{\displaystyle\int_t^{+\infty} f(x)dx}, \quad x \geqslant t.$$

Formula probabilităţii totale. Formula lui Bayes.

Vom da versiunea continuă a formulelor prezentate în Capitolul 1.6. Considerăm evenimentul $\{X = x\}$ unde X este o variabilă aleatoare continuă, deci admite funcţie de repartiţie continuă. Atunci avem $P(\{X = x\}) = 0$. În unele situaţii putem totuşi defini $P(A|\{X = x\})$, în sensul existenţei următoarei limite

$$P(A|\{X = x\}) = \lim_{\Delta x \to 0} P(A|\{x \leqslant X < x + \Delta x\}) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(F(x + \Delta x|A) - F(x|A))P(A)}{F(x + \Delta x) - F(x)} = \frac{f(x|A)P(A)}{f(x)}.$$

În şirul de egalităţi s-a folosit formula (3.8). Dacă integrăm pe $\mathbb{R}$ relaţia

$$P(A|\{X = x\})f(x) = f(x|A)P(A)$$

obţinem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(A|\{X = x\})f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|A)P(A)dx =$$
$$= P(A)(F(+\infty|A) - F(-\infty|A)) = P(A).$$

Relaţia obţinută se numeşte *formula probabilităţii totale* în cazul continuu şi este

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A|\{X = x\})f(x)dx. \tag{3.17}$$

Formula lui Bayes în cazul continuu este

$$f(x|A) = \frac{P(A|\{X = x\})f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(A|\{X = x\})f(x)dx}.$$

Exemplul 3.2.9 Densitatea de probabilitate a defectării unei valve radio în momentul deschiderii este $q(v)$. Voltajul V este aleator şi are repartiţie $N(m, \sigma^2)$. Să găsim probabilitatea evenimentului A, care semnifică faptul că la momentul deschiderii valva s-a defectat. Vom folosi formula (3.17)

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(v)f(v)dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} q(v)e^{-\frac{(v-m)^2}{2\sigma^2}}dv.$$

3.3 Funcţia de repartiţie multidimensională. Transformări

Fie $\{E, K, P\}$ un câmp borelian de probabilitate şi $X_1, \ldots, X_n$, variabile aleatoare.

Definiţia 3.3.1 *Funcţia notată* $(X_1, \ldots, X_n) : E \to I\!R^n$, *definită prin*

$$(X_1, \ldots, X_n)(e) = (X_1(e), \ldots, X_n(e)),$$

se numeşte variabilă aleatoare n-dimensională.

Pentru $(x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n$, notăm

$$\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{X_i < x_i\}$$

şi observăm că acesta este un element al lui K.

Definiţia 3.3.2 *Funcţia* $F : I\!R^n \to I\!R$, *definită prin*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}),$$

se numeşte funcţie de repartiţie n dimensională.

Fără a intra în detalii de demonstraţie, amintim că pentru funcţia de repartiţie n-dimensională au loc proprietăţile:

1. F este nedescrescătoare în fiecare argument;
2. F este continuă la stânga în fiecare argument;
3. $F(+\infty, \ldots, +\infty) = 1$;
4. Pentru orice $k = 1, \ldots n$, are loc

$$\lim_{x_k \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = 0, \ \ \forall x_1 \ldots, x_{k-1}, x_{k+1} \ldots, x_n \in I\!R.$$

Numai satisfacerea acestor proprietăţi, nu implică faptul că F este funcţie de repartiţie, pentru o variabilă aleatoare n-dimensională. Pentru a_i, b_i $i = 1, \ldots n$ se poate arăta că

$$P(\{a_1 \leqslant X_1 < b_1, \ldots, a_n \leqslant X_n < b_n\}) =$$

$$= F(b_1, \dots, b_n) - \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i<j}^{n} p_{ij} - \sum_{i<j<k}^{n} p_{ijk} + \dots + (-1)^n F(a_1, \dots a_n), \tag{3.18}$$

unde $p_{ij\dots k} = F(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $c_i = a_i, c_j = a_j, \dots, c_k = a_k$, restul valorilor fiind $c_s = b_s$. Să exemplificăm în cazul $n = 2$. Pentru aceasta evaluăm

$$P(\{a_1 \leqslant X_1 < b_1, a_2 \leqslant X_2 < b_2\}) = P(\{X_1 < b_1, X_2 < b_2\}) -$$

$$-P(\{X_1 < a_1, X_2 < b_2\}) - P(\{X_1 < b_1, X_2 < a_2\}) + P(\{X_1 < a_1, X_2 < a_2\}) =$$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2),$$

a căror justificare este uşor de constatat în Figura 3.6.

Vom da un exemplu de funcţie F care satisface proprietăţile 1-4, dar nu este funcţie de repartiţie.

Exemplul 3.3.1 Să definim

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x_1 \leqslant 0 \text{ sau } x_1 + x_2 \leqslant 1 \text{ sau } x_2 \leqslant 0, \\ 1, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Aceasta va satisface condiţiile 1-4, dar dacă în formula precedentă luăm $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, b_1 = b_2 = 1$, găsim $F(1,1) - F(1, \frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2}, 1) + F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < 0$, care nu poate fi probabilitatea unui eveniment.

Pentru ca F, o funcţie ce satisface condiţiile 1-4, să fie funcţie de repartiţie mai trebuie îndeplinită condiţia $\forall a_i, b_i \in I\!R, \quad i = 1, \dots n$, membrul al doilea al formulei (3.18) este pozitiv.

La fel ca în cazul unidimensional, vom considera o clasă de variabile aleatoare pentru care există o funcţie pozitivă şi continuă cu excepţia unui număr finit de puncte $f(x_1, \dots, x_n)$, astfel ca

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n.$$

Vom numi această funcţie *densitate de probabilitate n-dimensională.* Dacă funcţia de repartiţie este continuă, variabila aleatoare va fi numită *continuă* . Densitatea de probabilitate se caracterizează prin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = 1. \tag{3.19}$$

Mai observăm că în punctele de continuitate ale funcţiei f are loc

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Dacă variabila aleatoare n-dimensională are densitate de probabilitate, probabilitatea din formula (3.18) poate fi calculată astfel:

$$P(\{a_1 \leqslant X_1 < b_1, \dots, a_n \leqslant X_n < b_n\}) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n.$$

În general, dacă $D \subset I\!R^n$ este un domeniu arbitrar, probabilitatea ca variabila aleatoare n-dimensională să ia valori în D este dată de formula

$$P(\{(x_1,\ldots,x_n)\in D\}) = \int\ldots\int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

Definiţia 3.3.3 *Funcţiile definite de formulele*

$$F_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} du \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_{i-1},u,x_{i+1},\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

se numesc funcţii marginale de repartiţie *, iar derivatele lor, date de formulele*

$$f_{X_i}(x_i) = F'_{X_i}(x_i) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n$$

se numesc densităţi marginale de probabilitate.

În particular pentru $n = 2$, alegând notaţii mai convenabile, densităţile marginale şi funcţiile marginale de repartiţie, sunt date de formulele:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dv,\quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)du,$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv,\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)du.$$

Fie $(X_1,\ldots,X_n)$ o variabilă aleatoare continuă. Variabilele aleatoare X_i sunt *independente* dacă şi numai dacă $\forall x_{i_1},\ldots,x_{i_k} \in I\!R,\ \ k = 1,\ldots,n$, are loc

$$P(\{X_{i_1} < x_{i_1},\ldots,X_{i_k} < x_{i_k}\}) = P(\{X_{i_1} < x_{i_1}\})\ldots P(\{X_{i_k} < x_{i_k}\}).$$

Această afirmaţie se deduce imediat din Propoziţia 3.1.3. În particular pentru $n = 2$, condiţia revine la

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Dacă variabilele considerate au densităţi de probabilitate, condiţia de mai sus este echivalentă cu

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y). \tag{3.20}$$

Exemplul 3.3.2 Repartiţia uniformă n-dimensională are densitatea de probabilitate dată de

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} k, & \text{dacă } (x_1,\ldots,x_n)\in D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$

unde D este un domeniu din $I\!R^n$, mărginit, iar k este astfel ales încât să aibă loc (3.19), deci

$$k = \frac{1}{\int\ldots\int_D dx_1\ldots dx_n}.$$

În particular pentru $n = 2$ şi $D = [a, b] \times [c, d]$, avem

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & \text{dacă } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să determinăm densităţile marginale.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv = \int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)} dv = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \forall x \in [a, b] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

şi analog,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c}, & \forall x \in [c, d], \\ \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Deci variabilele aleatoare marginale X şi Y cu densităţile marginale f_X, respectiv f_Y sunt independente, deoarece este satisfăcută (3.20).

Transformări de variabile aleatoare.

Fie $(X_1, \ldots, X_n)$ o variabilă aleatoare pe câmpul borelian $\{E, K, P\}$. Considerăm o transformare inversabilă între două domenii $\Delta, D \subset I\!R^n$, deci o funcţie vectorială de mai multe variabile

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(y_1, \ldots, y_n) \\ \quad\vdots \\ x_n = \phi_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in D, \quad (y_1, \ldots, y_n) \in \Delta$$

şi care satisface condiţiile:

1. $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sunt funcţii reale de clasă $C^1(\Delta)$;

2. $J(y_1, \ldots, y_n) = \dfrac{D(\phi_1, \ldots, \phi_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_n}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial \phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$ pe Δ.

În aceste condiţii, compunerea dintre $(X_1, \ldots, X_n)$ şi inversa transformării este tot o variabilă aleatoare, pe care o notăm $(Y_1, \ldots, Y_n)$. Presupunem că ambele variabile aleatoare au densităţi de probabilitate, pe care le notăm$f_{X_1 \ldots X_n}$ şi $f_{Y_1 \ldots Y_n}$. Folosind schimbarea de variabile în integrala multiplă, obţinem

$$\int \cdots \int_D f_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int \cdots \int_\Delta f_{X_1 \ldots X_n}(\phi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \phi_n(y_1, \ldots, y_n)) |J(y_1, \ldots, y_n)| dy_1 \ldots dy_n, \qquad (3.21)$$

care se interpretează astfel: probabilitatea ca variabila aleatoare $(X_1, \ldots, X_n)$ să ia valori în domeniul D, coincide cu probabilitatea ca $(Y_1, \ldots, Y_n)$ să ia valori în domeniul Δ. Atunci densitatea de probabilitate pentru variabila aleatoare $(Y_1, \ldots, Y_n)$ este dată de

$$f_{Y_1 \ldots Y_n}(y_1, \ldots, y_n) =$$
$$= f_{X_1 \ldots X_n}(\phi_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, \phi_n(y_1, \ldots, y_n)|J(y_1, \ldots, y_n)|. \tag{3.22}$$

Caz particular. Pentru $n = 1$, considerăm transformarea $x = \phi(y)$ unde ϕ este de clasă $C^1(D), D \subset I\!R$, inversabilă. Formula precedentă devine

$$f_Y(y) = f_X(\phi(y)) \left| \frac{d\phi}{dy} \right|. \tag{3.23}$$

Exemplul 3.3.3 Dacă X este o variabilă aleatoare şi facem transformarea $Y = aX + b$, unde $a, b \in I\!R,\ a \neq 0$, atunci folosind relaţia (3.23) găsim

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}.$$

În particular, dacă $X : N(m, \sigma^2)$, să determinăm densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = aX + b,\ a \neq 0$, înlocuind mai sus

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{|a|} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2a^2\sigma^2}}.$$

deci Y este o variabilă repartizată $N(am+b, a^2\sigma^2)$. Deci prin transformarea liniară a unei variabile aleatoare normale se obţine tot o variabilă normală. De aici se deduce imediat că, dacă $X : N(m, \sigma^2)$

$$\frac{X-m}{\sigma} : N(0,1).$$

Uneori este comod să găsim densitatea de probabilitate calculând funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare obţinute prin transformare, ca în următorul exemplu.

Exemplul 3.3.4 Dacă $X : N(m, \sigma^2)$ să determinăm densitatea variabilei aleatoare e^X. Notăm $Y = e^X$. Pentru $y > 0$, să calculăm

$$F_Y = P(\{Y < y\}) = P(\{e^X < y\}) = P(\{X < \ln y\}).$$

Prin derivare găsim

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(\ln y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Această repartiţie se numeşte **lognormală**.

Exemplul 3.3.5 Erorile de măsurare pentru două mărimi sunt X, Y independente şi repartizate uniform pe $(0,1)$. Să determinăm densităţile marginale ale sumei şi diferenţei erorilor. Vom particulariza cazul general (făcând o schimbare convenabilă de notaţii suma şi diferenţa erorilor sunt variabile aleatoare definite prin

$$U = X + Y$$

$$V = X - Y.$$

Inversa transformării este

$$x = \phi_1(u,v) = \frac{1}{2}(u+v)$$

$$y = \phi_2(u,v) = \frac{1}{2}(u-v)$$

iar iacobianul $J(u,v) = -\frac{1}{2}$; reprezentăm în Figurile 3.7 şi 3.8 domeniile D şi Δ. Din ipoteza de independenţă rezultă

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Deci $f_{UV}(u,v) = 1|-1/2|$, dacă $(u,v) \in \Delta$ şi 0 în rest. Densitatea marginală este dată de

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)dv.$$

Pentru calculul ei distingem cazurile

1. $0 \leqslant u \leqslant 1, f_U(u) = \int_{-u}^{u} \frac{dv}{2} = u;$

2. $1 \leqslant u \leqslant 2, f_U(u) = \int_{u-2}^{2-u} \frac{dv}{2} = 2-u.$

Deci

$$f_U(u) = \begin{cases} u, & \text{dacă } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ 2-u, & \text{dacă } 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

şi analog

$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{v+1}{2}, & \text{dacă } -1 \leqslant v \leqslant 0, \\ \dfrac{-v+1}{2}, & \text{dacă } 0 \leqslant v \leqslant 1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Exemplul 3.3.6 Un dispozitiv are două componete ale căror durate de viaţă sunt variabile aleatoare independente, notate X şi Y, cu densităţile

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \geqslant 1, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & \text{dacă } y \geqslant 1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

O măsură pentru calitatea funcţionării dispozitivului este $U = \sqrt{XY}$. Să determinăm densitatea de probabilitate a lui U. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} U = \sqrt{XY} \\ V = X \end{cases}$$

definită pe domeniul D cu inversa

$$\begin{cases} x = v \\ y = \frac{u^2}{v} \end{cases}$$

definită pe domeniul Δ şi având iacobianul $J(u,v) = -\dfrac{2u}{v}$. Din condiţia de independenţă

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2y^2}, & \text{dacă } x, y \geqslant 1, \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases}$$

iar

$$f_{UV}(u,v) = \frac{2}{u^3 v}.$$

Reprezentăm grafic cele două domenii.

Densitatea marginală este

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)dv = \int_1^{u^2} \frac{2}{u^3 v} dv = 4\frac{\ln u}{u^3}, \quad \forall u \geqslant 1.$$

Exemplul 3.3.7 (Limitatorul). Fie funcţia

$$g(x) = \begin{cases} -b, & \text{dacă } x \leqslant -b, \\ x, & \text{dacă } -b < x \leqslant b, \\ b, & \text{dacă } x > b. \end{cases}$$

Să determinăm funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare $Y = g(X)$, unde X este o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie F_X.

Dacă $y \leqslant -b$ evenimentul $g(X) < y$ nu se realizează pentru nici un x, deci $F_Y(y) = 0$.

Dacă $-b < y \leqslant b$, $\quad F_Y(y) = F_X(y)$.

Dacă $b < y$, $\quad F_Y(y) = 1$.

Exemplul 3.3.8 Repartiţia normală n-dimensională. Considerăm funcţia definită de

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-1/2(X-M)^t A(X-M)}, \tag{3.24}$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ este o matrice simetrică, deci $A = A^t$ şi care are proprietatea că forma pătratică

$$(X - M)^t A(X - M) = \sum_i \sum_j a_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)$$

este pozitiv definită. X şi M reprezintă:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

Presupunem pentru început că $m_1 = \ldots = m_n = 0$. Reamintim că în acest caz există o matrice ortogonală H (cu proprietatea $HH^t = I_n$, unde I_n este matricea unitate), pentru care forma pătratică are forma canonică

$$X^t AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

unde λ_i sunt valorile proprii ale lui A, care în cazul nostru sunt strict pozitive. După cum ştim $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$. Să verificăm satisfacerea condiţiei (3.19). Facem schimbarea de variabile $X = HY$ şi observăm că determinantul funcţional

$$\left| \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} \right| = \det H = 1$$

deoarece H este o matrice ortogonală. Avem atunci

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2} \det H dy_1 \ldots dy_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} dy_i.$$

Facem în ultima integrală substituţia $y_i = \frac{z_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ şi găsim

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} dy_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{z_i^2}{2}} dz_i = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Efectuând calculele obţinem

$$\prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \ldots l_n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

Dacă revenim la cazul general, prin substituţia $X - M = Y$, situaţia se reduce la satisfacerea condiţiei $m_1 = \ldots = m_n = 0$.

Semnificaţia coeficienţilor matricei A şi unele proprietăţi vor fi studiate în Capitolul 3.5. Vom da cazuri particulare ale legii normale.

Variabila aleatoare normală bidimensională.

Dacă variabilele marginale $X,\ Y$ sunt independente, atunci densitatea de probabilitate bidimensională are o formă foarte simplă

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}. \tag{3.25}$$

Dacă $D = [a,b] \times [c,d] \subset I\!\!R^2$, atunci

$$P(\{(X,Y) \in D\}) = \left(\Phi(\frac{b-m_x}{\sigma_x}) - \Phi(\frac{a-m_x}{\sigma_x})\right)\left(\Phi(\frac{d-m_y}{\sigma_y}) - \Phi(\frac{c-m_y}{\sigma_y})\right).$$

Să considerăm un domeniu D_k delimitat de *elipsa de egală probabilitate*, adică elipsa în ale cărei puncte densitatea de probabilitate este constanta $k > 0$. Elipsa are ecuaţia $\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = k^2$. Observăm că semiaxele elipsei sunt $a = k\sigma_x,\ b = k\sigma_y$. Atunci are loc

$$P(\{(X,Y) \in D_k\}) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}} \tag{3.26}$$

Aceasta rezultă imediat dacă facem în integrala dublă schimbarea de variabile de forma

$$\begin{cases} x - m_x = \rho\sigma_x \cos\theta \\ y - m_y = \rho\sigma_y \sin\theta \end{cases} \quad 0 < \rho \leqslant k,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

După efectuarea calculelor obţinem

$$\int\int_{D_k} f(x,y)dxdy = \frac{\sigma_x\sigma_y}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho,$$

de unde (3.26).

Exemplul 3.3.9 Repartiția Rayleigh Dacă $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ şi $m_x = m_y = 0$, distanţa R a unui "punct aleator" (X,Y) la origine are repartiţia Rayleigh. Înlocuind în (3.25), densitatea de probabilitate are forma

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}}.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad r > 0 \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

şi densitatea de probabilitate a variabilei (R, Θ) este

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}},$$

iar densitatea marginală a variabilei R este

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Variabila aleatoare normală tridimensională.

Dacă variabilele marginale X, Y, Z sunt independente, densitatea de probabilitate este

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}+\frac{(z-m_z)^2}{\sigma_z^2}\right)}.$$

La fel ca în cazul bidimensional probabilitatea ca variabila (X,Y,Z) să ia valori într-un elipsoid D_k, pe a cărui suprafaţă densitatea ia valori constante, *elipsoid de egală probabilitate*, este

$$P(\{(X,Y,Z) \in D_K\}) = 2\Phi(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} k e^{-\frac{k^2}{2}}.$$

Elipsoidul are semiaxele $a = k\sigma_x,\ b = k\sigma_y\ c = k\sigma_z.$

Operaţii cu variabile aleatoare continue.

Vom deduce formule de calcul pentru densităţile de probabilitate ale sumei, diferenţei, produsului şi câtului de variabile aleatoare continue. Vom alege de fiecare dată transformări convenabile şi vom utiliza formula (3.22).

Suma de variabile aleatoare continue.

Fie (X,Y) o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate f_{XY}. Considerăm transformarea:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x \end{cases},$$

care admite inversa

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - v \end{cases}$$

şi iacobianul $J(u,v) = -1$. Din (3.22) deducem că densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare (U,V) este $f_{UV}(u,v) = f_{XY}(v, u-v)|-1|$. Luând densitatea marginală, găsim

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, u-v)dv. \tag{3.27}$$

Dacă X şi Y sunt independente $f_{XY}(v,u-v) = f_X(v)f_Y(u-v)$ şi densitatea sumei este produsul de convoluţie al densităţilor f_X, f_Y, adică

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v)f_Y(u-v)dv. \tag{3.28}$$

Exemplul 3.3.10 Să determinăm suma de variabile aleatoare independente repartizate uniform pe intervalul (a,b). Densitatea de probabilitate are valoarea $\frac{1}{b-a}$ pe intervalul $[a,b]$ şi 0 în rest. Vom folosi (3.28).

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(x-y)dy = \frac{1}{b-a}\int_{x-a}^{x-b} f(x-y)dy.$$

In ultima integrală facem schimbarea de variabilă $x - y = t$, şi obţinem

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{b-a}\int_{x-b}^{x-a} f(t)dt.$$

Comparînd $x - a$ şi $x - b$ cu a şi b obţinem

$$f_{X+Y} = \begin{cases} 0, & x < 2a \\ \frac{x-2a}{(b-a)^2}, & 2a \geqslant x < a+b \\ \frac{2b-x}{(b-a)^2}, & a+b \leqslant x < 2b \\ 0, & x \geqslant 2b \end{cases}.$$

Graficul densităţii de probabilitate este dat de Figura 3.11.

Diferenţă de variabile aleatoare continue.

Considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x \end{cases}$$

cu inversa

$$\begin{cases} x = v \\ y = v - u \end{cases},$$

iar $f_{UV}(u,v) = f_{XY}(v, v-u)$. Densitatea marginală a diferenţei este

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, v-u)dv,$$

iar în caz de independenţă

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_Y(v-u)dv. \tag{3.29}$$

Produs de variabile aleatoare.

Considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x \end{cases},$$

cu inversa

$$\begin{cases} x = v \\ y = \frac{u}{v} \end{cases}$$

şi iacobianul $J(u,v) = \frac{1}{v}$. Densitatea de probabilitate este

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(v, \frac{u}{v})\frac{1}{|v|}.$$

Deducem

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, \frac{u}{v})\frac{dv}{|v|},$$

iar în caz de independenţă

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_V\left(\frac{u}{v}\right)\frac{dv}{|v|}. \tag{3.30}$$

Câtul a două variabile aleatoare continue.

Considerăm transformarea

$$\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ v = y \end{cases}$$

cu inversa

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$$

şi iacobianul $J(u,v) = v$. Se obţine densitatea de probabilitate

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(uv, v)|v|dv,$$

care în caz de independenţă devine

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(uv) f_Y(v)|v|dv. \tag{3.31}$$

Probabilităţi şi funcţii de repartiţie condiţionate.

Dacă X, Y sunt variabile aleatoare discrete, noţiunile de probabilităţi condiţionate au fost definite prin în Capitolul 2.4. Fie X este o variabilă aleatoare discretă, iar Y o variabilă aleatoare continuă; definim funcţia de repartiţie a lui Y condiţionată de X prin

$$F_Y(y|x_k) = \frac{P(\{Y < y, X = x_k\})}{P(\{X = x_k\})}$$

dacă $P(\{X = x_k\}) > 0$. Dacă funcţia de repartiţie condiţionată este derivabilă, definim densitatea de probabilitate prin formula

$$f_Y(y|x_k) = \frac{d}{dy} F_Y(y|x_k).$$

Pentru $A \in K$, are loc

$$P(\{Y \in A | X = x_k\}) = \int_A f_Y(y|x_k) dy.$$

În cazul în care X, Y sunt independente, se obţin imediat

$$F_Y(y|x) = F_Y(y); \quad f_Y(y|x) = f_Y(y).$$

Exemplul 3.3.11 Într-un canal de comunicaţie intrarea este o variabilă X, care poate lua valorile $+1$ volt , -1 volt cu aceeaşi probabilitate. Ieşirea $Y = X + N$ unde N este "zgomotul" ce poate fi considerat o variabilă aleatoare repartizată uniform pe intervalul $(-2, 2)$. Să determinăm probabilitatea $P(\{X = 1, Y < 0\})$.

Folosind formula probabilităţilor condiţionate, avem

$$P(\{X = 1, Y < y\}) = P(\{Y < y\}|\{X = 1\})P(\{X = 1\}) = F_Y(y|1)P(\{X = 1\}).$$

Funcţia de repartiţie a lui Y condiţionată de $\{X = 1\}$ este

$$F_Y(y|1) = P(\{N + 1 < y\}) = P(\{N < y - 1\}) = F_N(y - 1),$$

unde F_N este funcţia de repartiţie a variabilei uniforme, care are expresia

$$F_N(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2, \\ \frac{x+2}{4}, & -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

Deci $F_Y(y|1) = P(\{Y < y|X = 1\}) = \frac{y+1}{4}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 3$, iar probabilitatea căutată este astfel $P(\{X = 1\}|\{Y < 0)\}) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Fie (X, Y) o variabilă aleatoare bidimensională continuă cu densitatea de probabilitate f_{XY} continuă şi $f_X \neq 0$ densitatea marginală continuă. Definim funcţia de repartiţie a variabilei Y condiţionată de $\{X = x\}$ prin limita următoare, dacă există

$$F_Y(y|x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(\{Y < y, x \leqslant X < x + h\})}{P(\{x \leqslant X < x + h\})} = \frac{\int_{-\infty}^{y} \int_{x}^{x+h} f_{XY}(x', y')dx'dy'}{\int_{x}^{x+h} f_X(x')dx'}.$$

Folosind teoreme de medie pentru cele două integrale, găsim

$$F_Y(y|x) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x, y')dy'}{f_X(x)}.$$

Prin derivare obţinem densitatea de probabilitate

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}. \tag{3.32}$$

Dacă X, Y sunt independente, au loc

$$f_Y(y|x) = f_Y(y), \quad F_Y(y|x) = F_Y(y).$$

Analog se deduce

$$F_X(x|y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x', y)dx'}{f_Y(y)}.$$

Prin derivare obţinem densitatea de probabilitate condiţionată

$$f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Exemplul 3.3.12 Fie variabila aleatoare (X, Y) cu densitatea

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-y}, & 0 \leqslant y \leqslant x < +\infty, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să determinăm densităţile de probabilitate condiţionată. Pentru început aflăm densităţile marginale

$$f_X(x) = \int_0^x 2e^{-x}e^{-y}dy = 2e^{-x}(1-e^{-x}), \quad 0 \leqslant x < +\infty$$

şi

$$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} 2e^{-x}e^{-y}dx = 2e^{-2y}, \quad 0 \leqslant y < +\infty.$$

Folosind formulele precedente, avem

$$f_X(x|y) = \frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-2y}} = e^{-(x-y)}, \quad y \leqslant x$$

şi

$$f_Y(y|x) = \frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-x}(1-e^{-x})} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-x}}, \quad 0 \leqslant y \leqslant x.$$

Formula probabilităţii totale şi formula lui Bayes se pot generaliza şi în acest caz. Relaţia (3.32) poate fi scrisă sub forma

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y|x)f_X(x)$$

şi aplicând definiţia probabilităţii marginale, obţinem **formula probabilităţii totale:**

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y|x)f_X(x)dx$$

şi **formula lui Bayes**

$$f_Y(y|x) = \frac{f_X(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}.$$

În practică intervin şi alte tipuri de probabilităţi condiţionate. Lăsăm ca exerciţii, stabilirea următoarelor formule. Dacă evenimentul ce condiţionează este $\{X < x\}$ şi $F_X(x) \neq 0$ avem

$$F_Y(y|\{X < x\}) = \frac{F_{XY}(x,y)}{F_X(x)},$$

$$f_Y(y|\{X < x\}) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x', y)dx'}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x', y')dx'dy'}.$$

Dacă evenimentul care condiţionează este $\{x_1 \leqslant X < x_2\}$ şi $F_X(x_1) \neq F_X(x_2)$ avem

$$F_Y(y|\{x_1 \leqslant X < x_2\}) = \frac{F_{XY}(x_2,y) - F_{XY}(x_1,y)}{F_X(x_2) - F_X(x_1)},$$

$$f_Y(y|\{x_1 \leqslant X < x_2\}) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f_{XY}(x,y)dx}{F_X(x_2) - F_X(x_1)}.$$

3.4 Valori caracteristice ale unei variabile aleatoare

Medii şi momente.

Definiţia 3.4.1 *Dacă X este o variabilă aleatoare având funcţia de repartiţie $F(x)$, numim* medie, *numărul dat de*

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x). \tag{3.33}$$

Integrala din (3.33) este de tip Riemann-Stieltjes (vezi Anexa 1). Dacă X are densitate de probabilitate continuă $f(x)$, atunci integrala din definiţie se reduce la o integrală Riemann şi avem

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{3.34}$$

Să observăm că integrala improprie din definiţie s-ar putea să nu fie convergentă. De exemplu, variabila aleatoare repartizată Cauchy, cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ x \in I\!R$$

nu are medie, deoarece integrala (3.34) este divergentă. Reamintim că o variabilă aleatoare este continuă, dacă are funcţia de repartiţie continuă. Mai general, dacă F are $c_1, \ldots, c_n$ puncte de discontinuitate (evident de prima speţă), media se obţine exprimând integrala Stieltjes (vezi Anexa 1) ca o sumă dintre o integrală Riemann şi o sumă de salturi.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \sum_{k=1}^{n} c_k (F(c_k+0) - F(c_k-0)).$$

Exemplul 3.4.1 Să determinăm media variabilei aleatoare repartizate normal $N(m,\sigma^2)$. Facem în integrală schimbarea de variabilă $y = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ şi obţinem

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (m + \sqrt{2}\sigma y) e^{-y^2} \sqrt{2}\sigma dy =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \int_{\infty}^{\infty} (-\frac{1}{2} e^{-y^2})' dy = m,$$

deoarece ultima integrală este 0.

Dacă X are media m şi admite densitate de probabilitate nesimetrică, cele două arii determinate de $x = m$ pot fi neegale. Astfel dacă X reprezintă o caracteristică numerică studiată într-o colectivitate statistică, are înţeles afirmaţia că majoritatea indivizilor au caracteristica X mai mică decât media.

Regăsim şi în cazul continuu aceleaşi proprietăţi pentru medie, pe care le-am întâlnit în cazul discret.

Propoziţia 3.4.1 *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare ce au medii, atunci $X+Y$ are medie şi*

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y]. \tag{3.35}$$

Demonstraţie. Vom demonstra această propoziţie în cazul particular în care X şi Y au densităţi de probabilitate f_X, respectiv f_Y. Folosind densitatea de probabilitate a sumei, (3.27), avem

$$M[X+Y]=\int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(y,x-y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}xf_{XY}(y,x-y)dx.$$

Ultima egalitate se datorează posibilităţii de a schimba ordinea de integrare. În ultima integrală facem schimbarea de variabilă $x-y=z$ şi obţinem

$$M[X+Y]=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}(y+z)f_{XY}(y,z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}ydy\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(y,z)dz+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}zdz\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(y,z)dy=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy+\int_{-\infty}^{\infty}zf_X(z)dz=M[X]+M[Y].$$

Proprietatea se poate extinde pentru un număr finit de variabile aleatoare.

Propoziţia 3.4.2 *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente ce admit medii, atunci produsul XY are medie şi*

$$M[XY]=M[X]M[Y]. \tag{3.36}$$

Demonstraţie. Vom folosi formula care defineşte densitatea produsului de variabile aleatoare (3.30), presupunând că X şi Y au densităţi de probabilitate f_X, f_Y.

$$M[XY])=\int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{-\infty}^{\infty}f_X(y)f_Y\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{|y|}.$$

În ultima integrală facem schimbarea $x=yz$ şi inversăm ordinea de integrare. Găsim

$$M[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(y)f_Y\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dx}{|y|}=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}yzf_X(y)f_Y(z)dz=$$

$$=M[X]M[Y].$$

■

Dacă o variabilă aleatoare nu are medie, alte caracteristici numerice care studiază "tendinţa centrală" sunt *modul* şi *mediana.* Mediana a fost definită de (3.4) şi ea există pentru orice variabilă aleatoare. De exemplu, în cazul repartiţiei Cauchy, datorită simetriei faţa de axa Oy, mediana este $m_e=0$, iar în cazul repartiţei normale este m.

Definiţia 3.4.2 *m_o se numeşte* modul *pentru variabila aleatoare X cu densitatea de probabilitate $f(x)$, dacă este un punct de maxim pentru $f(x)$.*

O variabilă aleatoare poate fi *unimodală, bimodală* etc, după cum densitatea de probabilitate are unul sau mai multe puncte de maxim local.

Media unei transformări de variabilă aleatoare.

Dacă X este o variabilă aleatoare, iar $y = \Psi(x)$ este o tansformare de clasă C^1, inversabilă, media variabilei $Y = \Psi(X)$ dacă există, este dată de formula

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) f_X(x) dx. \tag{3.37}$$

Aceasta rezultă dacă facem în integrala care defineşte media

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy$$

schimbarea de variabilă şi aplicăm relaţia (3.23), unde Φ este transformarea inversă.

Exemplul 3.4.2 Dacă $X : U(0, 2\pi)$, să determinăm media variabilei $Y = \cos X$. Aplicând formula (3.37), avem

$$M[Y] = \int_{0}^{2\pi} \cos x \frac{1}{2\pi} dx = 0.$$

Reamintim că dacă X este o variabilă aleatoare, numărul $\nu_k = M[X^k], k \in I\!N$ (dacă există), se numeşte *moment iniţial de ordin k*. Momentul iniţial de ordin k se calculează după formula

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \tag{3.38}$$

dacă variabila aleatoare X are densitatea de probabilitate f. Această formulă rezultă dacă aplicăm (3.37) variabilei $\Psi(x) = X^k$. Observăm că $\nu_1 = M[X]$.

Momentul centrat de ordin k se defineşte prin $\mu_k = M[(X - M[X])^k]$. Dacă X are densitatea de probabilitate f, atunci folosind din nou (3.37), momentul centrat are expresia

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \nu_1)^k f(x) dx.$$

Între momentele iniţiale şi cele centrate au loc relaţiile următoare, care se demonstrează fără dificultate:

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \nu_{k-i} \nu_1^i; \quad \nu_k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \mu_{k-i} \nu_1^i. \tag{3.39}$$

Reamintim că μ_2 se numeşte *dispersie* sau *varianţă* şi se notează $D^2[X]$, iar $D[X]$ se numeşte *abaterea medie pătratică.* Aceste caracteristici au aceleaşi proprietăţi ca în cazul discret, demonstraţia lor nefiind dificilă.

Exemplul 3.4.3 Să calculăm momentele centrate ale repartiţiei normale $N(m, \sigma^2)$. Avem

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

în care facem schimbarea de variabilă $x - m = \sqrt{2}\sigma y$, deci

$$\mu_k = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^k e^{-y^2} dy.$$

Dacă integrăm prin părţi obţinem

$$\mu_k = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2} e^{-y^2} y^{k-1} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{k-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-2} e^{-y^2} dy \right) =$$

$$= \frac{(k-1)(\sigma\sqrt{2})^k}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-2} e^{-y^2} dy = (k-1)\sigma^2 \mu_{k-2},$$

deoarece prima expresie se anulează la limită. Deducem din relaţia de recurenţă precedentă

$$\begin{cases} \mu_{2k+1} & = 0 \\ \mu_{2k} & = (k-1)!!\sigma^{2k} \end{cases}.$$

În particular, pentru $k = 2$, obţinem $D^2[X] = \sigma^2$. Regăsim, şi în cazul variabilelor aleatoare continue, inegalitatea lui Cebâşev, cu ajutorul căreia putem aprecia gradul de împrăştiere a valorilor variabilei; inegalitatea va constitui un important instrument de lucru în cazul *Legii numerelor mari* (Capitolul 4).

Propoziţia 3.4.3 *(*Inegalitatea lui Cebâşev*) Dacă variabila aleatoare X este continuă cu media m şi dispersia σ^2, atunci are loc*

$$P(\{|X - m| < \epsilon\}) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}, \quad \forall \epsilon > 0, \tag{3.40}$$

sau echivalent

$$P(\{|X - m| \geqslant \epsilon\}) < \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Demonstraţie. Dispersia este dată de

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{m-\epsilon} (x-m)^2 f(x)dx + \int_{m-\epsilon}^{m+\epsilon} (x-m)^2 f(x)dx +$$

$$+ \int_{m+\epsilon}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx.$$

Din faptul că $x \notin (m - \epsilon, m + \epsilon)$, rezultă $(x - m)^2 \geqslant \epsilon^2$ şi dispersia poate fi minorată prin

$$\sigma^2 \geqslant \epsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{m-\epsilon} f(x)dx + \int_{m+\epsilon}^{\infty} f(x)dx \right) =$$

$$= \epsilon^2 \left(1 - \int_{m-\epsilon}^{m+\epsilon} f(x)dx\right),$$

deoarece $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Ultima paranteză se poate scrie

$$\sigma^2 \geqslant \epsilon^2(1 - P(\{|X - m| < \epsilon\})),$$

care este echivalentă cu relaţia (3.40). ■.

Exemplul 3.4.4 Timpul mediu de răspuns al unui calculator este de 15 secunde pentru o anumită operaţie, cu abaterea medie pătratică 3 secunde. Estimaţi probabilitatea ca timpul de răspuns să se abată cu mai puţin de 5 secunde faţă de medie. Vom folosi inegalitatea lui Cebâşev. Avem

$$P(\{|X - 15| \geqslant 5\}) \leqslant \frac{9}{25} = 0,36.$$

Reamintim că *momentul absolut* de ordin k pentru o variabilă aleatoare se defineşte prin formula $\beta_k = M[|X|^k]$. Dacă X are densitatea de probabilitate f, atunci momentul absolut este dat de formula

$$\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f_X(x)dx.$$

Observăm că existenţa momentelor absolute de ordin k, antrenează existenţa momentelor iniţiale de ordin k, deoarece

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x) < \infty,$$

iar din presupunerea făcută, a doua integrală este convergentă. De asemenea, dacă există moment absolut de ordin k, există momente absolute de orice ordin $l \leqslant k$. Într-adevăr,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^l f(x)dx = \int_{|x|\leqslant 1} |x|^l f(x)dx + \int_{|x|>1} |x|^l f(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|x|\leqslant 1} |x|^l f(x)dx + \int_{|x|>1} |x|^k f(x)dx.$$

Prima integrală este finită datorită domeniului de integrare, iar a doua din presupunerea făcută.

Inegalitatea lui Cebâşev poate fi generalizată pentru momente absolute de orice ordin $k \in \mathbb{N}$, în sensul următor: dacă variabila aleatoare X are moment absolut de ordin k, atunci

$$P(\{|X - m| < \epsilon\}) \geqslant 1 - \frac{M[|X - m|^k]}{\epsilon^k}, \forall \epsilon > 0, \tag{3.41}$$

sau echivalent

$$P(\{|X - m| \geqslant \epsilon\}) < \frac{M[|X - m|^k]}{\epsilon^k}.$$

Propoziţia 3.4.4 *(Inegalitatea lui Schwarz) Dacă variabilele aleatoare X şi Y au momente absolute de ordin 2, atunci XY are moment absolut de ordin 2 şi*

$$\beta_2(XY) \leqslant \sqrt{\beta_2(x)\beta_2(y)}. \tag{3.42}$$

Demonstraţie. Pentru orice $\lambda \in I\!R$, inegalitatea $M[(|X| + \lambda|Y|)^2] \geqslant 0$ este evidentă. Efectuând calculele avem

$$M[(X + \lambda Y)^2] = \lambda^2 M[X^2] + 2\lambda M[|XY|] + M[Y^2] \geqslant 0,$$

şi folosind semnul funcţiei de gradul al doilea, inegalitatea precedentă este adevărată dacă discriminantul $\Delta \leqslant 0$, ceea ce revine la

$$M[|XY|^2] \leqslant M[X^2]M[Y^2].$$

De unde, după extragerea radicalului găsim (3.42). ■

Obserăm că, în aceleaşi ipoteze, rezultă şi

$$|M[XY]| \leqslant \sqrt{M[X^2]M[Y^2]}.$$

Definiţia 3.4.3 *Fie X şi Y două variabile aleatoare pentru care există momentele absolute de ordinul al doilea. Numărul definit de*

$$Cov[X, Y] = M\left[(X - M[X])(Y - M[Y])\right]$$

se numeşte covarianţa variabilelor X şi Y *, iar numărul dat de formula*

$$\rho[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{D[X]D[Y]}, \tag{3.43}$$

dacă $D[X] \neq 0$, $D[Y] \neq 0$, se numeşte coeficient de corelaţie. *Variabilele aleatoare X şi Y se numesc* necorelate *dacă*

$$M[XY] = M[X]M[Y].$$

Observăm că dacă X şi Y sunt independente, din Propoziţia 3.4.2 rezultă că sunt necorelate. Se pot da exemple care să ilustreze că reciproca afirmaţiei precedente nu este adevărată, adică pot exista variabile aleatoare necorelate fără ca ele să fie independente. Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare continue care admit momente absolute de ordinul al doilea, dispersia sumei se calculează după formula

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2Cov[X, Y].$$

Această formulă se generalizează uşor în cazul a n variabile. Din formula (3.43) rezultă imediat că

$$\rho[X, X] = 1,$$

iar

$$\rho[X, Y] = 0 \text{ dacă şi numai dacă } X \text{ şi } Y \text{ sunt necorelate.}$$

Propoziţia 3.4.5 *Pentru oricare două variabile X şi Y, care admit coeficient de corelaţie, este satisfăcută inegalitatea*

$$|\rho[X,Y]| \leqslant 1. \tag{3.44}$$

Demonstraţie. Considerăm variabilele aleatoare $X' = \frac{X-M[X]}{D[X]}, Y' = \frac{Y-M[Y]}{D[Y]}$ şi le aplicăm inegalitatea lui Schwarz. Rezultă

$$|M[X'Y']| \leqslant \sqrt{M[X'^2]M[Y'^2]}.$$

Rămâne să observăm că

$$\rho[X,Y] = M[X',Y'] = \frac{M\left[(X-M(X))(Y-M(Y))\right]}{D[X]D[Y]}$$

şi că $M[X'^2] = \frac{D^2[X]}{D^2[X]} = 1$. După efectuarea înlocuirilor, se obţine formula(3.44). ■

Propoziţia 3.4.6 *Pentru oricare două variabile aleatoare, ce admit coeficient de corelaţie, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. $|\rho[X,Y]| = 1$*;*

2. există $a, b \in I\!R$, nesimultan nule şi $c \in I\!R$, astfel încât relaţia $aX + bY + c = 0$ are loc aproape sigur (adică $P(\{aX + bY + c = 0\}) = 1$).

Vom schiţa demonstraţia. Într-un sens afirmaţia este imediată; anume dacă are loc $aX+bY+c = 0$ aproape sigur şi presupunem $b \neq 0$, găsim $m, n \in I\!R$ astfel ca $Y = mX+n$. Observăm imediat că

$$\rho[X,Y] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } m > 0 \\ -1, & \text{dacă } m < 0. \end{cases}$$

Reciproc, dacă $X' = \frac{X-M[X]}{D[X]}, Y' = \frac{Y-M[Y]}{D[Y]}$, atunci sunt evidente următoarele relaţii $\rho[X,Y] = M[X'Y'] = 1$ şi $M[(X' \pm Y')^2] = 0$. Într-un cadru mai general decât cel prezentat în acest curs (vezi [22]), se poate arăta că din ultima egalitate rezultă că $X' \pm Y' = 0$ aproape sigur, deci:

$$\frac{X-M[X]}{D[X]} = \pm\frac{Y-M[Y]}{D[Y]}.$$

Schimbând eventual notaţiile, din ultima egalitate deducem *2.*

Noţiunea de moment poate fi extinsă la variabile aleatoare multidimensionale.

Definiţia 3.4.4 *Dacă $(X_1,\ldots,X_n)$ este o variabilă aleatoare n-dimensională cu densitatea de probabilitate $f_{X_1\ldots X_n}$, numim* moment iniţial de ordinul $(k_1\ldots k_n)$ *numărul*

$$\nu_{k_1\ldots k_n} = M[X_1^{k_1},\ldots,X_n^{k_n}] = \int\ldots\int_{I\!R^n} x_1^{k_1}\ldots,x_n^{k_n} f_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

Definiţia 3.4.5 *Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare n-dimensionale, matricea de elemente*

$$Cov[X_iY_j], i = 1,\ldots n, j = 1,\ldots n.$$

se numeşte matricea de covarianţă.

Medii condiţionate.

Dacă X este o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate f şi $A \in K$, definim media lui X condiţionată de A

$$M[x|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|A)dx \tag{3.45}$$

unde $f(x|A)$ este densitatea de probabilitate a lui X condiţionată de A.

Exemplul 3.4.5 Fie T variabila aleatoare care dă timpul de funcţionare până la prima defectare. Să determinăm media lui T, condiţionată de faptul că sistemul a funcţionat până la momentul t. Folosind un raţionament asemănător cu cel pentru deducerea formulei (3.15), deducem

$$f(x|\{T \leqslant t\}) = \frac{f(x)}{\int_t^{+\infty} f(x)dx}, \quad x \leqslant t.$$

Atunci cu ajutorul relaţiei (3.45), obţinem

$$M[T|\{T \leqslant t\}] = \frac{\int_t^{+\infty} xf(x)dx}{\int_t^{+\infty} f(x)dx}.$$

Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare cu densităţile de probabilitate $f_X,\ f_Y$ definim *mediile condiţionate* prin formulele

$$M[Y|x] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y|x)dy$$

$$M[X|y] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x|y)dx,$$

dacă există. Se poate arata că mediile condiţionate sunt de fapt variabile aleatoare, care admit la rândul lor medie, ce se exprimă prin **formulele integrale ale mediei totale**.

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} M[Y|x]f_X(x)dx$$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} M[X|y]f_Y(y)dy.$$

Să deducem prima egalitate.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M[Y|x]f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y|x)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ydy \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y|x)f_X(x)dx.$$

Dacă folosim (3.32) şi densitatea de probabilitate marginală, deducem că ultima formulă reprezintă chiar $M[Y]$.

Exemplul 3.4.6 Numărul de ”clienţi” care ajunge la ”o staţie de deservire” într-un interval de timp t este o variabilă aleatoare Poisson cu parametrul βt. Timpul necesar deservirii fiecăruia este o variabilă exponenţială, T, cu parametrul α, deci are densitatea de probabilitate

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & \text{dacă } t \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

Să determinăm repartiţia variabilei N, care dă numărul de clienţi ce ajung în timpul T al deservirii unui client, media şi dispersia, în ipoteza că sosirile clienţilor sunt independente de timpul de deservire. Aplicăm formula probabilităţii totale

$$P(\{N = k\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{N = k\}|\{T = t\}) f_T(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{(\beta t)^k}{k!} e^{-\beta t} \alpha e^{-\alpha t} dt =$$

$$= \frac{\alpha\beta^k}{k!} \int_0^{+\infty} t^k e^{-(\alpha+\beta)t} dt.$$

Făcând schimbarea de variabile $r = (\alpha + \beta)t$ şirul de egalităţi poate fi continuat,

$$\frac{\alpha\beta^k}{k!(\alpha+\beta)^{k+1}} \int_0^{+\infty} r^k e^{-r} dr = \frac{\alpha\beta^k}{(\alpha+\beta)^{k+1}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^k.$$

Deci N este o variabilă aleatoare geometrică. Dacă se produce $\{T = t\}$, variabila condiţionată este Poisson, cu paramertul βt. Rezultă că media şi dispersia au aceeaşi valoare şi anume βt. Pentru calculul mediei lui N putem folosi formula mediei totale

$$M[N] = \int_0^{+\infty} M[N|t] f_T(t)dt = \int_0^{+\infty} \beta t f_T(t)dt = \beta M[T].$$

$$M[N^2] = \int_0^{+\infty} M[N^2|t] f_T(t)dt = \int_0^{+\infty} (\beta t + \beta^2 t^2) f_T(t)dt = \beta M[T] + \beta^2 M[T^2].$$

Să mai observăm că T fiind variabilă exponenţială $M[T] = \frac{1}{\alpha}$, $D^2[T] = \frac{1}{\alpha^2}$. Deci $M[N] = \frac{\beta}{\alpha}$ $D^2[N] = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta}{\alpha}$.

3.5 Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare

În acest capitol am văzut că densitatea de probabilitate a sumei de variabile aleatoare independente este produsul de convoluţie al densităţilor de probabilitate, dar analitic este uneori dificil de aplicat acest rezultat. Un instrument mai comod este funcţia caracteristică, pe care o vom utiliza şi la determinarea momentelor unei variabile aleatoare.

Fie X o variabilă aleatoare continuă având densitatea de probabilitate f_X.

Definiţia 3.5.1 *Numim* funcţie caracteristică *asociată variabilei aleatoare* X*, funcţia* $\varphi : I\!R \to \mathbf{C}$*, definită prin*

$$\varphi(t) = M[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx.$$

Tinând cont că $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ cu $y \in I\!R$, e^{itX} reprezintă o variabilă aleatoare bidimensională cu componentele $(\cos tX, \sin tX)$. Deoarece $|e^{itx}| = 1$, funcţia caracteristică există pentru orice variabilă aleatoare ce admite densitate de probabilitate. Vom mai nota $\varphi_X(t)$, pentru a pune în evidenţă cărei variabile aleatoare i se asociază funcţia caracteristică. Definiţia funcţiei caracteristice reprezintă transformata Fourier aplicată funcţiei absolut integrabile f_X; o formulă de inversare va fi formulată în prezenţa condiţiei suplimentare de absolută integrabilitate a funcţiei caracteristice, în Teorema 5.3 din acest capitol.

Propoziţia 3.5.1 *Următoarele afirmaţii sunt adevărate :*
1. $\varphi(0) = 1$;
2. $|\varphi(t)| \leqslant 1$;
3. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$;
4. $\varphi(t)$ *este uniform continuă pe* $I\!R$.

Demonstraţie.
1. şi *2.* sunt evidente.
3. Să calculăm

$$\varphi(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{itx}} f(x)dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx} = \overline{\varphi(t)}.$$

4. Pentru a arăta că φ este uniform continuă, să calculăm:

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(e^{ihx} - 1)f(x)dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1| f(x)dx.$$

Deoarece $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, pentru orice $\epsilon > 0$, există A suficient de mare astfel încât

$$\int_{|x| \geqslant A} f(x)dx < \epsilon/4,$$

iar din continuitatea exponenţialei există h suficient de mic încât $|e^{ihx} - 1| < \epsilon/2$. Atunci putem scrie

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leqslant \int_{-A}^{A} |e^{ihx} - 1| f(x)dx + \int_{|x| \geqslant A} f(x)dx < \epsilon.$$

■

Observaţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente : o funcţie caracteristică este reală; $f(-x) = f(x)$; $F(x) = 1 - F(-x)$, unde F şi f sunt funcţiile de repartiţie, respectiv de densitate de probabilitate. Egalităţile dintre funcţiile precedente au loc în cazul cel mai general cu excepţia unei mulţimi de probabilitate nulă (deci aproape sigur). Demonstrăm afirmaţia în cazul în care f este continuă. Arătăm, mai întâi, că ultimele două afirmaţii sunt echivalente. Avem

$$F'(x) = (1 - F(-x))' \Rightarrow f(x) = f(-x).$$

Reciproc, dacă $f(x) = f(-x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \textstyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1 - \int_{x}^{\infty} f(t)dt = 1 + \int_{-x}^{-\infty} f(-u)du = \\ &= 1 - \textstyle\int_{-\infty}^{-x} f(u)du = 1 - F(-x). \end{aligned}$$

În ce priveşte echivalenţa primelor două relaţii se observă imediat că

$$f(x) = f(-x) \Longrightarrow \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)dx = \varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}.$$

Se poate arăta, în prezenţa unor rezultate suplimentare şi care nu sunt cuprinse în acest curs, că din faptul că φ este reală, rezultă $f(x) = f(-x)$.

Propoziţia 3.5.2 *1. Dacă $Y = aX + b$, cu $a, b \in I\!R$, atunci $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$;*
2. Dacă X şi Y sunt independente, atunci $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.

Demonstraţie.
1. $\varphi_Y(t) = M[e^{ity}] = M\left[e^{it(aX+b)}\right] = e^{itb}M\left[e^{itaX}\right] = e^{itb}\varphi_X(at)$.
2. $\varphi_{X+Y}(t) = M\left(e^{it(X+Y)}\right) = M\left(e^{itX}e^{itY}\right) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$. ∎

Cunoaşterea funcţiei caracteristice permite calculul momentelor iniţiale, după cum rezultă din următoarea teoremă.

Teorema 3.5.1 *Dacă o variabilă aleatoare admite moment absolut de ordin n, $n \in I\!N$, atunci funcţia caracteristică este de n ori derivabilă şi are loc :*

$$\nu_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}, k = 1, \ldots n.$$

Demonstraţie. Derivăm formal de k ori sub integrala cu parametru din definiţia funcţiei caracteristice. Găsim după majorări

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} f(x)dx,$$

iar

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} f(x)dx \right| \leqslant \beta_k \leqslant \beta_n, \forall k = 1, \ldots n,$$

deci derivatele există. Dacă în formula de derivare luăm $t = 0$, găsim

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \nu_k.$$

∎

Teorema 3.5.2 *Dacă X este o variabilă aleatoare continuă care admite momente absolute de orice ordin, atunci funcţia caracteristică admite dezvoltare în serie de puteri de forma*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \nu_k.$$

Demonstraţie. Înlocuim în definiţia funcţiei caracteristice dezvoltatea în serie a exponenţialei şi găsim

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi(x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{itx}{1!} + \ldots + \frac{(itx)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(itx)^n}{n!} e^{ix\theta}\right) f(x) dx =$$

$$= \nu_0 + \frac{it}{1!}\nu_1 + \ldots + \frac{(it)^{n-1}}{(n-1)!}\nu_{n-1} + R_n.$$

Majorând restul obţinem

$$|R_n| = \left| \frac{(it)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{it\theta} f(x) dx \right| \leqslant \frac{|t|^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n f(x) dx < \infty.$$

Se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, deci afirmaţia este adevărată. ■

Teorema 3.5.3 *(*Formula de inversiune*) Fie X o variabilă aleatoare având φ şi F, respectiv, funcţia caracteristică şi funcţia de repartiţie. Dacă x_1, x_2, cu $x_1 < x_2$ sunt puncte de continuitate ale lui F, atunci are loc*

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt. \tag{3.46}$$

Demonstraţie. Observăm că pentru $c \in I\!R$, funcţia de sub integrală este continuă, dacă o definim în $t = 0$ prin

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} = (x_2 - x_1)\varphi(0).$$

De asemenea, funcţia are un majorant integrabil, deci integrala

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt$$

este convergentă. Considerăm cazul particular în care X are densitate de probabilitate f şi înlocuim în integrala precedentă pe φ

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} e^{itz} f(z) dz dt.$$

Prin schimbarea ordinii de integrare (posibilă deoarece în raport cu z avem absolută convergenţă, iar în raport cu t integrarea se face pe interval finit), găsim

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-c}^{c} \frac{e^{it(z-x_1)} - e^{it(z-x_2)}}{it} dt \right) f(z) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-c}^{0} \frac{e^{it(z-x_1)} - e^{it(z-x_2)}}{it} dt + \int_{0}^{c} \frac{e^{it(z-x_1)} - e^{it(z-x_2)}}{it} dt \right) f(z)dz.$$

În prima integrală făcând schimbarea $t \to -t$, obţinem

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{0}^{c} \frac{-e^{-it(z-x_1)} + e^{-it(z-x_2)} + e^{it(z-x_1)} - e^{it(z-x_2)}}{it} dt \right) f(z)dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{c} \left(\frac{\sin t(z-x_)}{t} - \frac{\sin t(z-x_2}{t} \right) dt f(z)dz$$

Alegem un $\delta > 0$ astfel încât $x_1 + \delta < x_2 - \delta$ şi descompunem integrala pe domeniile :

$$(-\infty, x_1 - \delta), (x_1 - \delta, x_1 + \delta), (x_1 + \delta, x_2 - \delta), (x_2 - \delta, x_2 + \delta), (x_2 + \delta, \infty).$$

Reamintim formula lui Dirichlet [10] :

$$\lim_{c \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{c} \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \begin{cases} 1/2, & \text{dacă } \alpha > 0 \\ -1/2, & \text{dacă } \alpha < 0 \end{cases}$$

unde limita este uniformă în raport cu α. Pe intervalul $(-\infty, x_1 - \delta)$, avem $z - x_2 < z - x_1 < -\delta < 0$, deci

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{c} \left(\frac{\sin t(z-x_1)}{t} - \frac{\sin t(z-x_2)}{t} \right) dt \to 0, \text{ dacă } c \to \infty$$

şi cum integrala este uniform mărginită în raport cu c, putem comuta integrala cu limita şi obţinem

$$\int_{-\infty}^{x_1-\delta} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{c} \left(\frac{\sin t(z-x_1)}{t} - \frac{\sin t(z-x_2)}{t} \right) dt f(z)dz \to 0, \text{ dacă } c \to \infty \tag{3.47}$$

şi analog

$$\int_{x_2+\delta}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{c} \left(\frac{\sin t(z-x_1)}{t} - \frac{\sin t(z-x_2)}{t} \right) dt f(z)dz \to 0, \text{ pentru } c \to \infty. \tag{3.48}$$

Pe intervalul $(x_1 + \delta, x_2 - \delta)$ folosind formula lui Dirichlet şi convergenţa uniformă în raport cu α, deducem

$$\lim_{c \to \infty} \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{c} \left(\frac{\sin t(z-x_1)}{t} - \frac{\sin t(z-x_2)}{t} \right) dt f(z)dz =$$

$$= \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \left(\frac{\sin t(z-x_1)}{t} - \frac{\sin t(z-x_2)}{t} \right) dt f(z)dz = F(x_2 - \delta) - F(x_1 + \delta). \tag{3.49}$$

Pe intervalele $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ şi $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$, integralele pot fi majorate respectiv, dacă folosim din nou formula lui Dirichlet, cu

$$\begin{aligned} &2(F(x_1 + \delta) - F(x_1 - \delta)), \\ &2(F(x_2 + \delta) - F(x_2 - \delta)). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Pentru orice $\epsilon > 0$, din (3.47) şi (3.48) există c_ϵ astfel încât $\forall c > c_\epsilon$ are loc

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^c\left(\frac{\sin t(z-x_1)}{t}-\frac{\sin t(z-x_2)}{t}\right)\right)f(z)dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \epsilon/3+\epsilon/3+F(x_2-\delta)-F(x_1+\delta)/3+2(F(x_1+\delta)-$$

$$-F(x_1-\delta)+F(x_2+\delta)-F(x_2-\delta)).$$

În inegalitatea de mai sus au intervenit şi relaţiile (3.49) şi (3.50). Deoarece x_1 şi x_2 sunt puncte de continuitate pentru F

$$\lim_{\delta\to 0}(F(x_1+\delta)-F(x_1-\delta)) = \lim_{\delta\to 0}(F(x_2+\delta)-F(x_2-\delta)) = 0.$$

Trecând apoi la limită pentru $c \to \infty$, găsim formula (3.46). ■

Această teoremă ne permite să stabilim o corespondenţă biunivocă între funcţiile de repartiţie şi cele caracteristice, după cum rezultă din următoarea teoremă.

Teorema 3.5.4 *(*Teorema de unicitate*) Funcţia de repartiţie este unic determinată de funcţia sa caracteristică.*

Demonstraţie. În teorema precedentă facem pe x_1 să tindă la ∞, x_1 rămânând punct de continuitate. Deoarece $\lim\limits_{x_1\to-\infty} F(x_1) = 0$, găsim

$$F(x_2) = \lim_{x_1\to-\infty}\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$$

$\forall x_1, x_2$ puncte de continuitate ale lui F. ■

Teorema 3.5.5 *Dacă funcţia caracteristică este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, adică*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt < \infty,$$

atunci F are derivată simetrică pe $\mathbb{R}$, deci $\forall x \in \mathbb{R}$, există

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = F'_s(x),$$

şi

$$F'_s(x) = f(x)$$

în orice punct de continuitate a lui f.

Demonstraţie. Pentru orice două puncte de continuitate ale lui F, are loc din formula de inversiune

$$F(x_2)-F(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt,$$

deoarece folosind ipoteza, funcţia din membrul al doilea este integrabilă. Presupunând că $x_1 = x - h, x_2 = x + h$, atunci :

$$F(x+h) - F(x-h) = 2h\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin th}{th} e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

Deoarece

$$\left|\frac{\sin th}{th}\right| \leqslant 1,$$

avem

$$\left|e^{-itx}\frac{\sin th}{th}\varphi(t)\right| \leqslant |\varphi(t)|, \quad \forall h \in I\!R,$$

şi

$$\lim_{h\to 0} e^{-itx}\frac{\sin th}{th} = e^{-itx}.$$

Într-un cadru mult mai general decât cel prezent, se poate demonstra un criteriu de convergenţă dominată a lui Lebesgue [22], în baza căruia putem trece la limită sub integrală şi găsim

$$F_s' = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt. \tag{3.51}$$

Să demonstrăm că F_s' este continuă; într-adevăr

$$|F_s'(x+h) - F_s(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\left|\sin\frac{th}{2}\right| |\varphi(t)|dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant A}\left|\sin\frac{th}{2}\right| |\varphi(t)|dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|>A}\left|\sin\frac{th}{2}\right| |\varphi(t)|dt.$$

Pentru $\epsilon > 0$ putem alege A suficient de mare încât

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|>A} |\varphi(t)dt < \epsilon/2.$$

Prima integrală poate fi făcută $< \epsilon/2$, dacă alegem h suficient de mic, deci

$$|F_s'(x+h) - F_s'(x)| < \epsilon,$$

de unde rezultă continuitatea. Reamintim că în orice punct de continuitate pentru f, are loc $F'(x) = f(x)$, de unde afirmaţia teoremei, deoarece derivata simetrică coincide cu derivata. ■

Relaţia (3.51) constituie formula de inversare, care exprimă densitatea de probabilitate cu ajutorul funcţiei caracteristice. Vom demonstra în continuare teorema lui Bochner, care dă o descriere completă a funcţiilor caracteristice, acest rezultat fiindu-ne necesar la studiul proceselor stochastice staţionare.

Definiţia 3.5.2 *Funcţia* $\varphi : I\!R \to I\!R$, *continuă, se numeşte* pozitiv definită *pe* $I\!R$, *dacă* $\forall t_1, \dots, t_n \in I\!R$ *şi* $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}$, $\forall n \in I\!N$, *are loc*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geqslant 0.$$

Câteva proprietăţi decurg imediat din definiţie.

1. $\varphi(0) \geqslant 0$.

Într-adevăr pentru $n = 1, t_1 = 0, z_1 = 1$, afirmaţia este evidentă.

2. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}, \quad \forall t \in I\!R$.

Aceasta rezultă dacă luăm $n = 2,\ t_1 = 0,\ t_2 = t,\ z_1,\ z_2 \in \mathbf{C}$.

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \varphi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} = \varphi(0-0) z_1 \overline{z_1} + \varphi(0-t) z_1 \overline{z_2} + \varphi(t-0) z_2 \overline{z_1} + \varphi(t-t) z_2 \overline{z_2} =$$

$$= \varphi(0)(|z_1|^2 + |z_2|^2) + \varphi(-t) z_1 \overline{z_2} + \varphi(t) \overline{z_1} z_2,$$

şi deci $\varphi(-t) z_1 \overline{z_2} + \varphi(t) \overline{z_1} z_2 \in I\!R$. Dacă luăm

$$\begin{array}{lcl} \varphi(-t) = \alpha_1 + i\beta_1 & , & \varphi(t) = \alpha_2 + i\beta_2, \\ z_1 \overline{z_2} = \gamma + i\delta & , & \overline{z_1} z_2 = \gamma - i\delta, \end{array}$$

rezultă $\alpha_1\delta + \beta_1\gamma - \alpha_2\delta + \beta_2\gamma = 0, \forall \gamma, \delta$, deci obţinem $\alpha_1 = \alpha_2$ şi $\beta_1 + \beta_2 = 0$.

3. $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0)$.

În inegalitatea de la punctul precedent, fie $z_1 = \varphi(t), z_2 = -|\varphi(t)|$, atunci deducem

$$2\varphi(0)|\varphi(t)|^2 - |\varphi(t)|^2|\varphi(t)| - |\varphi(t)|^2|\varphi(t)| \geqslant 0,$$

De unde, dacă $|\varphi(t)| \neq 0$ rezultă $\varphi(0) \geqslant |\varphi(t)|$, iar dacă $|\varphi(t)| = 0$, din prima proprietate deducem din nou afirmaţia.

Teorema 3.5.6 *(*Bochner-Hincin*) O funcţie* $\varphi(t)$ *continuă, cu condiţia* $\varphi(0) = 1$ *este o funcţie caracteristică, dacă şi numai dacă este pozitiv definită.*

Demonstraţie. Dacă φ este funcţie caracteristică pentru o variabilă aleatoare cu densitatea de probabilitate f, are loc

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Să demonstrăm că este pozitiv definită. Avem

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t_k - t_j)} f(x) dx z_k \overline{z_j} \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e^{ix(t_k - t_j)} f(x) z_k \overline{z_j} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{it_k x} z_k \right) \left(\sum_{j=1}^{n} e^{-it_j x} \overline{z_j} \right) f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} e^{it_k x} z_k \right|^2 f(x)dx \geqslant 0.$$

Reciproc. Pentru $Z > 0$, considerăm funcţia

$$p_Z(x) = \frac{1}{2\pi Z} \int_0^Z \int_0^Z \varphi(u-v) e^{-iux} e^{ivx} du dv.$$

Dacă scriem integrala dublă ca limită a sumelor Riemann corespunzătoare şi folosim pozitiva definire a lui φ, rezultă că $p_Z \geqslant 0$. Facem în integrala dublă schimbarea de variabile

$$\begin{cases} t = u - v \\ z = u \end{cases}$$

cu inversa

$$\begin{cases} u = z \\ v = z - t. \end{cases}$$

Domeniul $[0, Z] \times [0, Z]$ din Figura 3.12 este dus în domeniul reprezentat în figură 3.13. Se obţine imediat

$$p_Z(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-Z}^{Z} \left(1 - \frac{|t|}{Z}\right) \varphi(t) e^{-itx} dt.$$

Să demonstrăm că $p_Z(x)$ este integrabilă pe R. Vom reface în acest scop o demonstraţie datorată lui Yu Linnik, pe acest caz particular. Notăm

$$G(x) = \int_{-x}^{x} p_Z(z) dz$$

şi înlocuim p_Z, după care schimbăm ordinea de integrare. Obţinem

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{x} \int_{-Z}^{Z} \left(1 - \frac{|t|}{Z}\right) \varphi(t) e^{-itz} dt dz.$$

Întroducând funcţia

$$p(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|t|}{Z}\right) \varphi(t), & |t| \leqslant Z \\ 0, & |t| > Z \end{cases},$$

deducem

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-Z}^{Z} p(t) \int_{-x}^{x} e^{-itx} dz dt = \frac{1}{\pi} \int_{-Z}^{Z} p(t) \frac{\sin tx}{t} dt.$$

Datorită faptului că $p_Z \geqslant 0$, rezultă că G este nedescrescătoare. Pentru asigurarea integrabilităţii este suficient să arătăm că G este mărginită. Întroducem funcţia auxiliară

$$G_1(u) = \frac{1}{u} \int_u^{2u} G(x) dx$$

şi observăm că

$$G_1(u) \geqslant \frac{G(u)}{u} \int_u^{2u} dx = G(u).$$

Deoarece G_1 majorează G, pentru mărginirea lui G este suficient să arătăm marginirea lui G_1. Să calculăm

$$G_1(u) = \frac{1}{\pi u}\int_u^{2u}\int_{-Z}^{Z} p(t)\frac{\sin tx}{t}dtdx = \frac{1}{\pi u}\int_{-Z}^{Z} p(t)\frac{-\cos tx}{t^2}\Big|_u^{2u}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi u}\int_{-Z}^{Z} p(t)\frac{1}{t^2}(\cos ut - cos2ut)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi u}\int_{-Z}^{Z} p(t)\frac{(\sin ut)^2}{t^2}dt - \frac{2}{\pi u}\int_{-Z}^{Z} p(t)\frac{(\sin \frac{ut}{2})^2}{t^2}dt.$$

Fie $M = \sup|p(t)|$. Atunci

$$\frac{2}{\pi u}\int_{-Z}^{Z} p(t)\frac{(\sin ut)^2}{t^2}dt \leqslant 2M\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sin ut)^2}{u^2t^2}udt,$$

iar

$$\frac{2}{u}\int_{-Z}^{Z} p(t)\frac{(\sin \frac{ut}{2})^2}{t^2}dt \leqslant \frac{M}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sin v)^2}{v^2}dv.$$

Integralele din membrul al doilea sunt convergente. Deci mărginirea este asigurată. Se constată că

$$p_Z(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-itx}dt$$

adică $\frac{1}{2\pi}p_Z$ este transformata Fourier a funcţiei p. Folosind formula de inversiune pentru funcţia p continuă (vezi [10]), rezultă că

$$\frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{|t|}{Z}\right)\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_Z(x)e^{itx}dx, \forall|t| \leqslant Z.$$

În particular, pentru $t = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_Z(x)dx = \varphi(0) = 1,$$

iar funcţia p_Z fiind continuă şi integrabilă pe $\mathbb{R}$, constituie o densitate de probabilitate pentru o variabilă aleatoare, care are funcţia caracteristică asociată p. Observăm că pentru $Z \to \infty$, funcţia $p(t)$ converge uniform la φ, pe fiecare interval mărginit. De aici, folosind convergenţa în repartiţie Capitolul 4, rezultă că φ este o funcţie caracteristică. ■

3.6 Variabile aleatoare continue clasice şi legăturile dintre ele

Vom enumera principalele repartiţii continue şi vom studia proprietăţile lor. Un instrument important pentru aceasta este funcţia caracteristică, ce a fost studiată anterior. Pentru început vom calcula funcţia caracteristică a repartiţiei normale $N(m, \sigma^2)$, dată de (3.11).

Propoziţia 3.6.1 *Funcţia caracteristică a repartiţiei normale este*

$$\varphi(t) = e^{imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \tag{3.52}$$

.

Demonstraţie. Reamintim că densitatea de probabilitate a repartiţiei normale este

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

pe care o înlocuim în expresia funcţiei caracteristice. Facem schimbarea de variabilă $x - m = \sqrt{2}\sigma y$ şi obţinem

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itm - y^2 + ity\sqrt{2}\sigma} dy =$$

$$= \frac{e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-\frac{t\sigma}{2}i)^2} dy = e^{imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

■

În particular, dacă X este o variabilă repartizată $N(0,1)$, funcţia sa caracteristică este

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Folosind Propoziţia 3.5.2 determinăm comod repartiţia sumei de variabile aleatoare normale.

Teorema 3.6.1 *Dacă $X_k : N(m_k, \sigma_k^2), k = 1, \ldots n$, sunt variabile aleatoare independente, atunci variabila aleatoare $X_1 + \ldots + X_n$ este repartizată $N(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2)$.*

Demonstraţie. Funcţia caracteristică a sumei este produsul funcţiilor caracteristice

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{im_k t - \frac{t^2\sigma_k^2}{2}} =$$

$$= e^{it\sum_{k=1}^{n}\left(m_k - \frac{t^2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}{2}\right)},$$

care corespunde în mod unic variabilei repartizate $N(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2)$. ■

Propoziţia 3.6.2 *Dacă $X_k, k = 1, \ldots n$, sunt variabile aleatoare independente repartizate normal $N(m, \sigma^2)$, atunci media lor aritmetică*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

este repartizată $N(m, \dfrac{\sigma^2}{n})$.

Demonstraţie. Din Teorema 3.6.1 suma este repartizată $N(nm, n\sigma^2)$. Să calculăm funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare notată

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Avem

$$F_{\overline{X}} = P(\{\overline{X} < x\}) = P(\{\sum_{k=1}^{n} X_k < nx\}).$$

Prin derivare găsim densitatea de probabilitate

$$f_{\overline{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(nx-nm)^2}{2n\sigma^2}} n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}},$$

de unde afirmaţia propoziţiei. ■

Să definim funcţia caracteristică în cazul multidimensional. Dacă variabila aleatoare n-dimensională are densitatea de probabilitate $f_{X_1 \ldots X_n}$, atunci funcţia caracteristică este

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \int \ldots \int_{I\!R^n} e^{-i\sum_{k=1}^{n} t_k x_k} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Relaţia poate fi pusă sub forma

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \int \ldots \int_{I\!R^n} e^{-iT^t X} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$. Să determinăm funcţia caracteristică pentru variabila aleatoare normală n-dimensională, mai întâi pentru cazul $m_1 = \ldots = m_n = 0$. Reamintim că densitatea de probabilitate este dată de (3.24)

$$f(x) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}X^t A X}.$$

Dacă înlocuim în expresia funcţiei caracteristice, obţinem

$$\varphi(t_1,\ldots,t_n)=\frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{2}{n}}}\int\ldots\int_{I\!R^n}e^{iT^tX-\frac{1}{2}X^tAX}dx_1\ldots dx_n.$$

Facem transformarea ortogonală $X=HY$, pentru care forma pătratică de la exponent are forma canonică $\sum_{j=1} l_j y_j^2$, cu $l_j>0$ (aceste transformări au fost explicate în detaliu la repartiţia normală n-dimensională în 3.3). Notăm $U=H^{-1}T=H^tT$. Atunci, se observă că

$$T^tX=(HU)^tHY=U^tH^tHY=U^tY.$$

Cu aceasta funcţia caracteristică devine

$$\varphi(t_1,\ldots,t_n)=\frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{2}{n}}}\int\int_{I\!R^n}e^{iU^tY-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}l_jy_j^2}dy_1\ldots y_n=$$

$$=\frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{2}{n}}}\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu_jy_j-\frac{1}{2}\lambda_jy_j^2}dy_j.$$

Ultima integrală înmulţită cu $\frac{|l_j|}{\sqrt{2\pi}}$ reprezintă funcţia caracteristică pentru o variabilă aleatoare repartizată $N(0,\frac{1}{l_j})$, deci folosind (3.52), avem

$$\varphi(t_1,\ldots,t_n)=e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j^2}{l_j}}.$$

Reamintim că matricea formei pătratice se modifică după legea

$$H^tAH=\begin{pmatrix} l_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & l_2 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & l_n\end{pmatrix},$$

unde $l_j>0$, sunt valorile proprii ale matricei A. Prin inversare găsim

$$H^{-1}A^{-1}H=\begin{pmatrix} \frac{1}{l_1} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \frac{1}{l_2} & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{l_n}\end{pmatrix},$$

deci în ultima integrală recunoaştem că exponentul este următorul produs de matrice

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j^2}{l_j}=U^t(H^{-1}A^{-1}H)U=$$

$$=T^tH(H^{-1}A^{-1}H)H^{-1}T=T^tA^{-1}T$$

(s-a folosit faptul că $U=H^tT$). Găsim forma finală

$$\varphi(t_1,\ldots,t_n)=e^{-\frac{1}{2}T^tA^{-1}T}.$$

Se demonstrează că dacă vectorul $M \neq 0$, atunci printr-o schimbare de variabile, funcţia caracteristică devine

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = e^{iT^t M - \frac{1}{2}T^t A^{-1} T}.$$

Generalizând la cazul n-dimensional Teorema 3.5.1, se poate demonstra că derivatele parţiale ale lui φ în raport cu t_i generează momentele variabilelor aleatoare marginale. Astfel

$$M[X_h] = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_h}\right)(0, \dots, 0),$$

$$M[X_h X_k] = \frac{1}{i^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_h \partial t_k}\right)(0, \dots, 0).$$

Să determinăm momentele variabilei aleatoare normale n-dimensionale, mai întâi în cazul $m_1 = \ldots = m_n = 0$.

$$M[X_h] = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_h}\right)(0, \dots, 0) = \left(ie^{-\frac{1}{2}T^t A^{-1} T}\sum_{k=1}^{n} a_{hk}^{-1} t_k\right)(0, \dots, 0) = 0,$$

$$M[X_h X_k] = \frac{1}{i^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_h \partial t_k}\right)(0, \dots, 0) =$$

$$= \left(i^2 e^{-\frac{1}{2}T^t A^{-1} T}\sum_{h=1}^{n} a_{hk}^{-1} t_h \sum_{k=1}^{n} a_{hk}^{-1} t_k + a_{hk}^{-1} e^{-\frac{1}{2}T^t A^{-1} T}\right)(0, \dots, 0) = a_{hk}^{-1}.$$

Dacă $(m_1, \dots, m_n) \neq (0, \dots, 0)$,

$$M[X_h] = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_h}\right)(0, \dots, 0) = \left(m_h + i\sum_{k=1}^{n} a_{hk}^{-1} t_k\right)\varphi(t_1, \dots, t_n)(0, \dots, 0) = m_h,$$

$$M[X_h X_k] = \frac{1}{i^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_h \partial t_k}\right)(0, \dots, 0) =$$

$$= \left((m_h + i\sum_{k=1}^{n} a_{hk}^{-1} t_k)(m_k + i\sum_{h=1}^{n} a_{hk}^{-1} t_k)\right)\varphi(t_1, \dots, t_n) +$$

$$+ a_{hk}^{-1}\varphi(t_1, \dots, t_n)(0, \dots, 0) = m_h m_k + a_{hk}^{-1}.$$

Se obţin imediat egalităţile

$$M[(X_h - m_h)] = 0,$$

$$M[(X_h - m_h)^2] = M[(X_h^2)] - m_h^2 = a_{hh}^{-1},$$

$$Cov[X_h, X_k] = M[(X_h - m_h)(X_k - m_k)] = M[X_h X_k] - m_h m_k = a_{hk}^{-1}.$$

Deci A^{-1} este matricea de covarianţă a variabilei normale n-dimensionale. Pe baza acestei observaţii în cazul 2-dimensional, repartiţia normală poate fi scrisă sub o formă mai comodă. Notăm:

$$\begin{array}{ll} M[X_1] = m_1, & M[X_2] = m_2 \\ D^2(X_1) = \sigma_1^2, & D^2(X_2) = \sigma_2^2 \end{array}$$

$$Cov[X_1, X_2] = \rho\sigma_1\sigma_2$$

şi găsim

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2, \end{pmatrix}$$

de unde, prin inversare, găsim

$$A = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

De aceea densitatea de probabilitate se poate scrie:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}. \quad (3.53)$$

Exemplul 3.6.1 Variabila aleatoare (X, Y, Z) este normal repartizată şi are matricea de covarianţă

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să determinăm densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare marginale (X, Z). Observăm pentru aceasta că matricea de covarianţă este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci $m_X = m_Z = 0, \rho = 0,3, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ şi înlocuind în (3.53), obţinem densitatea de probabilitate căutată.

Vom enunţa un rezultat care stabileşte legătura dintre convergenţa funcţiilor caracteristice şi cele de repartiţie, de mare utilitate practică. Demonstraţia acestui rezultat se găseşte de exemplu în [10] şi este făcută într-un cadru mai general.

Teorema 3.6.2 *Dacă şirul de funcţii caracteristice φ_n converge pentru orice t la $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, atunci şirul funcţiilor de repartiţie corespunzătoare F_n satisface:*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Reamintim că $\frac{1}{2} + \Phi(x)$ este funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare normale normate.

Repartiţia χ^2 ("hi pătrat"). Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sigma > 0$$

este o densitate de probabilitate. Prin substituţia $y = \frac{x}{2\sigma^2}$ integrala $\int_0^\infty f(x)dx$ se reduce la $2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})$. Pentru funcţia Γ şi proprietăţile ei, vezi Anexa 3. Această repartiţie a fost descoperită de Helmert şi pusă în valoare de Pearson. n se numeşte *număr de grade de libertate.* Vom nota $X : H(n, \sigma)$. Funcţia caracteristică este dată de

$$\varphi(t) = (1 - 2\sigma^2 ti)^{-\frac{n}{2}}.$$

Într-adevăr, calculăm integrala $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx$ şi obţinem

$$\varphi(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty e^{itx-\frac{x}{2\sigma^2}}x^{\frac{n}{2}-1}dx =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}(1-2\sigma^2 ti)}dx.$$

În ultima integrală facem schimbarea $\frac{x}{2\sigma^2}(1 - 2\sigma^2 ti) = y$; atunci integrala precedentă devine

$$\left(\frac{2\sigma^2}{1 - 2\sigma^2 ti}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y}dy = \frac{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n}{(1 - 2\sigma^2 ti)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(\frac{n}{2}),$$

de unde se obţine imediat afirmaţia. Pentru calculul momentelor, vom deriva funcţia caracteristică. Avem

$$\varphi'(t) = in\sigma^2(1 - 2\sigma^2 ti)^{-\frac{n}{2}-1},$$

$$\varphi''(t) = i^2 n(n+2)\sigma^4(1 - 2\sigma^2 ti)^{-\frac{n}{2}-2},$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k n(n+2)\dots(n+2k-2)\sigma^{2k}(1 - 2\sigma^2 ti)^{-\frac{n}{2}-k}.$$

Folosind apoi Teorema 3.5.1, găsim

$$\nu_1 = \frac{1}{i}\varphi'(0) = n\sigma^2,$$

$$\nu_2 = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = n(n+2)\sigma^4,$$

$$\vdots$$

$$\nu_k = \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0) = n(n+2)\dots(n+2k-2)\sigma^{2k}.$$

Următoarea teoremă este un important instrument de lucru în statistica matematică.

Teorema 3.6.3 *Dacă $X_1, \dots, X_n$ sunt variabile aleatoare independente, repartizate $N(0, \sigma^2)$, atunci variabila aleatoare*

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

este repartizată $H(n, \sigma)$.

Demonstrație . Să determinăm pentru început funcţia caracteristică a variabilei aleatoare $X_k^2,\ k = 1\dots n$. Pentru aceasta să-i determinăm mai întâi densitatea de probabilitate. Avem

$$F_{X_k^2}(x) = P(\{X_k^2 < x\}) = P(\{-\sqrt{x} < X_k < \sqrt{x}\}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy, \quad x \geqslant 0.$$

Prin derivare, găsim

$$f_{X_k^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x \geqslant 0,$$

care se constată a fi o densitate de probabilitate pentru o variabilă aleatoare $H(1,\sigma)$, deci are funcţia caracteristică dată de

$$\varphi_k(t) = (1 - 2\sigma^2 ti)^{-\frac{1}{2}}.$$

Folosind acum faptul că funcţia caracteristică a sumei este produsul funcţiilor caracteristice, obţinem

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{n}(1 - 2\sigma^2 ti)^{-\frac{1}{2}} = (1 - 2\sigma^2 ti)^{-\frac{n}{2}},$$

care este funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare $H(n,\sigma)$. ■

Folosind din nou funcţia caracteristică a sumei, se poate demonstra următoarea teoremă.

Teorema 3.6.4 *Dacă* $X_i : H(n_i,\sigma),\quad i = 1, 2,$ *atunci*

$$X_1 + X_2 : H(n_1 + n_2,\sigma).$$

În practică interesează determinarea unor probabilităţi de forma $P(\{X \geqslant \delta\})$, unde $X : H(n, 1)$, deoarece se verifică imediat că dacă $X : H(n,\sigma)$, atunci variabila aleatoare

$$\frac{X}{\sigma^2} : H(n, 1).$$

Există tabele întocmite pentru diferite valori ale lui δ şi ale numărului de grade de libertate n, care au ca rezultate ariile din Figura 3.14.

Când numărul de grade de libertate este foarte mare, se foloseşte comportarea la limită a şirului de variabile aleatoare repartizate χ^2.

Teorema 3.6.5 *Dacă* $X : H(n,\sigma)$, *atunci variabila aleatoare*

$$\frac{X - n\sigma^2}{\sqrt{2n}\sigma^2}$$

este asimptotic normală $N(0, 1)$, *pentru* $n \to \infty$.

Demonstrație . Şirul funcţiilor caracteristice este

$$\varphi_n(t) = e^{-it\sqrt{\frac{n}{2}}}(1 - 2\sigma^2 i\frac{t}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^{-\frac{n}{2}} = e^{-it\sqrt{\frac{n}{2}}}(1 - \sqrt{\frac{2}{n}}it)^{-\frac{n}{2}}.$$

Calculăm limita lui $|\varphi_n(t)| = (1+\frac{2t^2}{n})^{-\frac{n}{2}}$, pentru $n \to \infty$ şi găsim $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Funcţia $\varphi_n(t)$ poate fi scrisă sub forma $(\cos t\sqrt{\frac{n}{2}} - i\sin t\sqrt{\frac{n}{2}})(\cos\frac{n}{2}\theta_n - i\sin\frac{n}{2}\theta_n)\rho_n$, unde $(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)\rho_n = 1 - \sqrt{\frac{2}{n}}it$. Pentru n suficient de mare,

$$\theta_n = -\arctan\sqrt{\frac{2}{n}}t.$$

Deci argumentul numărului complex $\varphi_n(t)$ poate fi luat de forma

$$y_n = -t\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{n}{2}\arctan t\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Notând $x = \sqrt{\frac{2}{n}}$, avem de calculat

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan tx - tx}{x^2}$$

care este 0. Deci $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. ■

Această teoremă permite ca la un număr mare de grade de libertate să se folosească tabelele funcţiei lui Laplace. În teoria selecţiei, ne interesează să determinăm repartiţia dispersiei (privită ca variabilă aleatoare) a unei selecţii provenind dintr-o colectivitate guvernată de variabila aleatoare normală. În acest scop sunt necesare următoarele rezultate.

Teorema 3.6.6 *Fie $X_k, k = 1,\dots n$, variabile aleatoare independente repartizate $N(0,1)$, iar*

$$l_j(X_1,\dots X_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}X_k,\ \ a_{jk}\in I\!R, j = 1,\dots s,\ \ s\in I\!N,\ \ s < n,$$

variabile aleatoare independente de tip $N(0,1)$. Atunci variabila aleatoare

$$Q = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \sum_{j=1}^{s} l_j^2,\ \ s < n,$$

este repartizată $H(n-s,1)$.

Demonstrație. Variabilele aleatoare l_i şi l_j cu $i \neq j$, sunt independente, deci

$$M[l_i l_j] = M[l_i]M[l_j] = M[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}X_k]M[\sum_{k=1}^{n} a_{jk}X_k] = 0,$$

deoarece media este aditivă şi $M[X_k] = 0$. Pe de altă parte

$$M[l_i l_j] = M[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}X_k^2 + \sum_{l,m=1}^{n} a_{il}a_{jm}X_m X_l] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}M[X_k^2] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk},$$

deoarece $M[X_m X_l] = M[X_m]M[x_l] = 0$. Analog, $M[l_i^2] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1, \quad \forall i = 1, \ldots, s$. Sistemul celor s vectori $(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, (a_{s1}, \ldots, a_{sn})$ este ortogonal şi poate fi deci completat la o bază ortonormată. Notăm matricea corespunzătoare cu $A = (a_{ij})\ \ i, j = 1, \ldots, s$, care este deci ortogonală şi au loc prin urmare

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0, \ \ \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Introducem notaţiile

$$l_r(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}x_k, \quad r = s+1, \ldots, n,$$

şi fie L matricea coloană cu componentele $l_i, \ \ i = 1, \ldots n$. Atunci are loc

$$L = AX,$$

unde X este vectorul n-dimensional cu componentele x_i. Un simplu calcul ne arată că

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

Deci

$$Q = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \sum_{j=1}^{s} l_j^2 = \sum_{k=s+1}^{n} l_k^2(x_1, \ldots, x_n).$$

Mai observăm că variabila aleatoare n-dimensională L obţinută printr-o transformare ortogonală asupra lui X, variabila aleatoare cu componentele $X_i, i = 1 \ldots n$, independente, are componentele independente; rezultă că variabilele $l_{s+1}, \ldots, l_n$ sunt independente, repartizate $N(0,1)$. Afirmaţia rezultă din Teorema 3.6.3. ∎

Teorema 3.6.7 (Cochran) *Dacă $Q_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots s$, sunt forme pătratice respectiv de rangurile $r_1, \ldots, r_s$, şi $X_1, \ldots, X_n$ sunt variabile aleatoare independente, repartizate $N(0,1)$, astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{s} Q_i(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} X_j^2,$$

atunci condiţia necesară şi suficientă ca Q_i să fie variabile aleatoare independente este ca

$$r_1 + \ldots + r_s = n.$$

Demonstraţie. Pentru început să presupunem că Q_i sunt independente. Dacă Q_i este o formă pătratică de rang r_i, atunci poate fi scrisă ca sumă de r_i pătrate de variabile aleatoare normale normate, deci din Teorema 3.6.3 fiecare Q_i este repartizată $H(r_i, 1)$, iar suma lor este repartizată $H(\sum_{i=1}^{s} r_i, 1)$, deoarece din ipoteză Q_i sunt independente. Pe de altă parte, $\sum_{j=1}^{n} X_j^2 : H(n, 1)$. Rămâne să observăm că funcţia de repartiţie este unică, deci $\sum_{j=1}^{s} r_j = n$.

Reciproc. Dacă $Q_i(X_1, \ldots, X_n)$ sunt forme pătratice şi $r_1 + \ldots r_n = n$ există o matrice ortogonală A astfel încât

$$\sum_{i=1}^{s} Q_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} l_k^2,$$

unde $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = AX$. Fiecare formă pătratică Q_i este sumă de r_i pătrate l_i, repartizate $N(0, 1)$ (obţinute printr-o transformare ortogonală de variabile normal repartizate), deci Q_i sunt repartizate $H(r_i, 1)$. Se verifică uşor că sunt şi independente. ■

Repartiţia Student. Spunem că variabila aleatoare X este repartizată Student cu *n grade de libertate*, dacă are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \forall x \in I\!R$$

Vom nota $X : S(n)$. Să verificăm mai întâi că f este o densitate de probabilitate. Observăm că din paritatea funcţiei

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $x = \sqrt{n}y$, după care găsim

$$\int_{0}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = \sqrt{n}\int_{0}^{\infty} (1 + y^2)^{-\frac{n+1}{2}} dy.$$

În ultima integrală substituţia $\frac{y^2}{1+y^2} = t$, ne duce la funcţia Beta vezi Anexa 3. Într-adevăr, $dy = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1 - t)^{-\frac{3}{2}}dt$, şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}\sqrt{n}\int_{0}^{1} (1 - t)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1 - t)^{-\frac{3}{2}}dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} B(\frac{n}{2}, 1) = 1.$$

Momentele repartiţiei Student. Funcţia f fiind pară, media este 0, deci momentele iniţiale coincid cu cele centrate, iar toate cele de ordin impar sunt nule.

$$\mu_{2k} = \nu_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} f(x)dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

Folosind substituţia $x = \sqrt{n}y$, reducem, ca mai înainte, la o integrală Beta şi obţinem

$$\mu_{2k} = \frac{n^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2} - k)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \text{ , dacă } \frac{n}{2} - k > 0.$$

Folosind proprietăţile funcţiei Γ

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2} - 1)\dots(\frac{n}{2} - k)\Gamma(\frac{n}{2} - k),$$

$$\Gamma(k + \frac{1}{2}) = (k - \frac{1}{2})\dots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}),$$

Găsim

$$\mu_{2k} = \frac{n^k 1.3.\dots(2k+1)}{(n-2)(n-4)\dots(n-2k)}.$$

Un caz particular îl constituie $n = 1$, când regăsim repartiţia Cauchy. Următorul rezultat de comportare la limită a unui şir de variabile aleatoare repartizate Student este utilizat mult în statistică.

Teorema 3.6.8 *Dacă f este densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare repartizate Student, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Demonstraţie. Vom folosi formula lui Legendre (vezi [10]). Pentru orice $a > 0$ are loc

$$\Gamma(a)\Gamma(a + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

Pentru a arăta că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

vom analiza separat cazurile n par şi n impar. Reamintim formula lui Wallis

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^4}{n((2n)!)^2}.$$

Dacă $n = 2k$, luăm în formula lui Legendre $a = k$ şi obţinem

$$\frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\sqrt{2k}\Gamma(k)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2k)}{2^{2k+1}\Gamma^2(k)\sqrt{2k}} = \frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!}{2^{2k-1}\sqrt{2k}((k-1)!)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(2k)!k^2}{2^{2k-1}\sqrt{2k}(k!)^2 2k}.$$

Din formula lui Wallis, ultimul şir are aceeaşi comportare la limită cu şirul

$$\frac{\sqrt{\pi}2^{2k}k^2}{2^{2k-1}\sqrt{2k}\sqrt{\pi k}2k}$$

care, pentru $k \to \infty$, tinde evident la $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dacă $n = 2k+1$, folosind din nou formula lui Wallis, obţinem

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2k+1}\Gamma(k+\frac{1}{2})} = \frac{k!2^{2k-1}(k-1)!}{\sqrt{(2k+1)\pi}\Gamma(2k)} =$$

$$= \frac{2^{2k-1}2k(k!)^2}{\sqrt{(2k+1)\pi}(2k)!} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ , pentru } k \to \infty.$$

■

Deci pentru un număr mare de grade de libertate, se utilizează tabelele legii normale.

Pentru repartiţia Student există tabele care determină, pentru $n = 1, \dots 30$, valorile $P(\{|X| > \delta\}) = \alpha$, adică ariile haşurate din figură 3.15. De asemenea există tabele pentru calculul funcţiei de repartiţie

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

adică de determinare a ariilor din Figura 3.16, pentru $x > 0$. Pentru $x < 0$, se folosesc aceleaşi tabele, dar ţinem seama de

$$F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)dt = -\int_{-\infty}^{x} f(-t)dt = \int_{x}^{\infty} f(t)dt = 1 - F(x).$$

Teorema 3.6.9 *Fie X şi Y variabile aleatoare independente repartizate $N(0,\sigma^2)$ şi $H(n,\sigma)$ respectiv; atunci variabila aleatoare*

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

este repartizată $S(n)$.

Demonstraţie. Variabila aleatoare bidimensionlă (X, Y) are densitatea

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}2^{\frac{n+1}{2}}\sigma^{n+1}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x^2+y}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty, \ \ 0 \leqslant y < \infty.$$

Facem schimbarea

$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}} \\ \\ v(x,y) = y \end{cases}.$$

Atunci densitatea de probabilitate a variabilei (U, V) devine

$$g(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\pi n} 2^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n+1} \Gamma(\frac{n}{2})} v^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(\frac{u^2}{n}+1)v}{2\sigma^2}}.$$

Densitatea marginală a lui U este

$$\int_0^\infty g(u,v)dv = \frac{1}{\sqrt{\pi n} 2^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n+1} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty v^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(\frac{u^2}{n}+1)v}{2\sigma^2}} dv =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n} 2^{\frac{n+1}{2}} \sigma^{n+1} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\left(\frac{1+\frac{u^2}{n}}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

aceasta datorită schimbării de variabilă $\frac{(\frac{u^2}{n}+1)v}{2\sigma^2} = t$. ∎

Consecinţă. Dacă variabilele aleatoare independente $X_1, \ldots, X_{n+1}$ sunt repartizate $N(0, \sigma^2)$, atunci variabila aleatoare

$$\frac{X_{n+1}}{\sqrt{\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n}}} : S(n).$$

Demonstraţia este imediată, dacă se foloseşte faptul că $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ este repartizată $H(n, \sigma)$.

Teorema 3.6.10 *Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente repartizate $N(0, \sigma)$ şi $\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots X_n}{n}$. Atunci variabila aleatoare*

$$y = \sqrt{n(n+1)} \frac{\overline{X}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2}}$$

este repartizată $S(n-1)$.

Demonstraţie. Alegem $a_{ij} \in I\!R$ astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \\ a_{(n-1)1} & \ldots & a_{(n-1)n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \ldots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

să fie ortogonală şi considerăm transformarea

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

După cum am văzut mai înainte, variabilele aleatoare $Y_j, j = 1, \ldots n$, sunt independente şi repartizate $N(0, \sigma)$. Avem de asemenea

$$Y_1^2 + \ldots + Y_n^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$$

şi dacă înmulţim ultima linie a matricei A cu X

$$\overline{X} = \frac{y_n}{\sqrt{n}}.$$

Deci

$$Y_1^2 + \ldots + Y_{n-1}^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 - n\overline{X}^2 = \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2.$$

Atunci variabila aleatoare căutată poate fi scrisă sub forma

$$Y = \sqrt{n(n-1)} \frac{\overline{X}}{\sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2} = \frac{Y_n}{\sqrt{\dfrac{Y_1^2 + \ldots + Y_{n-1}^2}{n-1}}},$$

iar din consecinţa precedentă aceasta este repartizată $S(n-1)$. ■

Se poate arăta că variabila aleatoare

$$\frac{X_n}{\sqrt{\dfrac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n}}}$$

este de asemenea repartizată $S(n-1)$.

Repartiţia Snedecor. Are densitatea de probabilitate dată de

$$f(x) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

unde $n_1, n_2 \in I\!N$ se numesc *grade de libertate*. Vom nota o variabilă aleatoare repartizată Snedecor prin $S(n_1, n_2)$. Prin schimbarea de variabilă

$$\frac{\dfrac{n_1}{n_2} x}{1 + \dfrac{n_1}{n_2} x} = y,$$

integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ este redusă la o integrală Beta şi folosind proprietăţile funcţiei Beta (Anexa 3) deducem imediat că funcţia de mai sus este o densitate de probabilitate. Momentele iniţiale ale repartiţiei Snedecor se obţin prin calcul direct

$$\nu_k = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^k x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} dx =$$
$$= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^k \frac{\Gamma(k+\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2}-k)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)},$$

dacă facem aceeaşi schimbare de variabilă ca mai sus.Ţinând cont de proprietăţile funcţiei Gama, găsim

$$\nu_k = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^k \frac{n_1(n_1+2)\dots(n_1+2k-2)}{(n_2-2)(n_2-4)\dots(n_2-2k)}, \quad k < \frac{n_2}{2}.$$

În particular găsim

$$\nu_1 = \frac{n_2}{n_2-2}$$
$$\nu_2 = \frac{n_2^2}{n_1}\frac{n_1+2}{(n_2-2)(n_2-4)} \tag{3.54}$$
$$\nu_3 = \frac{n_2^3}{n_1^2}\frac{(n_1+2)(n_1+4}{(n_2-2)(n_2-4)(n_2-6)}.$$

Teorema 3.6.11 *Fie X_1, X_2 două variabile aleatoare independente, care sunt repartizate $S(n_1, n_2)$. Atunci variabila aleatoare*

$$\frac{n_2 X_1}{n_1 X_2} : S(n_1, n_2).$$

Demonstraţie. Notăm cu U variabila din enunţ şi determinăm funcţia de repartiţie

$$F_U(x) = P(\{U < x\}) = P\left\{\frac{X_1}{X_2} < \frac{n_1}{n_2}x\right\},$$

iar prin derivare găsim

$$f_U(x) = \frac{n_1}{n_2} f_U(\frac{n_1}{n_2}x).$$

Mai departe vom folosi formula care dă densitatea câtului de variabile aleatoare (3.31)

$$f_U(x) = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{xz}{2}} (xz)^{\frac{n_1}{2}-1} z dz,$$

care prin substituţia $\dfrac{z(1+x)}{2} = t$, devine

$$f_U(x) = \frac{1}{2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} x^{\frac{n_1}{2}-1} \int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{2t}{1+x}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} \frac{2}{1+x} dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)} x^{\dfrac{n_1}{2}-1}(1+x)^{-\dfrac{n_1+n_2}{2}}.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{n_1}{n_2}y$, se obţine densitatea de probabilitate Snedecor. ■

Consecinţă. Dacă variabilele aleatoare independente $X_j,\ j = \overline{1, n_1},\quad Y_k, k = \overline{1, n_2}$, sunt repartizate $N(0, \sigma)$, atunci variabile aleatoare

$$\frac{n_2}{n_1}\frac{X_1^2 + \ldots X_{n_1}^2}{Y_1^2 + \ldots + Y_{n_2}^2}$$

este repartizată $S(n_1, n_2)$. Dacă variabila aleatoare X este repartizată $S(n_1, n_2)$, variabila aleatoare $\dfrac{1}{2}\ln X$ are densitatea de probabilitate

$$f(x) = 2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} e^{n_1 x}\left(1 + \frac{n_1}{n_2}e^{2x}\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}. \tag{3.55}$$

O variabilă aleatoare având această densitate se numeşte **Fisher**.

Repartiţia Gama. Se verifică imediat că funcţia

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(m)}e^{-x}x^{m-1},\quad x \geqslant 0,\quad m > 0,$$

este o densitate de probabilitate. Momentele iniţiale de ordin k sunt

$$\nu_k = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{-x}x^{m-1+k}dx = \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(m)} = m(m+1)\ldots(m+k-1).$$

Momentele centrate, după particularizarea formulelor (3.39), sunt

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = m(m+1) - m^2 = m,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = 2m.$$

Funcţia caracteristică este dată de

$$\varphi(t) = (1 - it)^{-m},$$

care se obţine din

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{itx}e^{-x}x^{m-1}dx = \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty e^{(it-1)x}x^{m-1}dx,$$

prin substituţia $(it-1)x = y$.

Folosind produsul funcţiilor caracteristice se deduce uşor că dacă X_i este repartizată Gama cu parametrul $m_i,\ i = 1, 2$, atunci suma este repartizată Gama cu parametrul $m_1 + m_2$.

Exemplul 3.6.2 Repartiţia Erlang Să determinăm repartiţia sumei de n variabile aleatoare independente, repartizate exponenţial, cu parametrul λ. Funcţia caracteristică a repartiţiei exponenţiale este

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Sumei de variabile exponenţiale îi corespunde funcţia caracteristică

$$\varphi_n(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n,$$

iar aceasta corespunde variabilei aleatoare cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x > 0.$$

Să determinăm funcţia de reparticţie a variabilei Erlang.

$$F(x) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^x y^{n-1}\lambda e^{-\lambda y}dy.$$

Integrăm prin părţi şi avem

$$F(x) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\left(-y^{n-1}e^{\lambda y}|_0^x + \int_0^x (n-1)y^{n-2}e^{-\lambda y}dy\right) =$$

$$= -\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} + \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^x y^{n-2}\lambda e^{-\lambda y}dy.$$

Repetînd integrarea prin părţi, găsim

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{\lambda x}.$$

Recunoaştem în suma precedentă primii n termeni ai unei repartiţii Poisson. Legătura dintre aceste două repartiţii va fi evidenţiată la procese Poisson.

Repartiţia Beta. Este definită prin densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{B(m,n)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ \ m > 0, n > 0.$$

Momentele sunt date de

$$\nu_k = \frac{m(m+1)\dots(m+k-1)}{(m+n)(m+n+1)\dots(m+n+k-1)}.$$

În particular avem

$$\nu_1 = \frac{m}{m+n}, \ \ \nu_2 = \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)},$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}.$$

3.7 Fiabilitate

În sensul cel mai larg , fiabilitatea reprezintă proprietatea unui dispozitiv de a-şi îndeplini funcţia specifică în condiţii de exploatare date. O analiză completă a fiabilităţii ne pune în evidenţă:

-fiabilitatea precalculată, care se evaluează pornind de la concepţia dispozitivului şi a componentelor sale;

-fiabilitate tehnică (nominală) determinată în urma încercărilor în condiţii de fabrică;

-fiabilitate de exploatare, determinată de condiţiile reale de exploatare, cu luarea în considerare a acţiunii complexe a tuturor factorilor ce influenţează funcţionarea.

Fiabilitatea poate fi exprimată cantitativ prin parametrii de fiabilitate. Determinarea lor se face în practică în urma prelucrării statistice a datelor. Cel mai frecvent utilizată este probabilitatea funcţionării fără defecţiune într-un interval de timp. Intervalul de timp în care sistemul funcţionează fără defecţiuni este o variabilă aleatoare pe care o notăm cu T.

Definiţia 3.7.1 *Numim* funcţie de fiabilitate *sau* reliabilitate *funcţia* $R : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ *definită prin*

$$R(t) = P(\{T \geqslant t\}).$$

Observăm că $1 - R(t)$ este funcţia de repartiţie, care în sensul fiabilităţii măsoară probabilitatea ca până la momentul t să apară o defecţiune. Funcţia $F(t) = 1 - R(t)$ se mai numeşte *funcţie de nesiguranţă.* În strânsă legătură cu proprietăţile funcţiei $F(t)$, putem enunţa pe cele ale lui R.

1. $R(0) = 1$;
2. $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = 0$;
3. $t_1 < t_2 \Longrightarrow R(t_1) \geqslant R(t_2)$;
4. Dacă f este densitatea de probabilitate pentru variabila T,

$$f(t) = -R'(t).$$

În Figura 3.17 sunt reprezentate cele două funcţii.

Observăm că la momentul iniţial funcţia de fiabilitate este maximă, iar nesiguranţa minimă şi dacă $t \to \infty$ se produce fenomenul invers. Vom presupune că se poate preciza o funcţie, numită *rată de defectare* şi notată r, cu proprietatea că $r(t)\Delta t$ este probabilitatea ca în intervalul $(t, t+\Delta t)$ să apară o defecţiune, dacă până la momentul t, dispozitivul a funcţionat . Condiţia din definiţie este o probabilitate condiţionată :

$$r(t)\Delta t = P\left(\{t \leqslant T < t+\Delta\} | \{T \geqslant t\}\right) = \frac{P(\{t \leqslant T < t+\Delta t\})}{P(\{T \geqslant t\})} =$$

$$= \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{R(t)} = -\frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{R(t)}.$$

În ultima relaţie împărţim prin Δt şi trecem la limită pentru $\Delta t \to 0$. Dacă această limită există, găsim ecuaţia diferenţială

$$-\frac{R'(t)}{R(t)} = r(t),$$

cu condiţia iniţială

$$R(0) = 1,$$

care are ca soluţie

$$R(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}. \tag{3.56}$$

Exemplul 3.7.1 Rata de defectare a unui utilaj este $r(t) = 0,1$. Cu ce probabilitate dispozitivul funcţionează cel puţin 10 ore ? Înlocuim în (3.56) $r(t) = 0,1$ şi observăm că dispozitivul funcţionează cel puţin 10 ore este evenimentul $\{T \geqslant 10\}$, deci

$$R(10) = e^{-\int_0^t 0,1ds} = e^{-1} = 0,368$$

În practică sunt utilizate o parte din repartiţiile continue prezentate anterior, dar şi altele specifice.

Repartiţia exponenţială. are densitatea de probabilitate

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & \text{dacă } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{dacă } t < 0, \end{cases} \quad (\mu > 0).$$

Se verifică imediat că f este o densitate de probabilitate. Funcţia de fiabilitate este

$$R(t) = \int_t^\infty f(s)ds = e^{\mu t},$$

iar rata de defectare

$$r(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \mu$$

este deci constantă. Această repartiţie este utilizată pentru dispozitive care ”nu îmbătrânesc”.

Repartiţia Weibull. Are densitatea de probabilitate

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}, & \text{dacă } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases} \quad (\lambda, \alpha \in R_+).$$

Funcţia de fiabilitate este

$$R(t) = e^{-\lambda t^\alpha},$$

iar rata de defectare

$$r(t) = \lambda\alpha t^{\alpha-1}.$$

Pentru $\alpha = 1$ se regăseşte repartiţia exponenţială, iar pentru $\alpha = 2$ se obţine repartiţia **Rayleigh**. Faptul că rata este o funcţie polinomială, face să modeleze mai bine diferitele situaţii practice; de aceea repartiţia Weibull este des utilizată.

Pentru diferite valori ale lui α, în Figura 3.18 sunt reprezentări grafice ale densităţii de probabilitate, iar în Figura 3.19 şi 3.20 ale ratelor şi funcţiilor de fiabilitate.

În general variaţia defecţiunilor unui dispozitiv se poate împărţi în trei perioade.

1. perioada iniţială în care apar defecţiuni datorate erorilor de fabricaţie şi se face rodajul (copilăria);

2. perioada de funcţionare care începe după rodaj, când numărul defecţiunilor scade, rămânând practic constant (maturitatea), pentru care se poate utiliza distribuţia exponenţială;

3. perioada ın care intensitatea de defectare creşte continuu, datorită uzurii (bătrâneţea).

Componentele unui dispozitiv pot fi legate "în serie", sau "în paralel". Vom analiza modul de determinare a fiabilităţii pentru fiecare situaţie în parte.

Legare în serie. Spunem că un dispozitiv are n componente legate în serie, dacă defectarea uneia, atrage nefuncţionarea întregului sistem. Convenim să vizualizăm prin schema de la Figura 3.21.

Presupunem că fiecare componentă $C_i, i = 1, \ldots n$, se poate defecta indiferent de celelalte, cu rata de defectare r_i şi funcţia de fiabilitate R_i. Dacă T, respectiv $T_i, i = 1, \ldots, n$ semnifică timpul de funcţionare până la prima defectare a sistemului, respectiv a componentei C_i, atunci evident

$$\{T \geqslant t\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{T_i \geqslant t\}$$

şi aplicând probabilitatea pentru evenimente independente găsim

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} r_i(s) ds} =$$

$$= e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} r_i(s) ds}.$$

Deci rata de defectare este

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t).$$

Observăm că $T = \min\{T_1, \ldots, T_n\}$.

Legare în paralel. Un dispozitiv are n componente legate în paralel, dacă acesta poate funcţiona, chiar dacă una din componente se defectează.

Sistemul nu funcţionează dacă fiecare din componente nu funcţionează; presupunem că acestea se pot defecta independent una de alta. Atunci obţinem

$$\{T < t\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{T_i < t\}$$

şi dacă aplicăm probabilitatea

$$1 - R(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)) .$$

Observăm că $T = \max\{T_1, \ldots, T_n\}$. În acest caz nu putem găsi o expresie simplă a ratei de defectare a sistemului. În practică aceste moduri de alcătuire apar combinat.

Reprezentăm acest lucru în Figura 3.22.

Exemplul 3.7.2 În schema alăturată componentele C_i funcţionează independent, cu aceeaşi funcţie de fiabilitate.

Să determinăm funcţia de fiabilitate a sistemului. Dispozitivul funcţionează la momentul t, dacă

$$\{T > t\} = (\{T_1 > t\} \cap \{T_3 > t\}) \cup (\{T_1 > t\} \cap \{T_4 > t\}) \cup$$
$$\cup (\{T_2 > t\} \cap \{T_4 > t\}) .$$

Calculăm acum probabilitatea acestei reuniuni, folosind independenţa

$$R(t) = R_1(t)R_3(t) + R_1R_4(t) + R_2(t)R_4(t) - R_1(t)R_3(t)R_4(t) -$$
$$-R_1(t)R_2(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) + R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) =$$
$$= 3R_1^2(t) - 2R_1^3(t).$$

PROBLEME PROPUSE

Problema 3.1 O variabilă aleatoare X are repartiţia dată de "legea triunghiului dreptunghic" pe intervalul $(0, a), a > 0$ (vezi Figura 3.24). Găsiţi :

a. densitatea de probabilitate;

b. funcţia de repartiţie;

c. probabilitatea ca variabila aleatoare X să ia valori în intervalul $(a/2, a)$;

d. media şi dispersia.

Soluţie a. Scriem dreapta cu tăieturile $(a, 0)$ şi $(a/2, 0)$ şi găsim

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a}(1 - \dfrac{x}{a}), & x \in (0, a), \\ \\ 0, & x \notin (0, a) \ ; \end{cases}$$

b. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \\ \dfrac{x}{a}(2 - \dfrac{x}{a}), & 0 < x \leqslant a, \\ \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

c. $P(\{X \in (\dfrac{a}{2}, a)\}) = F(a) - F(\dfrac{a}{2}) = \dfrac{1}{4}$;

d. $M[X] = \dfrac{a}{3}, D^2[X] = \dfrac{a^2}{18}$.

Problema 3.2 Determinaţi funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X, repartizată Cauchy, deci cu densitatea de probabilitate $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in I\!R$.

R: $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$.

Problema 3.3 O variabilă aleatoare X are repartiţia Simpson sau "legea triunghiului isoscel" pe un interval $(-a, a), a > 0$.

Găsiţi

a. densitatea de probabilitate;

b. funcţia de repartiţie.

R: Graficul este dat de Figura 3.25

a. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}(1 - \dfrac{x}{a}), & 0 < x < a, \\ \\ \dfrac{1}{a}(1 + \dfrac{x}{a}), & -a < x < 0, \\ \\ 0, & |x| \geqslant a. \end{cases}$;

b. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{1}{a}(x+a) + \frac{1}{2a^2}(x^2 - a^2), & -a < x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{a}(x - \frac{x^2}{2a}), & 0 \leqslant x < a \\ 1, & x > a. \end{cases}$

Problema 3.4 Determinaţi media şi dispersia variabilei aleatoare exponenţiale, având densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

R: $M[X] = \frac{1}{\lambda}, \ D^2[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$

Problema 3.5 Determinaţi media şi dispersia repartiţiei Laplace, cu densitatea de probabilitate $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}, \ \lambda > 0, \ \forall x \in I\!R.$

R: $M[X] = 0, \ D^2[X] = \frac{2}{\lambda^2}.$

Problema 3.6 Determinaţi media şi dispersia variabilei aleatoare repartizată uniform pe intervalul (a, b).

R: $M[X] = \frac{a+b}{2}, \ D^2[X] = \frac{(a-b)^2}{12}.$

Problema 3.7 O variabilă aleatoare este repartizată normal $N(m, \sigma^2)$. Să aproximăm X pe un interval (α, β) cu legea uniformă, dacă m, σ rămân constanţi.

Soluţie. Folosim problema precedentă şi egalăm mediile şi abaterile medii pătratice

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = m, \quad \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}} = \sigma$$

de unde $\alpha = m - \sigma\sqrt{3}, \quad \beta = m + \sigma\sqrt{3}.$

Problema 3.8 O variabilă aleatoare $X : N(m, \sigma^2)$ poate avea parametrii $m = 2, \sigma = 2$ cu probabilitatea 0,4 sau $m = 2, \sigma = 1$ cu probabilitatea 0,6 determinaţi densitatea de probabilitate.

Soluţie . Folosim generalizarea formulei probabilităţii totale, din 3.2. Avem

$$f(x) = \frac{0,4}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{8}} + \frac{0,6}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

Problema 3.9 Într-o secţie se produc articole care corespund calitativ, dacă satisfac o anumită proprietate măsurabilă printr-o caracteristică numerică. Se observă unele deviaţii de la normele impuse, care sunt repartizate normal, cu media $m = 0$ şi abaterea σ. La controlul de calitate se elimină acele produse ale căror deviaţii depăşesc mărimea Δ. Determinaţi probabilitatea evenimentului A " un articol este respins".

$R: \quad P(A) = P(\{|X| > \Delta\}) = 1 - 2\Phi(\frac{\Delta}{\sigma})$.

Problema 3.10 Fie $\alpha, a > 0$ şi $n \in I\!N$. Determinaţi a şi α astfel ca funcţia

$$f_n(x) = ax^n e^{-\alpha^2 x^2}, \quad x > 0$$

să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă aleatoare cu media m.

Soluţie. Punem condiţiile

$$\int_0^{+\infty} ax^n e^{-\alpha^2 x^2} dx = 1, \quad \int_0^{+\infty} ax^{n+1} e^{-\alpha^2 x^2} dx = m$$

şi găsim

$$a = \frac{2\alpha^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}, \quad \alpha = \frac{1}{m} \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Problema 3.11 Un mesaj este aşteptat printr-un canal de comunicaţie. Momentul T la care mesajul este primit este aleator şi are funcţia de densitate $f(t)$. La un moment dat τ, se observă că mesajul nu a ajuns încă. Determinaţi densitatea de probabilitate ϕ a timpului care rămâne până la recepţionarea mesajului, Θ.

Soluţie . Fie A evenimentul "mesajul nu a fost recepţionat până la momentul τ". Folosind formula lui Bayes, găsim

$$f_A(t) = \frac{f(t)}{P(A)} = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{1 - \int_0^\tau f(t)dt}, & t > \tau, \\ \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Deoarece $\Theta = T - \tau$, rezultă

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{1 - \int_0^\tau f(t)dt}, & t > 0, \\ \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Problema 3.12 Un sistem de comunicaţie acceptă un voltaj pozitiv V la intrare, iar la ieşire un voltaj $Y = \alpha V + N$, unde $\alpha = 10^{-2}$, iar N este o variabilă aleatoare normală cu $m = 0, \sigma = 2$. Ce valoare trebuie să ia V, astfel ca la ieşire voltajul să fie pozitiv cu siguranţa $1 - \epsilon,\ \epsilon = 10^{-6}$.

Soluţie . Punem condiţia ca $P(\{Y < 0\}) = 10^{-6}$ şi găsim

$$P(\{Y < 0\}) = P(\{\alpha V + N < 0\}) = P(\{N < -\alpha V\}) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\alpha V}{\sigma}\right).$$

De aici găsim că $V = 950,6$.

Problema 3.13 Legea evenimentelor rare în plan. Un semnal luminos se poate produce aleator cu densitatea λ, pe cadranul unui osciloscop. Găsiţi repartiţia R, care dă distanţa de la semnal, la cel mai apropiat "vecin", media şi dispersia.

Soluţie . Evenimentul $\{R < r\}$ înseamnă că cel puţin un semnal se produce în interiorul discului de rază r. Numărul mediu de apariţii în acest disc este $\pi r^2\lambda$, deci $P(\{R < r\}) = 1 - P(\{R \geqslant r\}) = 1 - e^{-\pi r^2\lambda}, r > 0$, dacă generalizăm raţionamentul de la legea Poisson. Densitatea de probablitate, este $f(r) = 2\pi\lambda r e^{-\pi r^2\lambda},\ r > 0$. Această repartiţie este repartiţia Rayleigh.

$M[R] = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}},\ D^2[R] = \dfrac{(4-\pi)}{4\pi\lambda}$.

Analog se poate deduce repartiţia evenimentelor rare în spaţiu, care are densitatea de probabilitate $f(r) = 4\pi r^2\lambda e^{-\lambda\frac{4}{3}\pi r^3},\ r > 0$, unde r este raza unei sfere alese convenabil.

Problema 3.14 În timpul funcţionării unui calculator, defecţiunile pot apărea la momente aleatoare. Timpul T în care acesta funcţionează fără defecţiuni, urmează o lege exponenţială cu parametru ν, adică $\phi(t) = \nu e^{-\nu t},\ \nu > 0$. Dacă o defecţiune apare este imediat îndepărtată într-un interval de timp t_0, după care calculatorul funcţionează din nou. Notăm cu Z intervalul de timp între două defecţiuni. Aflaţi $P(\{Z > 2t_0\})$.

Soluţie. Avem $Z = T + t_0$ şi funcţia de repartiţie este

$$F(t) = P(\{Z < t\}) = P(\{T < t - t_0\}) = F_T(t - t_0).$$

Prin derivare

$$F'(t) = f_T(t - t_0) = \begin{cases} \nu e^{-\nu(t-t_0)}, & t > t_0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Atunci $P(\{Z > 2t_0\}) = e^{-\nu t_0}$.

Problema 3.15 Timpul T între două defecţiuni ale unui calculator, urmează o lege exponenţială cu parametru λ. Rezolvarea unei anumite probleme necesită funcţionarea fără defecţiuni a componentelor pentru un timp τ; dacă o defecţiune apare în timpul rezolvării, problema poate fi reluată. Fie Θ variabila aleatoare care reprezintă intervalul de timp în care problema va fi rezolvată. Să determinăm repartiţia şi media variabilei aleatoare Θ.

Soluţie. Dacă problema a fost rezolvată în intervalul τ, înseamnă că $T > \tau$ şi $R(\tau) = P(\{T > \tau\}) = e^{-\tau\lambda}$, pe care o notăm p. Evenimentul contrar se produce cu probabilitatea $1-p$. Dacă problema a fost rezolvată în intervalul $((n-1)\tau, n\tau)$, aceasta înseamnă că au survenit defecţiuni ale calculatorului în intervalele $(0,\tau),\ (\tau, 2\tau),\ \ldots((n-2)\tau, (n-1)\tau)$ şi aceasta se întâmplă cu probabilitatea $p(1-p)^{n-1}$. Variabila căutată este

$$\Theta : \begin{pmatrix} n\tau \\ p(1-p)^{n-1} \end{pmatrix}$$

care are media $\dfrac{\tau}{p}$.

Problema 3.16 Durata vieţii unui circuit integrat normal este dată de o lege exponenţială cu rata α, iar a unui circuit rebut 1000α. Probabilitatea de a extrage un circuit integrat normal dintr-un lot este p. Găsiţi probabilitatea ca alegînd un circuit la întâmplare, acesta să funcţioneze după t secunde. Presupunem că fiecare este testat t secunde. Pentru ce valoare a lui t, 99% dintre circuite sunt bune.

Soluţie . Fie B evenimentul de a "alege un circuit normal", R de a "alege un circuit rebut", iar C de a "alege un circuit care să funcţioneze după t secunde". Are loc, dacă folosim formula probabilităţii totale

$$P(C) = pe^{-\alpha t} + (1-p)e^{-1000\alpha t}.$$

Calculăm $P_C(B)$ cu formula lui Bayes şi din condiţia $P_C(B) = 0,99$, avem $t = \dfrac{1}{999\alpha} \ln \dfrac{(1-p)99}{p}$.

Problema 3.17 Variabila aleatoare (X,Y) are densitatea de probabilitate $f(x,y)$. Exprimaţi probabilităţile următoarelor evenimente: 1.$\{X > Y\}$, 2.$\{X > |Y|\}$ 3.$\{|X| > Y\}$ 4.$\{Y - X > 1\}$.

Soluţie 1. $P(\{X > Y\}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{y}^{+\infty} f(x,y)dx;$

2. $P(\{X > |Y|\}) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} dx \int_{-x}^{x} f(x,y)dy;$

3. $P(\{|X| > Y\}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} dx \int_{-\infty}^{-x} f(x,y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{x} f(x,y)dy;$

4. $P(\{Y - X > 1\}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x+1}^{+\infty} f(x,y)dxdy.$

Domeniile de integrare sunt reprezentate mai jos.

Problema 3.18 Variabila aleatoare X are repartiţia exponenţială cu densitatea $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Să determinăm condiţiile în care variabila aleatoare $Y = e^X$ are medie şi dispersie.

Soluţie. $M[Y] = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda-1)x} dx$. Pentru $\lambda > 1$, există media egală cu $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$. Pentru $\lambda \leqslant 1$, integrala din definiţia mediei este divergentă. Pentru $\lambda > 2$, $M[Y^2] = \dfrac{\lambda}{\lambda - 2}$ şi deci există dispersie, iar dacă $\lambda \leqslant 2$ aceasta nu există.

Problema 3.19 Variabila aleatoare X are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$$

calculaţi media şi dispersia variabilelor aleatoare X şi $Y = |\sin X|$.

Soluţie. $M[X] = 0, D^2[X] = \dfrac{\pi^2}{4} - 2,\ \ M[Y] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos x dx = \dfrac{1}{2},\ D^2[Y] = \dfrac{1}{12}.$

Problema 3.20 Variabilele aleatoare X şi Y au repartiţii exponenţiale

$$f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x},\quad x > 0;\quad f_2(x) = \mu e^{-\mu y},\ y > 0.$$

Determinaţi densitatea de probabilitate $f(x,y)$ şi funcţia de repartiţie $F(x,y)$ pentru variabila aleatoare bidimensională (X,Y), dacă $X,\ Y$ sunt independente.

Soluţie.

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0 \quad \text{sau } y\leqslant 0,\\[2ex] \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}, & x>0 \quad \text{şi } y>0;\end{cases}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \quad \text{sau } y\leqslant 0,\\[2ex] (1-e^{-\lambda x})(1-e^{-\mu y}), & x>0 \quad \text{şi } y>0.\end{cases}$$

Problema 3.21 Variabila aleatoare (X,Y) este repartizată constant în pătratul de latură a, pe care îl notăm D şi nulă în afară. Determinaţi $f(x,y)$ şi $F(x,y)$, funcţiile de densitate marginale $f_1(x),\ f_2(y)$. Stabiliţi dacă X şi Y sunt independente.

Soluţie.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & (x,y)\in D,\\[2ex] 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \quad \text{sau } y\leqslant 0,\\[2ex] \dfrac{xy}{a^2}, & 0\leqslant x\leqslant a, \quad \text{şi } 0\leqslant y\leqslant a,\\[2ex] \dfrac{y}{a}, & x>a \quad \text{şi } 0<y\leqslant a,\\[2ex] \dfrac{x}{a}, & 0<x\leqslant a \quad \text{şi } y>a,\\[2ex] 1, & x>0 \quad \text{şi } y>a;\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & x\in(0,a),\\[2ex] 0, & x\notin(0,a);\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & y\in(0,a)\\[2ex] 0, & y\notin(0,a).\end{cases}$$

Problema 3.22 Funcţia $f(x,y)$ este constantă în interiorul unui cerc de rază r şi nulă în afară. Determinaţi raza r astfel ca $f(x,y)$ să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă aleatoare bidimensională $(X,Y),\ f_X(x), f_Y(y), f_X(x|y), f_Y(y|x)$. Calculaţi $Cov[X,Y]$.

Soluţie. Căutăm densitatea de probabilitate de forma

$$f(x,y)=\begin{cases}h, & x^2+y^2<r^2,\\ 0, & x^2+y^2\geqslant r^2.\end{cases}$$

Punem condiţia ca $1 = \int\int f(x,y)dxdy = h\pi r^2$. Deci $r = \sqrt{\frac{1}{\pi h}}$.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2h\sqrt{r^2 - x^2}, & |x| < r, \\ 0, & |x| > r; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2h\sqrt{r^2 - y^2}, & |y| < r, \\ 0, & |y| \geqslant r; \end{cases}$$

$$f_X(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}}, & |x| < \sqrt{r^2 - y^2}, \\ 0, & |x| > \sqrt{r^2 - y^2}; \end{cases}$$

$$f_Y(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}, & |y| < \sqrt{r^2 - x^2}, \\ 0, & |y| > \sqrt{r^2 - x^2}. \end{cases}$$

Avem imediat $M[X] = M[Y] = 0, D[X] = D[Y] = \frac{r}{2}$. $M[XY] = \int\int xyf(x,y)dxdy = 0$. Deci $Cov[X,Y] = 0$.

Problema 3.23 O variabilă aleatoare are densitatea de probabilitate constantă în pătratul D din Figura 3.30.

Găsiţi $f(x,y), f_X(x), f_Y(y), f_X(x|y), f_Y(y|x)$ şi stabiliţi dacă sunt independente; dar corelate ?

Soluţie.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D; \end{cases} \quad f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Analog

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| < 1, \\ 0, & |y| > 1, \end{cases}$$

care sunt repartizate Simpson.

$$f_X(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1 - |y|)}, & |x| < 1 - |y| \\ 0, & |x| > 1 - |y|; \end{cases}$$

$$f_X(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1 - |x|)}, & |y| < 1 - |x| \\ 0, & |y| > 1 - |x|. \end{cases}$$

X şi Y nu sunt independente, dar nici corelate. $M[X] = M[Y] = 0$, iar $M[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = 0$. $Cov[X,Y] = 0$.

Problema 3.24 Variabila aleatoare (X,Y) este uniform repartizată în interiorul unui cerc de rază $r = 1$ cu interiorul D. Găsiţi media şi dispersia variabilei $Z = XY$.

Soluţie. $M[XY] = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\int_D xydxdy = 0$; $D^2[XY] = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\int_D x^2y^2dxdy = \dfrac{1}{8}$.

Problema 3.25 O variabilă aleatoare (X,Y) este uniform repartizată într-un pătrat de latură 1. Găsiţi media şi dispersia variabilei XY.

Soluţie. Pentru că X şi Y sunt independente $M[XY] = M(X)M(Y) = \dfrac{1}{4}$; $D^2[XY] = \dfrac{1}{144}$.

Problema 3.26 Variabilele X şi Y sunt legate prin $Y = 2 - 3X$ şi $m_x = -1, D_X^2 = 4$. Găsiţi $m_y,\ D_Y^2,\ Cov[X, Y], \rho[X, Y]$.

R: $M[Y] = M[2 - 3X] = 2 - 3(-1) = 5; D^2[Y] = (-3)^2 4 = 36$. Din $M[X^2] = D^2[X] + M^2[X]$, deducem $M[X^2] = 5$ $Cov[X, Y] = M[X(2 - 3X]) + 1 \times 5 = -12$ $\rho[X, Y] = \dfrac{-12}{D[X]D[Y]} = -1$.

Problema 3.27 Variabilele aleatoare X, Y, Z au mediile m_x, m_y, m_z şi matricea de covarianţă

$$\begin{pmatrix} D^[X] & Cov[X,Y] & Cov[X,Z] \\ Cov[X,Y] & D^[Y] & Cov[Y,Z] \\ Cov[X,Z] & Cov[Y,Z] & D^[Z] \end{pmatrix}.$$

Găsiţi media şi dispersia variabilei $U = aX - bY + cZ - d, a, b, c, d \in I\!R$.

R: $M[U] = a\ m_x - b\ m_y + c\ m_z - d,\ D^2[U] = a^2\ D^[X] + b^2\ D^[Y] + c^2\ D^2[Z] - 2\ a\ b\ Cov[X, Y] + 2\ a\ c\ Cov[X, Z] - 2\ b\ c\ Cov[Y, Z]$.

Problema 3.28 $X,\ Y$ sunt variabile aleatoare independente $X : N(1, 4),\ Y : U(0, 2)$. Găsiţi $M[X + Y],\ M[XY],\ M[X^2],\ M[X - Y^2],\ D^2[X + Y],\ D^2[X - Y]$.

R: $M[X + Y] = 2,\ M[XY] = M[X]M[Y] = 1,\ M[X^2] = 5,\ M[X - Y^2] = -\dfrac{1}{3},\ D^2[(X + Y)] = D^2[(X - Y)] = \dfrac{13}{3}$.

Problema 3.29 Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare bidimensionale normale este

$$f(x, y) = \frac{1}{1,6\pi} e^{-\frac{1}{1.28}\left((x-2)^2 - 1,2(x-2)(y+3) + (y+3)^2\right)}.$$

Calculaţi covarianţa variabilelor marginale.

R: $Cov[X, Y] = 0, 6$.

Problema 3.30 Un voltmetru înregistrează cea mai mare dintre două tensiuni V_1, V_2. Variabilele V_1, V_2 sunt independente şi au aceeaşi densitate $f(v)$. Găsiţi media variabilei $V = \max\{V_1, V_2\}$.

Soluţie. $m = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 dv_1 \int_{-\infty}^{v_1} f(v_2)dv_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} v_2 f(v_2)dv_2 \int_{-\infty}^{v_2} f(v_1)dx_1$.

Capitolul 4

Probleme la limită în teoria probabilităţilor

Baza teoretică a statisticii matematice, care conferă garanţii asupra valabilităţii studiului statistic al fenomenelor aleatoare, se sprijină pe proprietăţile de convergenţă ale şirurilor de variabile aleatoare. Prezentăm principalele tipuri de convergenţă şi unele proprietăţi ale şirurilor de variabile aleatoare referitoare la acestea.

4.1 Convergenţa în probabilitate

Fie $\{\ E, K, P\ \}$ un câmp de probabilitate, $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ un şir de variabile aleatoare, X o variabilă aleatoare, toate definite pe $\{E, K, P\}$.

Definiţia 4.1.1 *Şirul* $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ converge în probabilitate *către* X *(vom folosi notaţia* $\{X_n\} \xrightarrow{prob} X$*) dacă*

$$\forall\varepsilon > 0\ :\ \lim_{n\to\infty} P(\{e \in E \mid |X_n(e) - X(e)\mid > \varepsilon\}) = 0 \tag{4.1}$$

sau, echivalent,

$$\forall\varepsilon > 0\ :\ \lim_{n\to\infty} P(\{e \in E \mid |X_n(e) - X(e)\mid \leqslant \varepsilon\}) = 1. \tag{4.2}$$

Observaţia 4.1.1 Se poate defini şi convergenţa în probabilitate a şirului de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ către constanta c deoarece orice constantă este un caz particular de variabilă aleatoare.

Proprietăţi ale convergenţei în probabilitate.

Propoziţia 4.1.1 *Limita unui şir de variabile aleatoare convergent în probabilitate este unică aproape sigur.*

Demonstraţie. Arătăm că dacă există două variabile aleatoare X şi Y astfel încât $\{X_n\} \xrightarrow{prob} X$, $\{X_n\} \xrightarrow{prob} Y$ atunci $P(\{X \neq Y\}) = 0$. Fie

$$\varepsilon < \mid X - Y\mid = \mid X - X_n + X_n - Y\mid \leqslant \mid X - X_n\mid + \mid X_n - Y\mid$$

de aici rezultă

$$\{ \mid X - Y \mid > \varepsilon\} \subseteq \{ \mid X - X_n \mid > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{ \mid X_n - Y \mid > \frac{\varepsilon}{2}\},$$

deci

$$P(\{ \mid X - Y \mid > \varepsilon\} \leqslant P(\{ \mid X - X_n \mid > \frac{\varepsilon}{2}\})+$$

$$+P(\{ \mid X_n - X \mid > \frac{\varepsilon}{2}\}).$$

Deoarece $\{X_n\} \xrightarrow{prob} X$ şi $\{X_n\} \xrightarrow{prob} Y$ rezultă, trecând la limită,

$$0 \leqslant P(\{ \mid X - Y \mid > \varepsilon\}) \leqslant \lim_{n\to\infty} P(\{ \mid X - X_n \mid > \frac{\varepsilon}{2}\})+$$

$$+\lim_{n\to\infty} P(\{ \mid X_n - Y \mid > \frac{\varepsilon}{2}\}) = 0$$

deci $P(\{\mid X - Y \mid > \varepsilon\}) = 0$. ■

Propoziţia 4.1.2 *Dacă* $\{X_n\} \xrightarrow{prob} X,\ \ \{Y_n\} \xrightarrow{prob} Y$ *şi* $a, b \in I\!R$ *atunci* $\{aX_n + bY_n\} \xrightarrow{prob} aX + bY$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Urmând un raţionament analog cu cel folosit în proprietatea precedentă, putem scrie

$$P(\{|(aX_n + bY_n) - (aX + bY)| > \varepsilon\}) = P(\{|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)| > \varepsilon\}) \leqslant$$

$$\leqslant P(\{|a||X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\}) + P(\{|b||Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}).$$

Ţinând seama că $\{X_n\} \xrightarrow{prob} X$ şi $\{Y_n\} \xrightarrow{prob} Y$ şi trecând la limită obţinem

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|(aX_n - bY_n) - (aX + bY)| > \varepsilon\}) = 0$$

adică $\{aX_n + bY_n\} \xrightarrow{prob} aX + bY$. ■

4.2 Legea numerelor mari (forma slabă)

Un tip de probleme la limită, bazat pe noţiunea de convergenţă în probabilitate, cu semnificaţie de maximă importanţă asupra legăturii dintre conceptele de bază ale teoriei probabilităţii şi noţiunile empirice, este cel cunoscut sub denumirea de legea numerelor mari. Aceasta este un ansamblu de rezultate privind convergenţa către 1 a probabilităţilor unui şir de evenimente depinzând de un număr crescând de factori aleatori.

Teorema 4.2.1 *Fie $(Y_n)_{n\in I\!N}$ un şir de variabile aleatoare admiţând valori medii şi dispersii finite şi fie*

$$M[Y_n] = M_n < \infty, \quad D^2[Y_n] = \sigma_n^2 < \infty.$$

Dacă există o constantă M astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0, \tag{4.3}$$

atunci

$$\{Y_n\} \xrightarrow{prob} M.$$

Demonstraţie. Observăm că pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\{|Y_n - M| > \varepsilon\} \subseteq \{|Y_n - M_n| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|M_n - M| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Putem scrie

$$P(\{|Y_n - M| > \varepsilon\}) \leqslant P(\{|Y_n - M_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}) + P(\{|M_n - M| > \frac{\varepsilon}{2}\}). \tag{4.4}$$

Aplicând inegalitatea lui Cebâşev variabilei aleatoare Y_n obţinem

$$P(\{|Y_n - M_n| > \varepsilon\}) \leqslant \frac{D^2[Y_n]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}. \tag{4.5}$$

Deorece $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$ rezultă că $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ inegalitatea $|M_n - M| > \dfrac{\varepsilon}{2}$ devine imposibilă, adică

$$\forall n \geqslant N(\varepsilon)\ :\ P(\{|M_n - M| > \varepsilon\}) = 0.$$

Trecând la limită în (4.4), ţinând seama de (4.5) şi de ipotezele (4.3) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|Y_n - M| > \varepsilon\}) = 0.$$

■

Teorema 4.2.2 (forma slabă a teoremei lui Jacob Bernoulli)

Prima formulare: *Dacă A un eveniment caracterizat prin $P(A) = p \neq 0$ şi $\dfrac{S_n}{n}$ frecvenţa relativă de realizare a evenimentului A în primele n probe ale unui şir infinit de probe independente, atunci*

$$\forall\varepsilon > 0\ :\ \lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon\}) = 0$$

sau, echivalent,

$$\forall\varepsilon > 0\ :\ \lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{S_n}{n} - p| \leqslant \varepsilon\}) = 1.$$

A doua formulare: *Dacă $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ un şir de variabile aleatoare independente astfel încât $X_n : Bi(n,p), n \in I\!N$, atunci şirul de variabile aleatoare $\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\}_{n\in I\!N}$ converge în probabilitate către p, adică $\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\} \xrightarrow{prob} p$.*

Demonstrație. Demonstrăm teorema lui Bernoulli sub cea de-a doua formă. Notăm

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

şi ţinem seama că

$$M[Y_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k] = \frac{1}{n}np = p, \; D^2[Y_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2[X_k] = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n},$$

deci $\lim_{n\to\infty} M[Y_n] = p$ şi $\lim_{n\to\infty} D^2[Y_n] = 0$, ceea ce arată că ipotezele Teoremei 4.2.1 sunt satisfăcute, deci $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\} \xrightarrow{prob} p$. ■

Observaţii.

1. Prima formulare a teoremei lui Bernoulli constituie justificarea teoretică a apropierii făcute între conceptele de frecvenţă relativă şi probabilitate a unui eveniment. Ea exprimă faptul că pentru şiruri foarte mari de probe orice diferenţă sensibilă între frecvenţa relativă a unui eveniment şi probabilitatea sa devine foarte improbabilă. Deci convergenţa frecvenţelor relative către probabilitatea evenimentului nu trebuie înţeleasă ca o convergenţă numerică obişnuită; nu rezultă din teorema de mai sus şi nici nu este intuitiv acceptabilă ideea că odată cu creşterea numărului de probe valorile frecvenţelor relative sunt, obligatoriu, mai apropiate de probabilitate.

2. Cele două formulări decurg una din cealaltă dacă ţinem seama că frecvenţa absolută de realizare a lui A în n probe. Fie X_n o variabilă aleatoare repartizată $Bi(n,p)$. Dacă notăm $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, atunci $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon\}) = 0$$

ceea ce nu înseamnă altceva decât că

$$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\} \xrightarrow{prob} p.$$

3. Rezultatul teoremei constituie justificarea teoretică a definiţiei noţiunii de estimaţie a unui parametru al unei repartiţii, noţiune de mare importanţă în statistica matematică.

Teorema 4.2.3 (Cebâșev) *Dacă $(X_n)_{n\in I\!N}$ este un şir de variabile aleatoare independente două câte două, având dispersiile mărginite de o aceeaşi constantă*

$$D^2[X_n] \leqslant c^2, \quad n \in I\!N,$$

atunci

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k]| > \varepsilon\}) = 0$$

sau, echivalent,

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k]| \leqslant \varepsilon\}) = 1,$$

adică are loc convergenţa în probabilitate a şirul de variabile aleatoare,

$$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M[X_k])\} \xrightarrow{prob} 0.$$

Demonstraţie. Dacă $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M[X_k])$ atunci

$$M[Y_n] = M[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M[X_k])] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k] - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k] = 0$$

şi deoarece variabilele aleatoare X_n sunt independente două câte două, rezultă $(X_k - M[X_k])$ sunt independente două câte două şi deci

$$D^2[Y_n] = D^2[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M[X_k])] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2[X_k - M[X_k]] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D^2[X_k].$$

Aplicând inegalitatea lui Cebâşev variabilei aleatoare Y_n şi ţinând seama de ipotezele problemei, putem scrie

$$P(\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k]| > \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} D^2[X_k] < \frac{nc^2}{n^2\varepsilon^2} = \frac{c^2}{n\varepsilon^2}$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k]| > \varepsilon\}) \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{c^2}{n\varepsilon^2} = 0.$$

■

Teorema 4.2.4 (Markov) *Dacă variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ au proprietatea că:*

$$\frac{D^2[\sum_{i=1}^{n} X_i]}{n^2} \to 0,\; n \to \infty,$$

atunci are loc legea numerelor mari.

Demonstraţie. Trebuie demonstrat că şirul $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ verifică relaţia:

$$\forall\varepsilon > 0 \ : \ \lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[X_k]| \leqslant \varepsilon\}) = 1.$$

Aplicăm inegalitatea lui Cebâşev pentru variabilele aleatoare:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i/n, \ D^2[Y] = D^2[\sum_{i=1}^{n} X_i/n] = \frac{1}{n^2} D^2[\sum_{i=1}^{n} X_i] \to 0, \ n \to \infty.$$

Deci $D^2[Y] < \infty$ şi atunci are loc inegalitatea lui Cebâşev:

$$P(|Y - M[Y]| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2} D^2[\sum_{i=1}^{n} X_i].$$

Dar $\frac{1}{n^2} D^2[\sum_{i=1}^{n} X_i] \to 0$, dacă $n \to \infty$. Trecând la limită în inegalitatea precedentă, obţinem afirmaţia teoremei. ∎

Observaţia 4.2.1 În cazul particular când variabilele aleatoare sunt independente, condiţia din enunţ se scrie:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} D^2[X_i]}{n} \to 0, \ n \to \infty.$$

Teorema 4.2.5 (Hincin) *Dacă $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ este un şir de variabile aleatoare independente două câte două urmând aceeaşi repartiţie şi având dispersii finite, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - M| > \varepsilon\}) = 0.$$

unde $M = M[X_n], n \in I\!N$.

Demonstraţie. Dacă variabila aleatoare $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ urmează aceeaşi repartiţie, rezultă $D^2[X_n] = \sigma^2, n \in I\!N$, ceea ce implică satisfacerea ipotezelor Teoremei lui Cebâşev. ∎

Observaţie. Acest rezultat fundamentează teoretic procesul uzual de aproximare a mediei caracteristicii studiate a unei populaţii statistice prin media atitmetică a valorilor observate. Într-adevăr, dacă $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ sunt privite ca valori potenţiale ale unei variabile aleatoare X obţinute printr-un şir de probe independente, atunci teorema arată că media aritmetică a acestora converge către $M = M[X]$.

Ca un caz particular al teoremei lui Cebâşev se obţine teorema lui Poisson.

Teorema 4.2.6 (Poisson) *Fie A un eveniment a cărui probabilitate de realizare variază pe parcursul unui şir de probe independente, astfel încât la proba de rang k, $P(A) = p_k, k = 1, 2, \ldots$ şi fie $\frac{S_n}{n}$ frecvenţa de realizare a evenimentului A în primele n probe. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{ \ | \ \frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \ | > \varepsilon\}) = 0.$$

Demonstraţie. Definim, pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots n, \ldots$ variabila aleatoare X_k ce ia valorile 1 sau 0 după cum A se realizează sau nu în proba de rang k. În consecinţă, X_k este definită

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - p_k & p_k \end{pmatrix}.$$

Notând cu S_n numărul de realizări ale lui A în primele n probe, se constată

$$f_n(A) = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Deoarece $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ sunt variabile aleatoare independente şi deoarece

$$M[X_k] = p_k, \quad D^2[X_k] = M[X_k^2] - M[X_k]^2 = p_k - p_k^2 = p_k(1 - p_k) \leqslant \frac{1}{4},$$

rezultă că şirul $\{X_n\}_{n \in I\!N}$ verifică ipotezele Teoremei lui Cebâşev şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\, |\frac{S_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \,| > \varepsilon\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\{\, |\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M[X_k] \,| > \varepsilon)\} = 0.$$

■

4.3 Aproximări pentru repartiţii discrete

Reamintim că o variabilă aleatoare binomială care ia n valori pote fi scrisă ca o sumă de n variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots X_n$,

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - p & p \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Atunci $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ este o variabilă aleatoare repartizată binomial, $Bi(n; p)$. Am văzut că o variabilă aleatoare binomială, $Bi(n; p)$, pentru valori mari ale lui n poate fi aproximată cu o variabilă aleatoare Poisson, dacă p este suficient de mic astfel încât $np = \lambda =$ constant. Vom arăta că o variabilă aleatoare binomială, $Bi(n; p)$ poate fi aproximată cu o variabilă aleatoare repartizată normal pentru orice valoare fixată a lui p şi pentru n suficient de mare.

De exemplu, aruncăm un ban de 100 de ori. Ne interesează probabilitatea ca să obţinem faţa care conţine banul de 50 de ori. Răspunsul

$$p = C_{100}^{50} \frac{1}{2^{100}} = \frac{100!}{50!50!} \frac{1}{2^{100}}$$

este nesatisfăcător deoarece nu ne dă nici o idee asupra mărimii probabilităţii. Nu putem stabili dacă această probabilitate este în jurul lui 1/2 sau 1/10 sau 1/50. Dificultatea apare în calculul lui $n!$ pentru n suficient de mare.

Problema care se pune este de a găsi o altă funcţie $h(n)$ care să constituie o bună aproximare în pentru $n!$ (o bună aproximare în sensul că $n!$ şi $h(n)$ să crească aproape la fel de repede odată cu n, sau $|n! - h(n)|$ să fie mic când n creşte sau $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{h(n)} = 1$).

Definiţia 4.3.1 *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că f şi g* sunt asimptotic egale *şi notăm $f \sim g$ dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Relaţia "f şi g sunt asimptotic egale " este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea funcţiilor neidentic nule. Proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate rezultă imediat.

De exemplu, un polinom în variabila n este asimptotic egal cu termenul său dominant.

În cele ce urmează vom încerca să găsim o funcţie $h(n)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{h(n)} = 1.$$

Expresia unei astfel de funcţii este sugerată de formula lui Stirling (vezi Anexa 2)

$$h(n) = (\frac{n}{e})^n \sqrt{n}\sqrt{2\pi}.$$

Pare mai neplăcut să calculăm $h(n)$ decât $n!$, dar este mult mai uşor deoarece puterile sunt mai lesne de calculat. Să aplicăm în cazul exemplului dat

$$p = C_{100}^{50} \frac{1}{200} = \frac{100!}{50!50!} \frac{1}{2^{100}},$$

$$p \sim \frac{(\frac{100}{e})^{100} \sqrt{100}\,\sqrt{2\pi}}{(\frac{50}{e})^{100}\; 50\; 2\pi} \frac{1}{2^{100}} = (\frac{100}{50})^{100} \frac{10}{50\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{100}} = \frac{2^{100}}{5\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{100}} =$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} = 0,0797884 \approx 0,08.$$

Teorema 4.3.1 (teorema locală Moivre-Laplace).

Presupunem $0 < p < 1$ şi $q = 1 - p$ iar

$$x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\ ,\ 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{4.6}$$

Dacă M o constantă pozitivă arbitrară fixată, atunci pentru acei k pentru care

$$|x_{n,k}| \leqslant M$$

avem

$$C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}. \tag{4.7}$$

(Convergenţa este în raport cu n şi este uniformă relativ la k.)

Demonstrație. Din
$$x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$
rezultă $k = np + \sqrt{npq}\, x_{n,k}$, adică $n - k = nq - \sqrt{npq} x_{n,k}$. Deoarece $|x_{n,k}| \leqslant M$ avem
$$\begin{cases} \dfrac{k}{np} = 1 + \dfrac{\sqrt{npq}}{np}\, x_{n,k} \to 1 \text{ şi deci } k \sim np, \\ \dfrac{n-k}{nq} = 1 - \dfrac{\sqrt{npq}}{nq}\, x_{n,k} \to 1 \text{ şi deci } n-k \sim nq. \end{cases} \tag{4.8}$$
Folosind formula lui Stirling putem scrie
$$C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}\sqrt{2\pi}}{(\frac{k}{e})^k \sqrt{k}\sqrt{2\pi} (\frac{n-k}{e})^{n-k} \sqrt{n-k}\sqrt{2\pi}} p^k q^{n-k} \sim \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \varphi(n,k),$$
unde
$$\varphi(n,k) = \frac{n^n}{k^n (n-k)^{n-k}} p^k q^{n-k} = (\frac{np}{k})^k (\frac{nq}{n-k})^{n-k}.$$
Deoarece $k \sim np$ şi $n - k \sim nq$ rezultă că
$$C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, \varphi(n,k).$$
Demonstrăm în continuare că
$$\varphi(n,k) \sim e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}.$$
Folosim dezvoltarea în serie Taylor a lui $\ln(1+x)$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad \text{pentru } |x| < 1$$
şi obţinem
$$\ln(\frac{np}{k})^k = k\ln(\frac{np}{k}) \sim k\ln(\frac{k - \sqrt{npq}x_{n,k}}{k}) = k\ln(1 - \frac{\sqrt{npq}x_{n,k}}{k}) =$$
$$= k(-\frac{\sqrt{npq}}{k}x_{n,k} - \frac{npq}{2k^2}x_{n,k}^2 - \ldots),$$
$$\ln(\frac{nq}{n-k})^{n-k} = (n-k)\ln(\frac{nq}{n-k}) \sim (n-k)\ln(\frac{n-k+\sqrt{npq}x_{n,k}}{n-k}) =$$
$$= (n-k)\ln(1 + \frac{\sqrt{npq}x_{n,k}}{n-k}) = (n-k)(\frac{\sqrt{npq}}{n-k}x_{n,k} - \frac{npq}{2(n-k)^2}x_{n,k}^2 + \ldots),$$
deoarece
$$|\frac{\sqrt{npq}}{k}x_{n,k}| < 1 \text{ şi } |\frac{\sqrt{npq}}{n-k}x_{n,k}| < 1 \tag{4.9}$$
sunt safisfăcute pentru n suficient de mare pentru care $|x_{n,k}| < M$. Deci
$$\ln\varphi(n,k) = \ln(\frac{np}{k})^k + \ln(\frac{nq}{n-q})^{n-k} \sim k(-\frac{\sqrt{npq}}{k}x_{n,k} - \frac{npq}{2k^2}x_{n,k}^2 - \ldots) +$$

$$+(n-k)(\frac{\sqrt{npq}}{n-k}x_{n,k} - \frac{npq}{2(n-k)^2}x_{n,k}^2 + \ldots) =$$
$$= (-\sqrt{npq}x_{n,k} - \frac{npq}{2k}x_{n,k}^2 - \ldots) + (\sqrt{npq}x_{n,k} - \frac{npq}{2(n-k)}x_{n,k}^2 + \ldots) =$$
$$= \frac{npq}{2}x_{n,k}^2(-\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k}) + \ldots = -\frac{n^2pq}{2k(n-k)}x_{n,k}^2 + \ldots$$

Justificăm de ce neglijăm termenii din dezvoltare de grad mai mare decât doi pentru $n \to \infty$. Când n este suficient de mare, cele două cantităţi din (4.9) sunt mai mici decât $2/3$ şi prin urmare Lema A2.1 din Anexa 2 este aplicabilă şi contribuţia acestora la cele două serii este mărginită de

$$k|\frac{\sqrt{npq}}{k}x_{n,k}|^3 = (n-k)|\frac{\sqrt{npq}}{(n-k)}x_{n,k}|^3.$$

Deoarece $pq < 1$ şi $|x_k| \leqslant M$ aceasta nu depăşeşte

$$\frac{n^{\frac{2}{3}}}{k^2}M^3 + \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n-k)^2}M^3,$$

care în mod evident tinde la zero când $n \to \infty$ datorită relaţiilor (4.8). Astfel, folosind aceste relaţii, rezultă

$$\ln\varphi(n,k) \sim \frac{n^2pq}{2npnq}x_{n,k} = -\frac{x_{n,k}^2}{2}.$$

Aceasta este echivalentă cu

$$\varphi(n,k) \sim e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}$$

şi de aici rezultă (4.7). ■

Observaţia 4.3.1 Aproximarea este utilizată dacă n este suficient de mare astfel încât $np \geqslant 5$ şi $n(1-p) \geqslant 5$.

4.4 Convergenţa în repartiţie. Teorema limită centrală

Unele probleme în teoria probabilităţilor impun studierea unor sume cu un număr foarte mare de variabile aleatoare. Teorema limită centrală stabileşte condiţiile în care repartiţia limită a sumelor considerate este normală.

Teorema 4.4.1 (Moivre-Laplace) *Fie A un eveniment care are probabilitatea de realizare $p = P(A)$ într-un şir de probe independente. Dacă S_n este numărul de realizări ale lui A în n probe, atunci oricare ar fi a şi b, $a < b$,*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \quad (4.10)$$

Demonstrație. Fie k o valoare posibilă a lui S_n astfel încât $S_n = k$ înseamnă

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = x_{n,k}$$

conform relaţiei (4.6). Atunci probabilitatea evenimentului din dreapta formulei (4.10) este

$$\sum_{a<x_{n,k}<b} P(\{S_n = k\}) = \sum_{a<x_{n,k}<b} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Ţinând seama de faptul că

$$x_{n,k+1} - x_{n,k} = \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}},$$

obţinem

$$\sum_{a<x_{n,k}<b} P(\{S_n = k\}) \sim \frac{1}{\mathcal{K}} \sum_{a<x_{n,k}<b} e^{-\frac{x^2}{2}} (x_{n,k+1} - x_{n,k}). \tag{4.11}$$

Corespondenţa dintre k şi $x_{n,k}$ este bijectivă şi atunci când k variază de la 0 la n, $x_{n,k}$ variază în intervalul $[-\sqrt{\frac{np}{q}}, \sqrt{\frac{nq}{p}}]$, nu continuu, cu pasul $x_{n,k+1} - x_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$. Pentru n suficient de mare intervalul va conţine $[a, b)$ iar punctele $x_{n,k}$ vor fi în interiorul lui $[a, b)$, împărţindu-l în intervale echidistante de lungime $\frac{1}{\sqrt{npq}}$. Presupunem că cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui k ce satisfac condiţiile $a \leqslant x_{n,k} < b$ sunt, respectiv, j şi l şi deci vom avea

$$x_{j-1} < a < x_j < x_{j+1} < \ldots < x_{l-1} < x_l < b < x_{l+1},$$

şi suma din (4.11) se poate scrie

$$\sum_{k=j}^{l} \varphi(x_{n,k})(x_{n,k+1} - x_{n,k}),$$

unde

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mathcal{K}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Aceasta este suma Riemann pentru integrala definită $\int_a^b \varphi(x)dx$. Făcând $n \to \infty$, divizarea devine din ce în ce mai fină şi suma converge la integrala dată. Rămâne de determinat constanta $\mathcal{K}$. În formula

$$\lim_{n\to\infty} P(\{a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{4.12}$$

facem $a = -b$ şi atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(-b < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b) = \frac{1}{\mathcal{K}} \int_{-b}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{4.13}$$

Dacă notăm
$$X = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}},$$
atunci
$$M[X] = 0, \;\; D^2[X] = 1$$
şi obţinem
$$P(|\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}| \leqslant b) \geqslant 1 - \frac{1}{b^2}. \tag{4.14}$$
Combinând relaţiile (4.13) şi (4.14) obţinem relaţia
$$1 - \frac{1}{b^2} \leqslant \frac{1}{\mathcal{K}} \int_{-b}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant 1$$
şi făcând $b \to \infty$ obţinem
$$\mathcal{K} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$
deci constanta $\mathcal{K}$ din formula lui Stirling este $\sqrt{2\pi}$. ∎

Înainte de a da o nouă formulare teoremei Moivre-Laplace, introducem noţiunea de convergenţă în repartiţie.

Definiţia 4.4.1 *Fie $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ un şir de variabile aleatoare şi $\{F_n\}_{n\in I\!N}$ şirul funcţiilor de repartiţie corespunzătoare. Dacă şirul funcţiilor de repartiţie $\{F_n\}_{n\in I\!N}$ converge către o funcţie de repartiţie F în fiecare punct de continuitate x_0 al funcţiei de repartiţie F corspunzătoare variabilei aleatoare X, adică dacă*
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) = F(x_0)$$
aatunci spunem că şirul $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ converge în repartiţie *către X şi se notează $\{X_n\} \stackrel{rep}{\longrightarrow} X$.*

Observatii.

1. Deoarece pot exista mai multe variabile aleatoare care au aceeaşi funcţie de repartiţie, rezultă din definiţie că limita unui şir de variabile aleatoare convergent în repartiţie nu este unică.

2. Un exemplu de astfel de convergenţă este următorul: dacă $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ este un şir de variabile aleatoare repartizată $Bi(n, \frac{\lambda}{n})$, atunci $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ converge în repartiţie către variabila aleatoare X repartizată Poisson de parametru λ. (Legătura între repartiţia binomială şi repartiţia Poisson).

Următoarele rezultate stabilesc legătura între cele două moduri de convergenţă.

Teorema 4.4.2 *Dacă $\{X_n\} \stackrel{prob}{\longrightarrow} X$, atunci $\{X_n\} \stackrel{rep}{\longrightarrow} X$.*

Demonstrație. Din definiţia convergenţei în probabilitate, $\{X_n\} \stackrel{prob}{\longrightarrow} X$, rezultă că

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

Fie F_n funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X_n, F funcţia de repartiţie a lui X şi x_0 un punct de continuitate a lui F. Atunci

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |F(x_0 + \delta) - F(x_0 - \delta)| \leqslant \varepsilon.$$

Din

$$F(x_0 - \delta) = P(\{X < x_0 - \delta\}) = P(\{X < x_0 - \delta\} \cap (\{X_n < x_0\} \cup \{X_n \geqslant x_0\})) =$$
$$= P(\{X < x_0 - \delta\} \cap \{X_n < x_0\}) + P(\{X < x_0 - \delta\} \cap \{X_n \geqslant x_0\}) \leqslant$$
$$\leqslant P(\{X_n < x_0\}) + P(\{|X_n - X| > \delta\}) = F_n(x_0) + P(\{|X_n - X| > \delta\}) = 0,$$

şi ţinând seama că $\{X_n\} \stackrel{prob}{\longrightarrow} X$, adică

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| \geqslant \delta\}) = 0,$$

rezultă

$$F(x_0 - \delta) \leqslant \lim_{n\to\infty} F_n(x_0).$$

Analog

$$F(x_0 + \delta) \geqslant \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) = F(x_0).$$

■

Observație. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Ilustrăm aceasta printr-un exemplu. Fie variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

şi variabila aleatoare $Y = 1 - X$. Variabilele aleatoare X şi Y au aceeaşi funcţie de repartiţie. într-adevăr,

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dacă} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dacă} \quad x > 1 \end{cases}$$

şi $|Y - X| = |1 - 2X| = 1$ indiferent de valoarea variabilei aleatoare X. Definim şirul de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ unde $X_n = Y$. Rezultă că $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ converge în repartiţie către X. Deoarece $|X_n - X| = 1$ rezultă că $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ nu converge în probabilitate către X. Există totuşi un caz particular în care se poate stabili şi legătura inversă.

Teorema 4.4.3 *Dacă C este o constantă reală şi dacă $\{X_n\} \xrightarrow{rep} C$, atunci $\{X_n\} \xrightarrow{prob} C$.*

Demonstraţie. Punând $X = C$ am definit o variabilă aleatoare a cărei repartiţie este

$$C : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deci funcţia de repartiţe a variabilei aleatoare X este

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \leqslant c, \\ 1, & \text{dacă} \quad x > c. \end{cases}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci

$$P(\{\mid X_n - c \mid \geqslant \varepsilon\}) = 1 - P(\{c - \varepsilon < X_n < c + \varepsilon\}) =$$

$$= 1 - P(\{X_n < c + \varepsilon\}) + P(\{X_n < c - \varepsilon + 0\}) \leqslant 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n(c - \varepsilon + 0)$$

Punctul $x = c$ este punct de discontinuitate pentru F şi

$$F(c + \alpha) - F(c - \alpha) = 1,$$

deci

$$P(\{|X_n - c| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant F(c + \alpha) - F(c - \alpha) - F_n(c + \varepsilon) + F_n(c - \varepsilon + 0).$$

Dar $c + \varepsilon$ şi $c - \varepsilon + 0$ sunt puncte de continuitate ale lui F şi, prin ipoteză, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ pentru orice punct de continuitate x a lui F, deci

$$\lim_{n\to\infty} F_n(c + \varepsilon) = F(c + \varepsilon),$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(c - \varepsilon + 0) = F(c - \varepsilon + 0) = F(c - \varepsilon),$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - C| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

ceea ce exprimă convergenţa în probabilitate a lui X_n către C. ■

Vom da acum o formulare mai generală a teoremei Moivre-Laplace. Notăm cu

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad n \geqslant 1,$$

unde $X_j, j = \overline{1,n}$, sunt variabile aleatoare independente Bernoulli. Ştim că

$$M[X_j] = p, \quad D^2[S_n] = npq, \quad j = \overline{1,n},$$

şi pentru orice n,

$$M[S_n] = np, \quad D^2[S_n] = npq.$$

Notăm

$$X_j^* = \frac{X_j - M[X_j]}{D[X_j]}, \quad S_n^* = \frac{S_n - M[S_n]}{D[S_n]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j^*. \tag{4.15}$$

S_n^* este o variabilă aleatoare şi se numeşte variabilă aleatoare normalizată. Avem pentru fiecare j şi n

$$M[X_j^*] = 0, \quad D^2[X_j^*] = 1.$$

$$M[S_n^*] = 0, \quad D^2[S_n^*] = 1.$$

Transformarea liniară care duce X_j în X_j^* sau S_n în S_n^* are ca scop aducerea lor la o variabilă aleatoare cu media 0 şi dispersia 1. Fiecare S_n^* este o variabilă aleatoare care ia ca valori

$$x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Aceasta este tocmai $x_{n,k}$ din Teorema Moivre-Laplace şi

$$P(\{S_n^* = x_{n,k}\}) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Dacă utilizăm funcţia de repartiţie corespunzătoare

$$P(\{S_n^* < x\}) = F_n(x),$$

iar dacă F este funcţia de repartiţie normală standard, atunci teorema Moivre-Laplace se poate scrie sub o formă mai elegantă şi anume

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

■

Observaţie. Teorema poate fi extinsă în următorul sens: fie $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ un şir de variabile aleatoare independente având aceeaşi repartiţie care nu trebuie să fie specificată. Trebuie, în schimb, ca $M[X_j] = m < \infty$ şi $D^2[X_j] = \sigma^2 < \infty$. Teorema lui Laplace are loc şi în aceste condiţii.

Teorema 4.4.4 *Pentru sumele S_n în condiţiile generalizate de mai sus şi pentru $a < b$ are loc*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{a < \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{4.16}$$

Există însă o situaţie în care teorema limită centrală are o demonstraţie banală. Este cazul în care variabilele aleatoare $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ sunt normale şi independente. Atunci $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ este tot o variabilă aleatoare normală cu media nm şi dispersia $n\sigma^2$ conform Teoremei 3.6.2.

Exemplul 4.4.1 *Determinarea volumului unei selecţii bernoulliene care să permită aplicarea legii numerelor mari.*

Legea numerelor mari (Teorema 4.2.2) afirmă că

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|f_n(A) - p| > \varepsilon\}) = 0,$$

unde $f_n(A)$ este frecvenţa relativă de realizare a evenimentului A în primele n probe independente.

$$f_n(A) = \frac{k}{n} = \frac{S_n}{n} \text{ unde } S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad X_i : Bi(n,p), \ i = \overline{1,n},$$

$$M[\frac{S_n}{n}] = p,\ D^2[\frac{S_n}{n}] = \frac{pq}{n},$$

$$P(\{|\frac{S_n}{n} - p|\}) \geqslant 1 - \frac{D^2[\frac{S_n}{n}]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

$$P(\{|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon\}) < \frac{pq}{n\varepsilon^2} < \delta,$$

δ fiind dat, relaţia ne permite să determinăm o margine inferioară pentru volumul selecţiei n, deoarece

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2} < \delta \text{ implică } n > \frac{pq}{\delta\varepsilon^2} \text{ şi } \max_p \frac{pq}{\delta\varepsilon^2} = \frac{1}{4\delta\varepsilon^2},$$

adică

$$n > \frac{1}{4\delta\varepsilon^2}.$$

Această margine inferioară este mai mult decât este necesar pentru a putea aplica Teorema Moivre-Laplace.

$$P(\{|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon\}) = P(\{|\frac{S_n - np}{n}| > \varepsilon\}) =$$

$$= P(\{|\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}| > \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\}) = 1 - P(\{|\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}| \leqslant \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\}) =$$

$$= 1 - [F(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) - F(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})] = 1 - 0,5 - \Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) + 0,5 - \Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$$

$$= 1 - 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) < \delta$$

Notăm $z = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$; problema este să se determine z astfel încât $1 - 2\Phi(z) < \delta$ adica $\Phi(z) = \frac{1-\delta}{2}$. Determinăm z_0 din relaţia $\Phi(z_0) = \frac{1-\delta}{2}$ şi n astfel încât $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = z$. Rezultă $n = \frac{z^2 pq}{\varepsilon^2}$ şi deci $\max \frac{z^2 pq}{\varepsilon^2} = \frac{z^2}{4\varepsilon^2}$, adică

$$n \geqslant \frac{z^2}{4\varepsilon^2}.$$

Într-adevăr, dacă luăm $\varepsilon = 0,02$ şi $\delta = 0,05$ obţinem, conform Legii numerelor mari

$$n > \frac{1}{4 \times 0,05 \times (0,02)^2} = 125000.$$

Folosind Teorema lui Moivre-Laplace, $\Phi(z) = \frac{1 - 0,05}{2} = 0,475$, adică $z \geqslant 1,96$ şi deci $n > \frac{(1,96)^2}{4(0,02)^2} = 2401$.

Exemplul 4.4.2 O tensiune constantă, dar necunoscută, trebuie să fie măsurată. Fiecare măsurătoare X_j se face cu o eroare N_j faţă de valoarea exactă v. Eroarea N_j are media egală cu zero şi dispersia egală cu 1 microvolt.

$$X_j = v + N_j$$

Presupunem că eroarea este o variabilă aleatoare independentă. Câte măsurători sunt necesare ca media măsurătorilor să fie cu cel mult $\varepsilon = 1$ mai mare decât valoarea exactă cu o probabilitate de 0,99?

Fiecare măsurătoare X_j are v şi dispersia 1, astfel încât folosind legea numerelor mari obţinem:

$$1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{n} = 0,99.$$

Aceasta implică $n = 100$. Astfel dacă repetăm măsurătorarea de 100 de ori şi calculăm media în mod normal în 99% din situaţii media obţinută va diferi cu cel mult 1 microvolt de valoarea exactă.

Exemplul 4.4.3 Pentru a estima probabilitatea unui eveniment A, se efectuează un şir de experienţe Bernoulli şi se observă frecvenţa relativă a evenimentului A. De câte ori trebuie repetat evenimentul A astfel încât cu o probabilitate de $0,95$ frecvenţa relativă să difere de $p = P(A)$ cu $0,01$?

Fiind experienţe Bernoulli, media $m = p$ şi dispersia $D^2[X] = p(1-p)$. Evident că $p(1-p) \leqslant 1/4$ pentru $0 \leqslant p \leqslant 1$. Atunci rezultă

$$P(|f_n(A) - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D^2[X]}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Pentru $\varepsilon = 0,01$ obţinem

$$1 - 0,95 = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Rezolvăm şi obţinem $n = 50000$. Această evaluare s-a obţinut utilizând inegalitatea lui Cebâşev care dă nişte evaluări destul de grosiere. Vom obţine o altă evaluare utilizând Teorema Moivre-Laplace. Deoarece $f_n(A) = \frac{S_n}{n}$ obţinem:

$$P(\{|\frac{S_n}{n} - p| < \varepsilon\}) = P(\{|\frac{S_n - np}{n}| < \varepsilon\}) = 1 - 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}})$$

Această probabilitate nu poate fi calculată deoarece p este necunoscut. Mai mult, deoarece $p(1-p) \leqslant 1/4$pentru $0 \leqslant p \leqslant 1$, avem $\sqrt{p(1-p)} \leqslant 1/2$, deci $\Phi(x)$ descreşte când argumentul creşte.

$$P(|f_n(A) - p| \geqslant \varepsilon) < 1 - 2\Phi(2\varepsilon\sqrt{n})$$

Vrem ca probabilitatea de mai sus să fie egală cu 0,95. Aceasta implică $\Phi(2\varepsilon\sqrt{n}) = (1 - 0,95)/2 = 0,25$. Din tabele obţinem $2\varepsilon\sqrt{n} = 1,95$. Rezolvând, obţinem $n = (0,98)^2/\varepsilon^2 = 9506$.

Exemplul 4.4.4 Să se determine numărul minim de aruncări ale unei monede care să asigure cel puţin cu o probabilitate de 0,9 ca diferenţa dintre frecvenţa relativă obţinută şi probabilitatea de apariţie a unei feţe să fie mai mică în valoare absolută decât 0,2.

Folosind Teorema 4.2.2 obţinem,

$$P(\{|f_n(A) - \frac{1}{2}| < 0,2\}) > 0,9. \tag{4.17}$$

Conform Exemplului 4.4.4 avem $\varepsilon = 0,2,\ \delta = 1 - 0,9 = 0,1$ şi deci

$$n > \frac{1}{4\delta\varepsilon^2} = \frac{1}{4 \times 0,1 \times (0,2)^2} = 62,5, \quad n > 63.$$

Cel puţin 63 de aruncări asigură

$$P(\{|\frac{S_{63}}{63} - \frac{1}{2}| < 0,2\}) > 0,9.$$

Putem determina intervalul în care variază frecvenţa relativă astfel încât (4.17) să fie satisfăcută şi deci frecvenţa absolută pentru un anumit $n \leqslant 63$,

$$|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}| < 0,2 \iff 0,3 < \frac{k}{n} < 0,7 \iff n \times 0,3 < k < n \times 0,7.$$

Dacă $n = 63$ rezultă $18 < k < 44$. Deci din 63 aruncări, numărul aruncărilor reuşite este cuprins între 18 şi 44, atunci (4.17) este satisfăcută, adică am determinat intervalul în care se situează numărul cazurilor favorabile apariţiei unei aceleiaşi feţe, aceasta având loc cu probabilitatea de cel puţin 0,9.

Exemplul 4.4.5 Un zar se aruncă de 1200 de ori. Să se determine probabilitatea minimă ca numărul de apariţii ale feţei cu i puncte, i fixat, să fie cuprins între 150 şi 250. Dar între 100 şi 250 ?

Constatăm că $p = \frac{1}{6}$ şi $n = 1200$. Deci

$$|\frac{k}{1200} - \frac{1}{6}| < \varepsilon \iff \frac{1}{6} - \varepsilon < \frac{k}{1200} < \frac{1}{6} + \varepsilon$$

echivalent cu

$$200 - 1200 \times \varepsilon < k < 200 + 1200 \times \varepsilon.$$

Să cercetăm dacă această situaţie este compatibilă cu datele problemei, adică dacă sistemul

$$\begin{cases} 200 - 1200\varepsilon = 150, \\ 200 + 1200\varepsilon = 250, \end{cases}$$

are soluţie. Se obţine $\varepsilon = \frac{50}{1200} = \frac{1}{24}$. în al doilea caz, sistemul devine

$$\begin{cases} 200 - 1200\varepsilon = 100, \\ 200 + 1200\varepsilon = 250, \end{cases}$$

şi este incompatibil, obţinând, din fiecare ecuaţie, $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{12}$ şi $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{24}$. Pentru $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{12}$ obţinem intervalul $(100, 300)$, iar pentru $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{24}$ obţinem intervalul $(150, 250)$. Cum

$$P(\{100 < \frac{S_n}{1200} < 250\}) > P(\{150 < \frac{S_n}{1200} < 250\}) > 1 - \frac{1}{24},$$

alegem $\varepsilon = \dfrac{1}{24}$ şi deci

$$\delta = \frac{1}{4\varepsilon^2 n} = \frac{1}{4\frac{1}{24^2}1200} = 0.12.$$

Deci, cu probabilitatea de cel puţin 0,88, numărul de apariţii ale unei feţe a zarului cu i puncte este în intervalul $(150, 250)$ dacă aruncăm zarul de 1200 ori. Pe de altă parte, ţinând seama de regula celor 3σ de la repartiţia normală,

$$P(\{-3 < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant 3\}) = 0,9973,$$

ceea ce înseamnă că probabilitatea ca numărul de apariţii ale unei feţe a zarului să fie în intervalul $(161, 239)$ este de 0.9973. Se poate calcula exact probabilitatea ca numărul de apariţii ale unei feţe să fie cuprins între 100 şi 250. Deorece $np = 200$ şi $\sqrt{npq} = 12,91$ obţinem

$$P(\{100 < S_n < 250\}) = P(\{-100 < S_n - np < 50\}) =$$
$$= P(\{-\frac{100}{12,91} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{50}{12,91}\}) =$$
$$= P(\{-7,75 < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < 3,873\}) = F(3,873) - F(-7,75)$$

şi ţinând seama de Relaţia (3.14) din Capitolul 3,

$$P(\{100 < S_n < 250\}) = \Phi(3,873) + \Phi(7,75) =$$

$$= 0,499946 + 0,499997 = 0,9999943,$$

rezultat în concordanţă cu cel anterior.

Exemplul 4.4.6 Să se calculeze probabilitatea opririi simultane a trei maşini din zece care lucrează independent într-o fabrică în cazul în care probabilitatea defectării unei maşini este $p = 0,2$.

Numărul de maşini defecte este o variabilă aleatoare cu repartiţie binomială:

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_n^k (0,2)^k (0,8)^{10-k} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,10}$$

Se cere probabilitatea

$$P_{10,3} = C_{10}^3 (0,2)^3 (0,8)^7 = 0,2.$$

Folosind Teorema 4.3.1 putem aproxima

$$x_{10,3} = \frac{3 - \frac{10}{3}}{\sqrt{10\frac{1}{2}\frac{1}{2}}} = -0,21$$

şi obţinem

$$C_{10}^{3}(0,2)^3(0,8)^7 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}\frac{1}{2}10}} e^{-\frac{(0,21)^2}{2}} \approx 0,246.$$

Diferenţa 0,246-0,2=0,046 este considerată ca o aproximaţie cu eroare mare. (Am văzut că aplicăm formula dacă $np \geqslant 5$ şi $nq \geqslant 5$, dar în cazul acesta $np = 10 \times 0,2 = 2 < 5$.)

Dacă am avea 25 de maşini şi calculam probabilitatea opririi simultane a opt maşini (observăm că $np = 25 \times 0,2 = 5$ şi $nq = 25 \times 0.8 = 20 > 5$), atunci

$$P_{25,8} = C_{25}^{8}(0,2)^8(0,8)^{17} = 0,06234.$$

Conform Teoremei 4.3.1

$$x_{25,8} = \frac{8 - 25 \times 0,2}{\sqrt{25 \times 0,2 \times 0,8}} = 1,5,$$

$$C_{25}^{8}(0,2)^8(0,8)^{17} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0,2 \times 0,8}} e^{-\frac{(1,5)^2}{2}} = 0,06475.$$

Diferenţa

$$0,06475 - 0,06234 = 0,00241$$

de ordinul miimilor este considerată satisfăcătoare din punct de vedere practic.

Exemplul 4.4.7 O centrală electrică trebuie să deservească o reţea de 10000 de becuri medii. Probabilitatea aprinderii unui bec într-o noapte de iarnă, care constituie perioada de vârf a consumului de energie electrică, este de 0,7. Să se facă analiza economică necesară proiectării centralei.

Pentru a determina capacitatea centralei pot fi adoptate criterii diferite:

- să construim centrala astfel încât în orice moment cele 10000 de becuri să funcţioneze;
- să se determine capacitatea centralei astfel încât cu o probabilitate suficient de mare, consumul obişnuit să fie asigurat cu energia necesară bunei funcţionări.

Fie X o variabilă aleatoare care ia ca valori numărul de becuri care pot fi aprinse într-o noapte. Această variabilă aleatoare are o repartiţie binomială cu

$$n = 10000, \quad p = 0,7, \quad M[X] = np = 7000,$$

$$D^2[X] = npq = 2100, \quad D[X] = 45,83 \approx 46,$$

$$P(\{|X - M[X]| \leqslant k \times 46\}) \geqslant 1 - \frac{2100}{k^2 2100} = 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2}.$$

Pentru $k = 2$ obţinem

$$P(\{|X - 700| \leqslant\}) \geqslant \frac{3}{4} = 0,75.$$

Dacă centrala se construieşte pentru o capacitate de 7092 becuri atunci, cu o probabilitate de cel puţin 0,75, funcţionarea ei este normală. Rezultatul nu este convenabil. La fel,

$$k = 3, \quad P(\{|X - 7000| \leqslant 138\}) \geqslant \frac{8}{9} = 0,89;$$

$$k = 4, \quad P(\{|X - 7000| \leqslant 184\}) \geqslant \frac{15}{16} = 0,94.$$

Dacă construim centrala pentru o capacitate de 7184 becuri medii atunci, cu probabilitatea de cel puţin 0,94, funcţionarea va fi normală.

Să determinăm capacitatea centralei astfel încât cu o probabilitate de
0,99 funcţionarea să fie normală. Folosim Teorema Moivre-Laplace cu $a = -\infty$.

$$P(\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\}) = 0,999 = F(b) = 0,5 + \Phi(b)$$

$$0,5 + \Phi(b) = 0,999 \Longleftrightarrow \Phi(b) = 0,499 \Longleftrightarrow b = 3,09$$
$$\frac{S_n - 10000 \times 0,7}{\sqrt{10000 \times 0,7 \times 0,3}} \leqslant 3,09$$

$S_n = 7142$ se numeşte coeficient de *simultaneitate* şi este indicat să se facă construcţia centralei pentru el. Dacă centrala se construieşte pentru 10000 de becuri medii, cu o probabilitate de 0.99, un număr de 10000-7142=2858 becuri rămân nefolosite.

Exemplul 4.4.8 O fabrică are în stoc 1660 tone dintr-o materie primă. ştiind că zilnic se consumă în medie 13,33 t cu abaterea 1,2 t, cu ce probabilitate această cantitate ajunge pentru 4 luni.

Notăm cu X_i variabila aleatoare care ia ca valori consumul zilei $i, i = \overline{1,120}$. Avem

$$M[X_i] = 13,33, \quad D[X_i] = 1,2.$$

În 120 de zile se consumă $X = \sum_{i-1}^{120} X_i$. Ne aflăm în cazul general în care nu se cunoaşte repartiţia variabilei aleatoare X_i. Să determinăm $P(\{X < 1660\})$.

$$M[X] = nm = 120 \times 13,33 = 1599,6, \quad D[X] = \sqrt{n\sigma^2} = \sqrt{n}\sigma = 13,1,$$

$$P(\{X < 1660\}) = P(\{\frac{X - 1599,6}{13,1} < \frac{1660 - 1599,6}{13,1}\}) = 0,5 + \Phi(4,6) = 0,999.$$

Se poate deci presupune că aproape sigur cantitatea de materie primă este suficientă.

Exemplul 4.4.9 O sursă radioactivă este modelată după o lege Poisson şi emite 30 particule/oră. Care este probabilitatea ca în 10 minute să fie emise cel mult 10 particule ?

Notăm $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$, unde X_i sunt variabile aleatoare repartizate Poisson şi independente. Din condiţiile

$$\lambda = M[X] = \sum_{i=1}^{10} M[X_i] = nM[X_i]$$

şi deci $M[X_i] = \frac{\lambda}{n}$ şi

$$\lambda = D^2[X] = \sum_{i=1}^{10} D^2[X_i] = nD^2[X_i],$$

adică $D^2[X_i] = \frac{\lambda}{n}$, unde λ este parametrul repartiţiei Poisson ce trebuie determinat din condiţia $\lambda = 30\frac{1}{6} = 5$ particule/10 minute. După (4.16)

$$P(\{X \leqslant 10\}) = P(\{\frac{X - n\frac{\lambda}{n}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \leqslant \frac{10-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\}) = 0,5 + \Phi(\frac{10-5}{\sqrt{5}}) = 0,98713.$$

Exemplul 4.4.10 Fie $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ un şir de variabile aleatoare independente

$$X_n : \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{n} & 1-\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad P(\{X_1 = 0\}) = 1, \quad n = 2, 3 \ldots .$$

Să se arate că $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ se supune Legii numerelor mari.

Verificăm condiţiile Teoremei 4.2.1.

$$M[X_n] = 0, \quad D^2[X_n] = M[X_n^2] - (M[X_n])^2,$$

$$X_n^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{2}{n} & \frac{2}{n} \end{pmatrix}, \quad M[X_n^2] = 2, \quad D^2[X_n] = 2$$

Conform Teoremei 4.2.1, $\{X_n\} \xrightarrow{prob} 0$. Dacă notăm

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

atunci

$$M[Y_n] = 0, \quad D^2[Y_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2[X_k] = \frac{2(n-1)}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2n-1}{n^2} \to 0$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|Y_n - M[Y_n]| < \varepsilon\}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \{Y_n\} \xrightarrow{prob} 0.$$

4.5 Legătura dintre convergenţa şirurilor funcţiilor de repartiţie şi convergenţa şirurilor funcţiilor caracteristice

Teorema 4.5.1 *Fie F_n un şir de funcţii de repartiţie şi F o funcţie de repartiţie. Dacă $F_n \to F$ în orice punct de continuitate a lui F, rezultă că pentru orice $f : I\!R \to I\!R$ continuă şi mărginită are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I\!R} f(x)dF_n(x) = \int_{I\!R} f(x)dF(x)$$

Demonstraţie. Fie $M = \sup\limits_{x\in I\!R} |f(x)|$ şi fie a, b puncte de continuitate ale lui F încât

$$F(a) \leqslant \varepsilon \text{ şi } 1 - F(b) \leqslant \varepsilon.$$

Deoarece pe un interval închis $[a, b]$ orice funcţie continuă este şi uniform continuă, alegem punctele de continuitate ale lui F, x_k cu $0 \leqslant k \leqslant s$ astfel încât

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b$$

şi

$$|f(x) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon, \ \ \forall x \in [x_k, x_{k+1}], \ \ 0 \leqslant k \leqslant s - 1.$$

Introducem funcţia auxiliară de salturi f_ε definită astfel:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x_k), & \text{dacă} \quad x_k \leqslant x < x_{k+1}, \\ 0, & \text{dacă} \quad x < x_0, x \geqslant x_s, \end{cases} \quad 0 \leqslant k \leqslant s - 1.$$

Are loc, evident,

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \ \ \forall x \in [a, b].$$

Pentru orice funcţie de repartiţie G are loc

$$\int_{I\!R} f_\varepsilon(x)dg(x) = \sum_{k=0}^{s-1} f(x_k)(G(x_{k+1}) - G(x_k)).$$

Deoarece în $x = x_k, 0 \leqslant k \leqslant s$, F este continuă, $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I\!R} f_\varepsilon(x)dF_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{s-1} f(x_k)(F_n(x_{k+1}) - F(x_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{s-1} f(x_k)(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = \int_{I\!R} f_\varepsilon(x)dF(x),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I\!R} f_\varepsilon(x)dF_n(x) = \int_{I\!R} f_\varepsilon dF(x). \tag{4.18}$$

De asemenea avem

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF(x) = \int_{\infty}^{a} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF(x) +$$

$$+ \int_{a}^{b} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF(x) + \int_{b}^{\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{a} |f(x)| dF(x) + \int_{a}^{b} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF(x) + \int_{b}^{\infty} |f(x)| dF(x) \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{-\infty}^{a} dF(x) + \int_{a}^{b} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF(x) + M \int_{b}^{\infty} dF(x) =$$

$$= MF(a) + \varepsilon(F(b) - F(a)) + M(1 - F(b)).$$

Dacă ţinem seama de (4.18), găsim

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF(x) \leqslant (2M+1)\varepsilon. \tag{4.19}$$

Din convergenţa în repartiţie, pentru n suficient de mare, avem

$$|F_n(a) - F(a)| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ şi } |F_n(b) - F(b)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Făcând acelaşi raţionament ca mai sus găsim evaluarea

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF_n(x) \leqslant (2M+1)\varepsilon. \tag{4.20}$$

Din (4.18), (4.19) şi (4.20) avem

$$|\int_{\mathbb{R}} f(x) dF_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dF_n(x) + \int_{\mathbb{R}} |f(x) -$$

$$- f_\varepsilon(x)| dF(x) + |\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) dF_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) dF(x)| \leqslant (4M+3)\varepsilon.$$

Deoarece ε este arbitrar, rezultă teorema. ■

Menţionăm că şi implicaţia inversă este adevărată.

Teorema 4.5.2 *Dacă F_n este un şir de funcţii de repartiţie, atunci există un subşir F_{n_k} convergent la o funcţie nedescrescătoare în punctele sale de continuitate.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o mulţime numărabilă arbitrară de numere reale, densă în $\mathbb{R}$, de exemplu mulţimea numerelor raţionale. Deoarece şirul $\{F_n(x_1\}_{n \in \mathbb{N}^*} \in [0,1]$ (fiind mărginit), din teorema lui Bolzano- Weierstrass există un subşir convergent $\{F_n^1(x_1\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. Analog, din şirul mărginit $\{F_n^2(x_2)\}$ extragem un subşir convergent $\{F_n^2(x_2)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ etc.

Rezultă că şirul diagonal $\{F_n^n\}_{n \in \mathbb{N}})$ (cu excepţia eventual a unui număr finit de termeni) este conţinut în toate subşirurile $\{F_n^k\}_{n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*}$ şi deci converge , oricare ar fi $x \in \mathbf{Q}$. Introducem

$$F(x) \stackrel{def}{=} \lim_{k \to \infty} F_{n_k}(x).$$

F este, evident, nedescrescătoare şi mărginită pe $\mathbf{Q}$ şi poate fi extinsă la $I\!R$ cu păstrarea proprietăţilor

$$F(x) = \sup_{y<x, y\in\mathbf{Q}} F(y).$$

Să demonstrăm că $\{F_{n_k}\} \to F$ în punctele sale de continuitate. Fie x_0 un punct de continuitate a lui F şi să alegem $\eta > 0$ încât pentru $|x - x_0| < \eta$ să avem

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

Introducem funcţiile auxiliare

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \leqslant x_0 - \eta, \\ \dfrac{x_0 - x}{\eta}, & \text{dacă} \quad x_0 - \eta \leqslant x \leqslant x_0, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \geqslant x_0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \leqslant x_0, \\ 1 - \dfrac{x_0 - x}{\eta}, & \text{dacă} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \eta, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \geqslant x_0 + \eta. \end{cases}$$

Avem, evident,

$$\int_{I\!R} f_1(x) dF(x) \geqslant \int_{-\infty}^{x_0-\eta} dF(x) = F(x_0 - \eta) \geqslant F(x_0) - \varepsilon,$$

$$\int_{I\!R} f_2(x) dF(x) \leqslant \int_{-\infty}^{x_0+\eta} dF(x) = F(x_0 + \eta) \leqslant F(x_0) + \varepsilon,$$

şi analog pentru F_{n_k}

$$\int_{I\!R} f_1(x) dF_{n_k}(x) \leqslant \int_{-\infty}^{x} dF_{n_k}(x) = F_{n_k}(x_0),$$

$$\int_{I\!R} f_2(x) dF_{n_k}(x) \geqslant \int_{-\infty}^{x} dF_{n_k}(x) = F_{n_k}(x_0).$$

Pentru n suficient de mare, conform teoremei 4.4.1,

$$|\int_{I\!R} f_1(x) dF_{n_k}(x) - \int_{I\!R} f_1(x) dF(x)| < \varepsilon,$$

$$|\int_{I\!R} f_2(x) dF_{n_k}(x) - \int_{I\!R} f_2(x) dF(x)| < \varepsilon.$$

Din ultimele şase relaţii deducem

$$F(x_0) - 2\varepsilon \leqslant F_{n_k}(x_0) \leqslant F(x_0) + 2\varepsilon.$$

Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrară rezultă

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x_0) = F(x_0).$$

$\blacksquare$

Teorema 4.5.3 *Dacă şirul $\{F_n\}$ de funcţii de repartiţie converge în repartiţie către funcţia F în toate punctele de continuitate ale lui F, atunci şirul $\{\varphi_n\}$ al funcţiilor caracteristice corespunzătoare converge (uniform pe orice interval mărginit) la funcţia caracteristică φ corespunzătoare lui F.*

Demonstraţie. Deoarece

$$\varphi_n(t) = \int_{I\!R} e^{itx} dF_n(x) \text{ şi } \varphi(t) = \int_{I\!R} e^{itx} dF(x)$$

şi funcţia e^{itx} este continuă şi mărginită pe $I\!R$. Conform Teoremei 4.5.2 rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

(se poate demonstra şi convergenţa uniformă). ■

Teorema 4.5.4 *Dacă şirul $\{\varphi_n\}_{n\in I\!N^*}$ de funcţii caracteristice converge pentru orice $t \in I\!R$ la φ continuă pe $I\!R$, atunci şirul $\{F_n\}_{n\in N^*}$ de funcţii de repartiţie corespunzătoare converge către o funcţie de repartiţie F; în plus, φ este funcţia caracteristică corespunzătoare lui F.*

Demonstraţie. Din Teorema 4.5.1 există un subşir $\{F_{n_k}\}_{k\in I\!N^*}$ care converge la o funcţie F nedescrescătoare, continuă la stânga în toate punctele de continuitate ale lui F. Să demonstrăm că F este o funcţie de repartiţie. Presupunem, prin absurd, că

$$F(-\infty) > 0 \quad F(+\infty) < 1$$

şi

$$\delta = F(+\infty) - F(-\infty) < 1.$$

Fie $\varepsilon > 0$ ales arbitrar astfel încât $\varepsilon < 1 - \delta$. Deoarece $\varphi_n \to \varphi$ şi $\varphi_n(0) = 1$, rezultă că $\varphi(0) = 1$ şi deoarece φ este continuă pe $I\!R$ putem lua $\tau > 0$ suficient de mic încât

$$\frac{1}{2\tau}\left|\int_{-\tau}^{\tau} \varphi(t)dt\right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} > \delta + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.21}$$

De asemenea putem alege $x_0 > \frac{4}{\tau\varepsilon}$ dacă $K > 0$ suficient de mare, încât

$$\delta_k = F_{n_k}(x_0) - F_{n_k}(-x_0) = \int_{|x|<x_0} dF_{n_k}(x) < \delta + \frac{\varepsilon}{4}, \text{ dacă } k > K$$

ceea ce este posibil deoarece F_{n_k} este o funcţie de repartiţie. Deoarece φ_{n_k} este o funcţie caracteristică,

$$\int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t)dt = \int_{I\!R}\left[\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}dt\right]dF_{n_k}(x).$$

Dar $\left|\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}dt\right| \leqslant 2\tau$ deoarece $|e^{itx}| = 1$, iar pe de altă parte, calculând efectiv această integrală,

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} = \frac{1}{ix}e^{itx}\Big|_{-\tau}^{\tau} = \frac{1}{ix}[e^{i\tau x} - e^{-i\tau x}] = \frac{2}{x}\sin(\tau x).$$

Deci, pentru $|x| > x_0$, ţinând seama de faptul că $|\sin(\tau x) \leqslant 1$ avem $\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt < \frac{2}{x_0}$.
Deci

$$|\int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k} x(t)dt| \leqslant |\int_{|x|\leqslant x_0} [\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt] dF_{n_k}(x)| +$$

$$+|\int_{x>x_0} [\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx} dt] dF_{n_k}(x)| < 2\tau\delta_k + \frac{2}{x_0}.$$

Împărţind prin 2τ

$$\frac{1}{2\tau} |\int_{-\tau}^{\tau} \varphi_{n_k}(t)dt| < \delta_k + \frac{1}{\tau x_0} < \delta + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{\tau}\frac{\tau\varepsilon}{4} < \delta + \frac{\varepsilon}{2},$$

ceea ce contrazice (4.21). Din teorema 4.5.3,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I\!R} e^{itx} dF_{n_k}(x) = \int_{I\!R} e^{itx} dF(x) = \varphi(t).$$

Rămâne să demonstrăm că $\{F_n\}$ converge în repartiţie către F. Să presupunem contrariul; atunci există un subşir $\{F_{n_k}\}$ care converge în repartiţie către $F^* \neq F$, dar F^* este o funcţie de repartiţie cu aceeaşi funcţie caracteristică, deci din Teorema de unicitate Cap.III, Teorema 3.5.4 rezultă $F^* \equiv F$. ■

4.6 Convergenţa aproape sigură

Deoarece variabilele aleatoare sunt funcţii definite pe spaţiul de selecţie (cu proprietăţi suplimentare) putem vorbi de covergenţa punctuală a unui şir de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ către variabila aleatoare X, înţelegând prin aceasta că şirul numeric de variabile aleatoare $\{X_n(e)\}_{n\in I\!N}$, $e \in E$ converge către $X(e)$.

Definiţia 4.6.1 *Şirul de variabile aleatoare* $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ converge aproape sigur *către variabila aleatoare* X *(notat* $\{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{a.s.} X$*) dacă mulţimea evenimentelor în care* $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ *converge punctual la* X *formează un eveniment de probabilitate 1,*

$$P(\{X_n \to X\}) = 1, \tag{4.22}$$

echivalent cu

$$P(\{X_n \nrightarrow X\}) = 0.$$

Observaţia 4.6.1 Convergenţa aproape sigură se mai numeşte convergenţă tare.

Teorema 4.6.1 *Dacă pentru orice* $r \in I\!N^*$ *are loc*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{|X_n - X| \geqslant \frac{1}{r}\}) < \infty \tag{4.23}$$

atunci $\{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{a.s.} X$.

Demonstraţie. Fie $A_n^r = \{e \in E, |X_n - X| \geqslant \frac{1}{r}\}$ şi $B_n^r = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n+k}^r$. Din faptul că

$$P(B_n^r) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_{n+k}^r) = \sum_{l=n+1}^{\infty} P(\{|X_l - X| \geqslant \frac{1}{r}\})$$

şi cum seria din (4.23) este convergentă, rezultă că restul seriei converge la zero şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n^r) = 0. \tag{4.24}$$

Fie $B^r = B^1 \bigcup B^2 \bigcup B^3 \bigcup \ldots$ şi cum $P(B) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} P(B^r)$ rezultă, conform (4.24) că $P(B) = 0$, unde de fapt B este mulţimea evenimentelor pentru care X_n nu converge la X. ■

Se poate demonstra că dacă $\{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{a.s.} X$ atunci $\{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{prob} X$ şi deci $\{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{rep} X$.

Un alt rezultat, datorat lui E. Borel, face parte din legea numerelor mari (forma tare) şi reformulează, într-o manieră întărită, afirmaţia conţinută în teorema lui Bernoulli.

Teorema 4.6.2 (Borel) *Fie A un eveniment care are probabilitatea de realizare $p = P(A)$ într-un şir de probe independente şi fie $\frac{S_n}{n}$ frecvenţa relativă de realizare a evenimentului A din n probe. Atunci are loc convergenţa aproape sigură a şirului frecvenţelor relative $\frac{S_n}{n}$ către p.*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} p.$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 4.5.1 este suficient să arătăm că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{|\frac{S_n}{n} - p| \geqslant \frac{1}{r}\}) \tag{4.25}$$

este convergentă, oricare ar fi $r \in I\!N^*$. Pentru aceasta vom observa, ca şi la inegalitatea lui Cebâşev, că putem stabili următoarea inegalitate pentru orice variabilă aleatoare X pentru care există $M[(X - M[X])^4]$

$$P(\{|X - M[X]| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^4} M[(X - M[X])^4].$$

4.7 Convergenţa în medie

Definiţia 4.7.1 *Şirul de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n\in I\!N}$* converge în medie de ordinul r *către variabila aleatoare X dacă există momente absolute $M[|X_n|^r], n \in I\!N$ şi $M[|X|^r]$ şi dacă*

$$\lim_{n\to\infty} M[|X_n - X|^r] = 0,$$

şi scriem $\{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{r} X$

Teorema 4.7.1 *Dacă şirul de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ converge în medie de ordinul r către variabila aeatoare X atunci converge în probabilitate către X.*

Demonstraţe. Folosim inegalitatea analogă inegalităţii lui Cebâşev, dar pentru momentul centrat de ordin r, Relaţia (3.41):

$$P(\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{M[|X_n - X|^r]}{\varepsilon^r}$$

rezultă că deoarece are loc (4.22) atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

Observaţie. Dacă $r = 2$ convergenţa în medie de ordinul doi se numeşte *convergenţă în medie pătratică.*

Concluzie.

$$\begin{array}{l}\{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{a.s.} X \\ \{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{r} X\end{array} \implies \{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{prob} X \implies \{X_n\}_{n\in I\!N} \xrightarrow{rep} X \ .$$

4.8 Probleme propuse

Problema 4.1 Se dau variabilele aleatoare independente $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, unde X_n ia valorile $-na, 0, na,\ a \in I\!R_+$ cu probabilităţile:
a) $p_1 = 1/2n^2,\ p_2 = 1 - 1/n^2,\ p_3 = 1/2n^2$,
b) $p_1 = 1/2^n,\ p_2 = 1 - 1/2^{n-1},\ p_3 = 1/2^n$.
Satisfac aceste şiruri $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ legea numerelor mari?

Soluţie. a)

$$X_n : \begin{pmatrix} -na & 0 & na \\ 1/2n^2 & 1-1/n^2 & 1/2n^2 \end{pmatrix}, n = 1, 2, \ldots,$$

$$M[X_n] = 0,\ M[X^2] = a^2,\ D^2[X] = M[X^2] = a^2 < \infty.$$

Şirul $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ satisface legea numerelor mari, folosind Teorema lui Cebâşev.

b)

$$X_n : \begin{pmatrix} -na & 0 & na \\ 1/2^n & 1-1/2^{n-1} & 1/2^n \end{pmatrix}, n = 1, 2, \ldots,$$

$$M[X_n] = 0,\ M[X^2] = n^2a^2/2^{n-1},\ D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = n^2a^2/2^{n-1} < \infty.$$

Întrucât $D^2[X_n]$ nu este constantă nu se poate aplica Teorema lui Cebâşev. Se aplică Teorema lui Hincin.

Problema 4.2 Fie şirul de variabile aleatoare independente $\{X_n\}_{n\in nn}$. X_n ia valorile: $-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n$ cu probabilităţile:

$$P(|X_n| = k) = \frac{1}{3k^3},\ k = \overline{1,n},\ P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}).$$

Se aplică şirului $\{X_n\}_{n\in nn}$ legea numerelor mari?

Soluţie. Tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare X_n este:

$$X_n : \begin{pmatrix} -n & \ldots & -1 & 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ \frac{1}{3n^3} & \ldots & \frac{1}{3} & 1 - \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}) & \frac{1}{3} & \frac{1}{32^3} & \ldots & \frac{1}{3n^3} \end{pmatrix}$$

$$M[X_n] = 0,\ n = \overline{1,n}$$

$$D^2[X_n] = M[X_n^2] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{1}{3k^3} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \frac{2}{3}(1 + ln\ n).$$

Pentru majorare am utilizat egalitatea:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = ln\ n + C + \varepsilon_n,\ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

iar C este constanta lui Euler cu $C \approx 0.577$. Vom aplica Teorema lui Markov:

$$\frac{1}{n^2} D^2[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{\sum_{i=1}^{n} D^2[X_i]}{n^2} < \frac{1}{n^2}\frac{2n}{3}(1 + ln\ n),$$

$$\frac{1}{n^2}D^2[\sum_{i=1}^{n}X_i] < \frac{2}{3n}(1+lnn) \to 0,\ n\to\infty.$$

Deci şirului $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ i se poate aplica legea numerelor mari.

Problema 4.3 Se dă şirul de variabile aletoare independente $\{X_n\}_{n\in I\!N}$ cu $M[X] = 0,\ D^2[X] = n^a,\ a =$const., $a < 1$. Se aplică şirului dat legea numerelor mari?

Indicaţie. Se aplică Teorema lui Markov.

Problema 4.4 Se dă şirul de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n\in I\!N^*}$ independente: X_n ia valorile $-\sqrt{n},\ 0,\ \sqrt{n}$ cu probabilităţile $1/n,\ 1-2/n,\ 1/n$ respectiv. Se aplică acestui şir legea numerelor mari?

Indicaţie. Da, întrucât se poate aplica teorema lui Cebâşev. Trebuie verificată condiţia $D^2[X_n] < c$.

Problema 4.5 Probabilitatea ca o diodă să se defecteze înainte de 1000 ore de funcţionare este de 0,45. Dacă 1000 de diode sunt testate, care este probabilitatea ca să se defecteze un număr de diode cuprins între 4450 şi 4515 înainte de a funcţiona 1000 de ore?

Indicaţie. $p = 0,45,\ q = 0,55,\ n = 10^4,\ np = 4500,\ \sigma^2 = npq = 2475,\ a = -0,4020,\ b = 0,3015$. Utilizând (4.12) şi legătura cu funcţia lui Laplace, obţinem

$$P(\{-0,4020 \leqslant \frac{S_n - 4500}{\sqrt{2475}} \leqslant 0,3015\}) = \Phi(0,3015) + \Phi(0,4020) = 0,275.$$

Problema 4.6 Probabiliatea ca un rezistor să nu fie la limita de toleranţă este 0,1. S-au cumpaărat 1000 de rezistoare. Care este probabilitatea ca mai mult de 100 rezistoare să nu fie la limita de toleranţă?

Indicaţie. $P(\{1,0541 \leqslant \frac{S_n - 100}{\sqrt{90}} \leqslant 94,9\}) = 0,0778$

Problema 4.7 În cazul unui semnal luminos dirijat spre un detector fotoelectric, numărul k de electroni emisi urmează o repartiţie Poisson cu media $\lambda = 150$. Un semnal este detectat dacă emite mai mult de 140 de electroni. Care este probabilitatea ca semnalul să fie pierdut?

Indicaţie. Această probabilitate este $p = \sum_{k=0}^{140}\frac{(150)^k e^{-k}}{k!}$. Fie X variabila aleatoare care ia ca valori numărul de electroni emisi. Calculăm

$$P(\{X \leqslant 140\}) = P(\{\frac{X-150}{\sqrt{150}} \leqslant \frac{140-150}{\sqrt{150}}\}) = 0,5 - \Phi(0,8165) = 0,209.$$

Problema 4.8 Presupunem că numărul particulelor emise de o masă în t secunde este o variabilă aleatoare Poisson cu media λt. Folosind inegalitatea lui Cebâşev să se obţină o margine pentru probabilitatea ca $|N(t)/t - \lambda|$ să nu depăşească ε.

Indicaţie. $P(|N(t)/t - \lambda| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\lambda}{\varepsilon^2 t}$

Problema 4.9 Numărul mesajelor care sosesc la un canal de comunicaţie este o variabilă aleatoare Poisson cu media de 10 mesaje/secundă. Folosind teorema limită centrală să se estimeze probabilitatea ca mai mult de 650 de mesaje să ajungă într-un minut.

Indicaţie. Se utilizează Exerciţiul 4.4.9.

Capitolul 5

Procese stochastice

In studiul unor probleme fizice sau tehnologice apar fenomene care se desfăşoară în timp şi care se numesc *procese*. Să dăm câteva exemple.

1. În modelul atomului de hidrogen, datorat lui Bohr, electronul se poate plasa pe una din orbitele admisibile; la un moment dat t, definim variabila aleatoare $X(t)$, care ia valoarea i, dacă electronul se găseşte pe orbita i.

2. Numărul de impulsuri care se produc în intervalul $(0, t)$ la o centrală telefonică este o variabilă aleatoare pe care o notăm $X(t)$.

3. Dacă mişcarea unei particule depinde de circumstanţe întâmplătoare, de exemplu de ciocnirea cu alte particule, atunci în fiecare moment t, viteza $V(t)$ sau poziţia $X(t)$ sunt variabile aleatoare.

4. Un semnal aleator este o undă electrică, sonoră etc. ce traversează un anumit mediu la un moment dat şi pe care îl notăm cu $X(t)$. Un semnal poate fi condiţional determinist dacă se cunoaşte expresia analitică a undei; de exemplu $X(t) = \sin(\omega t + \phi)$, unde ϕ este o variabilă aleatoare.

În fiecare din exemplele precedente se pune în evidenţă o familie de variabile aleatoare $\{X(t)\}$, cu $t \in T$, $T \subset I\!R$, care defineşte un proces stochastic.

5.1 Lanţuri Markov

Fie $\{E, K, P\}$ un câmp borelian de probabilitate.

Definiţia 5.1.1 *Familia de variabile aleatoare $X(t) : E \to I\!R$, unde $t \in T \subset I\!R$, se numeşte* proces stochastic*. Dacă $T = I\!N$ procesul se numeşte lanţ.*

Ne ocupăm în detaliu de lanţuri cu un număr finit de valori. Fie S o mulţime finită, ale cărei elemente le numim *stări*, numerotate într-un mod bine-definit şi care reprezintă mulţimea tuturor valorilor pe care le pot lua variabilele aleatoare $X(n)$. Vom nota $X(n) = X_n$.

Presupunem cunoscute probabilităţile

$$p_i = P(\{X_0 = i\}), \quad \forall i \in S,$$

pe care le vom numi *probabilităţi iniţiale* ale lanţului. Evident

$$\sum_{i\in S} p_i = 1.$$

Definiţia 5.1.2 *Lanţul* $\{X_n\}, n \in I\!N$ *se numeşte* lanţ Markov *dacă are loc*

$$P(\{X_{n+1} = i_{n+1}\}|\{X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\}) = P(\{X_{n+1} = i_{n+1}\}|\{X_n = i_n\}). \qquad (5.1)$$

Egalitatea (5.1) este cunoscută sub numele de proprietatea Markov şi se interpretează intuitiv prin aceea că lanţul păstrează asupra trecutului amintirea cea mai recentă, deci trecutul este în întregime rezumat în starea din ultimul moment cunoscut.

Se poate demonstra echivalenţa dintre condiţia (5.1) şi relaţia :

$$\forall\ t_0 < t_1 < \ldots t_n < t_{n+1} \in I\!R,$$

$$P(\{X_{t_{n+1}} = i_{n+1}\}|\{X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_0} = i_0\}) = P(\{X_{t_{n+1}} = i_{n+1}\}|\{X_{t_n} = i_n\}). \qquad (5.2)$$

Relaţia (5.2) corespunde situaţiei în care schimbarea stărilor nu se face la momente echidistante de timp.

Propoziţia 5.1.1 *Dacă* $\{X_n\}, n \in I\!N$ *este un lanţ Markov, are loc următoarea formulă de calcul:*

$$P(\{X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\}) = p_{i_0} \prod_{t=1}^{n} P(\{X_t = i_t\}|\{X_{t-1} = i_{t-1}\}). \qquad (5.3)$$

Demonstraţie. Vom folosi probabilitatea unei intersecţii.

$$P(\{X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\}) = P\left(\{X_0 = i_0\} \cap \{X_1 = i_1\} \cap \ldots \cap \{X_n = i_n\}\right) =$$

$$= P(\{X_0 = i_0\})P(\{X_1 = i_1\}|\{X_0 = i_0\})P(\{X_2 = i_2\}|\{X_1 = i_1, X_0 = i_0\}) \ldots$$
$$P(\{X_n = i_n\}|\{X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\}) =$$
$$= P(\{X_0 = i_0\})P(\{X_1 = i_1\}|\{X_0 = i_0\})P(\{X_2 = i_2\}|\{X_1 = i_1\}) \ldots$$
$$\ldots P(\{X_n = i_n\}|\{X_{n-1} = i_{n-1}\}).$$

Ultima relaţie s-a obţinut folosind proprietatea Markov; scrisă condensat este de fapt relaţia (5.3). ■

Definiţia 5.1.3 *Probabilităţile date de formula*

$$p(t, i_{t-1}, i_t) = P(\{X_t = i_t\}|\{X_{t-1} = i_{t-1}\}), \ \ t = 1, \ldots n,$$

se numesc probabilităţi de trecere.

Definiţia 5.1.4 *Un lanţ Markov se numeşte* omogen *dacă* $p(t, i_{t-1}, i_t)$ *nu depinde explicit de* t*, deci are loc*

$$p(t, i_{t-1}, i_t) = p(i_{t-1}, i_t)$$

În caz contrar, procesul se numeşte neomogen.

Vom nota aceste probabilităţi cu p_{i_{t-1},i_t}. Pentru un lanţ Markov omogen, relaţia (5.3) devine

$$P(\{X_t = i_t, \dots X_0 = i_0\}) = p_{i_0} \prod_{t=1}^{n} p_{i_{t-1},i_t}. \tag{5.4}$$

In cazul unui lanţ Markov omogen, vom introduce notaţia

$$p_{ij} = P(\{X_{t+1} = j\} | \{X_t = i\}), \;\; i,j \in S. \tag{5.5}$$

Matricea $P = (p_{i,j})$ se numeşte *matrice de trecere.*

Propoziţia 5.1.2 *Matricea de trecere a unui lanţ Markov omogen satisface relaţiile :*

$$\begin{cases} p_{ij} \geqslant 0, & \forall i,j \in S \\ \sum\limits_{j \in S} p_{ij} = 1, & \forall i \in S \end{cases}.$$

Demonstraţie. Prima afirmaţie este evidentă. Pentru a doua să observăm că evenimentul sigur $E = \bigcup\limits_{j \in S} \{X_{t+1} = j\}$ şi că

$$1 = P\left(\left(\bigcup_{j \in S} \{X_{t+1} = j\} \right) | \{X_t = i\} \right) = \sum_{j \in S} P(\{X_{t+1} = j\} | \{X_t = i\}) = \sum_{j \in S} p_{ij}.$$

■

O matrice ce satisface aceste două proprietăţi se numeşte *stochastică*. Se poate uşor demonstra că produsul a două matrice stochastice este o matrice stochastică. Un lanţ Markov este caracterizat de probabilităţile iniţiale şi de trecere. Am văzut că dacă se cunosc probabilităţile iniţiale şi de trecere se pot determina pentru orice n, probabilităţile care caracterizează un lanţ stochastic, adică

$$P(\{X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0\}), \;\; t = 0, 1, \dots, n.$$

Reciproc, se poate demonstra că dacă $p_i, \; i \in S$, este un şir cu proprietăţile

$$p_i \geqslant 0 \;\; , \;\; \sum_{i \in S} p_i = 1$$

şi $(p_{ij}), \;\; i,j \in S$, este o matrice cu proprietăţile :

$$p_{ij} \geqslant 0 \;\; , \;\; \sum_{j \in S} p_{ij} = 1,$$

atunci există un corp borelian şi un lanţ Markov omogen, cu mulţimea stărilor S, cu p_i probabilităţi iniţiale şi p_{ij} probabilităţi de trecere.

Exemplul 5.1.1 Două urne au următoarea componenţă :

$$U_a \text{ are 4 bile albe şi 6 bile negre}$$

$$U_n \text{ are 5 bile albe şi 5 bile negre}$$

Alegem la întâmplare o urnă şi din ea o bilă, pe care o punem înapoi în urnă; dacă bila este albă extragem următoarea bilă din U_a, iar dacă e neagră din U_n şi continuăm procedeul. Este un exemplu de lanţ Markov omogen, cu probabilităţile iniţiale $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, deoarece alegerea urnelor este egal probabilă; definim stările

$$S_1 \text{ se extrage o bilă din urna } U_a$$

$$S_2 \text{ se extrage o bilă din urna } U_n$$

şi ilustrăm prin următoarea diagramă:

Matricea de trecere este

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 5.1.2 Intr-o urnă sunt a bile albe şi b bile negre. Se efectuează un şir infinit de extrageri astfel încât după fiecare extragere se pun înapoi două bile de aceeaşi culoare cu cea extrasă. Fie X_k numărul de bile la momentul k. Definim probabilităţile de trecere

$$P(\{X_{k+1} = j\}|\{X_k = i\}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{i}{a+b+k}, & \text{dacă } j = i, \\ \dfrac{i}{a+b+k}, & \text{dacă } j = i+1, \\ 0, & \text{dacă } j \neq i, i+1. \end{cases}$$

Numărul de bile din urnă la momentul $k+1$ depinde numai de numărul de bile din urnă aflate la momentul k, nefiind necesar întreg istoricul. Probabilităţile de trecere depind efectiv de momentul în care s-a desfăşurat extracţia, deci e un lanţ Markov neomogen.

Dat un lanţ Markov omogen, ne propunem să determinăm probabilităţile

$$P(\{X_{n+m} = j\}|\{X_m = i\}), \;\; n \in I\!N,$$

pe care le numim *probabilităţi de trecere după n paşi.* Definim prin recurenţă $p_{ij}^{(n)}$, după formulele

$$\begin{cases} p_{ij}^{(1)} & = p_{ij} \\ p_{ij}^{(n+1)} & = \displaystyle\sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(1)} \;\; n \in I\!N^*. \end{cases} \tag{5.6}$$

Sub formă matriceală, relaţiile (5.6) devin:

$$P^{(n)} = P \times \ldots \times P = P^n.$$

Propoziţia 5.1.3 *Pentru orice $n \in I\!N$ are loc*

$$p_{ij}^{(n)} = P(\{X_{n+m} = j\}|\{X_m = i\}), \quad m \in I\!N. \tag{5.7}$$

Demonstraţie. Vom demonstra prin inducţie. Observăm că pentru $n = 1$, găsim definiţia probabilităţilor de trecere date de (5.5). Presupunem că (5.7) are loc pentru $n \in I\!N$ şi să determinăm

$$P(\{X_{n+1+m} = j\}|\{X_m = i\}) = \sum_{k \in S} P(\{X_{n+m+1} = j, X_{n+m} = k\}|\{X_m = i\}),$$

aceasta deoarece $\{X_{n+m} = k\}, \quad k \in S$, formează un sistem complet de evenimente şi are loc formula probabilităţii totale (vezi Exemplul 6.6, Capitolul 1). Aplicând în continuare formula probabilităţii condiţionate şi proprietatea Markov, ultimul membru este

$$\sum_{k \in S} P(\{X_{n+1+m} = j, X_{n+m} = k\}|\{X_m = i\}) =$$

$$= \sum_{k \in S} \frac{P(\{X_{n+m+1} = j\} \cap \{X_{n+m} = k\} \cap \{X_m = i\})}{P(\{X_m = i\})} =$$

$$= \sum_{k \in S} \frac{P(\{X_{n+m+1} = j\} \cap \{X_{n+m} = k\} \cap \{X_m = i\})}{P(\{X_{n+m} = k\} \cap \{X_m = i\})} \cdot$$

$$\frac{P(\{X_{n+m} = k\} \cap \{X_m = i\})}{P(\{X_m = i\})} =$$

$$= \sum_{k \in S} P(\{X_{n+m+1} = j\}|\{X_{n+m} = k, X_m = i\}) P(\{X_{n+m} = k\}|\{X_m = i\})$$

$$= \sum_{k \in S} P(\{X_{n+m+1} = j\}|\{X_{n+m} = k\}) P(\{X_{n+m} = k\}|\{X_m = i\}) =$$

$$= \sum_{k \in S} p_{kj}^1 \; P(\{X_{n+m} = k\}|\{X_m = i\}).$$

Folosind ipoteza inductivă ultimul membru este

$$\sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(1)} = p_{ij}^{(n+1)}.$$

Deci afirmaţia este dovedită. ∎

Dacă într-un lanţ Markov omogen se cunosc probabilităţile iniţiale şi matricea de trecere, atunci probabilitatea ca la momentul $n \in I\!N$ sistemul să se afle în starea $i, \; i \in S$, probabilitate pe care o vom nota $p_i(n)$, este dată de formula

$$p_i(n) = \sum_{j \in S} p_j(n-1) p_{ji}. \tag{5.8}$$

Într-adevăr, la momentul n

$$p_i(n) = P(\{X_n = i\}) = P\left(\{X_n = i\} \cap \left(\bigcup_{j\in S}\{X_{n-1} = j\}\right)\right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{j\in S}(\{X_n = i\} \cap \{X_{n-1} = j\})\right) = \sum_{j\in S} P(\{X_{n-1} = j\})P(\{X_n = i\}|\{X_{n-1} = j\})$$

$$= \sum_{j\in S} p_j(n-1)p_{ji}.$$

Exemplul 5.1.3 Un calculator poate fi privit ca un sistem S care se poate afla într-una din următoarele stări:

S_1 calculatorul funcţionează normal;
S_2 calculatorul prezintă unele dereglări, dar poate executa programe;
S_3 calculatorul prezintă unele dereglări şi rezolvă un număr limitat de probleme;
S_4 calculatorul nu funcţionează.

La momentul iniţial calculatorul funcţionează, deci se află în starea S_1 cu probabilitatea 1 şi se poate presupune că el trece în celelalte stări cu probabilităţile indicate de următoarea schemă

Deci matricea de trecere este

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să determinăm probabilităţile stărilor la momentul $n = 2$. Deoarece la momentul iniţial calculatorul funcţionează, probabilităţile iniţiale sunt

$$p_1 = 1, \;\; p_2 = p_3 = p_4 = 0.$$

Folosind (5.8) găsim

$$p_1(1) = 0,3; \;\; p_2(1) = 0,4; \;\; p_3(1) = 0,1; \;\; p_4(1) = 0,2$$

şi

$$p_1(2) = 0,09; \;\; p_2(2) = 0,2; \;\; p_3(2) = 0,27; \;\; p_4(2) = 0,44.$$

Propoziţia 5.1.4 *Pentru orice $m, n \in I\!N$ are loc*

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \tag{5.9}$$

Demonstraţie. Demonstrăm prin inducţie după m. Pentru $m = 1$ regăsim (5.7). Inlocuind m cu $m+1$, să evaluăm

$$p_{ij}^{(n+m+1)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n+m)} p_{kj}^{(1)} = \sum_{k\in S}\left(\sum_{l\in S} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)}\right) p_{kj}^{(1)} =$$

$$= \sum_{l\in S} p_{il}^{(n)} \sum_{k\in S} p_{lk}^{(m)} p_{kj}^{(1)} = \sum_{l\in S} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m+1)}.$$

Relaţia (5.9) se numeşte relaţia **Chapman-Kolmogorov**. Matriceal ea se scrie

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}.$$

■

Cu ajutorul matricei de trecere putem exprima probabilitatea apariţiei unor stări la momente nesuccesive.

Exemplul 5.1.4 Dacă avem un lanţ Markov omogen cu matricea de trecere P, să determinăm

$$P(\{X_{10} = l, X_8 = k, X_5 = j\}|\{X_1 = i\}).$$

Folosind formula probabilităţii unei intersecţii şi proprietatea Markov, avem

$$\frac{P(\{X_{10} = l, X_8 = k, X_5 = j, X_1 = i\})}{P(\{X_1 = i\})} =$$

$$= \frac{P(\{X_1 = i\})P(\{X_5 = j\}|\{X_1 = i\})P(\{X_8 = k\}|\{X_5 = j\})P(\{X_{10} = l\}|\{X_8 = k\})}{P(\{X_1 = i\})} =$$

$$= p_{ij}^{(4)} p_{jk}^{(3)} p_{kl}^{(2)}.$$

Exemple de lanţuri Markov omogene.

Exemplul 5.1.5 Mers la întâmplare pe segmentul $[0, l]$ [11].

a. cu bariere absorbante; o particulă se deplasează pe o axă orientată ocupând doar punctele de abscisă $0, 1, \ldots l$. La fiecare moment particula rămâne imobilă dacă se află într-unul din punctele 0 sau l şi face un pas la dreapta cu probabilitatea p sau la stânga cu probabilitatea q. Matricea de trecere este

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. cu bariere reflectante; dacă particula ajunge în 0 sau l, este "reflectată" în 1, respectiv $l - 1$. Matricea de trecere este

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 5.1.6 Un model din teoria aşteptării [11].

O "staţie" de deservire poate servi clienţii la momentele $0, 1, 2, \ldots$. Numărul de clienţi care sosesc în intervalul $(n, n+1)$ este o variabilă aleatoare notată X_n. Presupunem că X_n sunt variabile aleatoare independente şi identic repartizate

$$X_n : \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}_{k=0}^{+\infty}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

şi că există un loc de aşteptare pentru cel mult m clienţi, număr în care se include şi clientul care este servit. Clienţii care ajung în staţie şi găsesc m clienţi, pleacă fără a fi serviţi.

Fie Y_n numărul de clienţi prezenţi la momentul n, în care se include şi clientul care este servit. Y_n este un lanţ Markov cu stările $0, 1, \ldots m$. Y_{n+1} este egal cu numărul clienţilor la momentul n, mai puţin cel servit la momentul n (dacă există) plus numărul clienţilor care sosesc în intervalul $(n, n+1)$, dacă rezultatul nu depăşeşte m şi este egal cu m în caz contrar. Deci

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n - 1 + X_n, & \text{dacă} \quad 1 \leqslant Y_n \leqslant m, \quad 0 \leqslant X_n \leqslant m + 1 - Y_n, \\ X_n, & \text{dacă} \quad Y_n = 0, \quad 0 \leqslant X_n \leqslant m - 1, \\ m, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Deoarece Y_{n+1} depinde doar de Y_n, iar variabilele aleatoare X_n şi Y_n sunt independente, rezultă că Y_n este un lanţ Markov. Să determinăm matricea de trecere. Notăm cu $\overline{p_m} = p_m + p_{m-1} + \ldots$

$$p_{0j} = P(\{Y_{n+1} = j\}|\{Y_n = 0)\}$$
$$= \begin{cases} P(\{X_n = j\}) = p_j, & \text{dacă} \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1, \\ P(\{X_n \geqslant m\}) = \overline{p_m}, & \text{dacă} \quad j = m; \end{cases}$$

$$p_{ij} = P(\{Y_{n+1} = j\}|\{Y_n = i\}) =$$
$$= \begin{cases} P(\{X_n = j+1-i\}) = p_{j-i+1}, & \text{dacă} \quad i-1 \leqslant j \leqslant m-1, \\ P(\{X_n \geqslant m+1-i\}) = \overline{p_{m+1-i}}, & \text{dacă} \quad j = m, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Rezultă matricea

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_{m-1} & \overline{p_m} \\ p_0 & p_1 & p_2 & \ldots & p_{m-1} & \overline{p_m} \\ 0 & p_0 & p_1 & \ldots & p_{m-2} & \overline{p_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_1 & \overline{p_2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_0 & \overline{p_1} \end{pmatrix}.$$

Exemplul 5.1.7 Un model din teoria stocurilor. [11]

O marfă este stocată pentru a putea satisface cererile întâmplătoare. Completarea eventuală a stocului se face la momentele $0, 1, 2, \ldots$, iar cererea în intervalul $(n, n+1)$ este o variabilă aleatoare X_n, cu repartiţia

$$X_n : \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}_{k=0}^{\infty}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Presupunem că X_n sunt independente. Dacă la un moment oarecare $n \geqslant 0$ cantitatea de marfă stocată nu este mai mare decât m unităţi, atunci se procură instantaneu o cantitate de marfă care ridică stocul la M unităţi, $M \in \mathbb{N}$. Dacă însă cantitatea de marfă depăşeşte m unităţi, atunci nu se întreprinde nimic. Fie Y_n stocul imediat înainte de reîmprospătarea eventuală de la momentul n. Observăm că

$$Y_{n+1} = \begin{cases} \max\{Y_n - X_n, 0\}, & \text{dacă} \quad m < Y_n \leqslant M, \\ \max\{M - X_n, 0\}, & \text{dacă} \quad Y_n \leqslant m. \end{cases}$$

Se arată că Y_n este un lanţ Markov cu matricea de trecere

$$\begin{pmatrix} \overline{p_M} & p_{M-1} & \ldots & p_{M-m} & p_{M-m-1} & p_{M-m-2} & \ldots & p_0 \\ \overline{p_M} & p_{M-1} & \ldots & p_{M-m} & p_{M-m-1} & p_{M-m-2} & \ldots & p_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{p_M} & p_{M-1} & \ldots & p_{M-m} & p_{M-m-1} & p_{M-m-2} & \ldots & p_0 \\ \overline{p_{m+1}} & p_m & \ldots & p_1 & p_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{p_{m+2}} & p_{m+1} & \ldots & p_2 & p_1 & p_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{p_M} & p_{M-1} & \ldots & p_{M-m} & p_{M-m-1} & p_{M-m-2} & \ldots & p_0 \end{pmatrix}.$$

(Matricea are primele m linii identice). S-a folosit notaţia $\overline{p_l} = p_l + p_{l+1} + \dots$, dacă $m < l \leqslant M$.

Dat un lanţ Markov omogen ne interesează comportarea la limită a probabilităţilor de trecere peste n paşi $p_{ij}^{(n)}$.

Definiţia 5.1.5 *Dacă pentru orice $i, j \in S$ şirul $p_{ij}^{(n)}$ $n \in \mathbb{N}$ este convergent independent de i, lanţul X_n se numeşte* ergodic.

Teorema 5.1.1 *(*Teoremă de ergodicitate*). Fie (X_n), $n \in \mathbb{N}$, un lanţ Markov cu matricea de trecere $P = (p_{ij})$, $i, j \in S$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. există $s \in \mathbb{N}^*$ şi o stare $j_0 \in S$ astfel încât $p_{ij_0}^{(s)} > 0$ $\forall i \in S$;

2. există $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j^{\infty}$, $j \in S$, $\forall i \in S$.

Demonstraţie.

2. $\Longrightarrow$ 1. Afirmaţia este imediată; observăm că

$$\sum_{j\in S} p_j^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

Există deci $j_0 \in S$ astfel încât $p_{j_0}^{\infty} > 0$, deci de la un rang s termenii şirului

$$p_{ij_0}^{(s)} > 0, \quad \forall i \in S.$$

1. $\Longrightarrow$ 2. Pentru orice $j \in S$ să considerăm şirurile

$$\overline{p}_j^{(n)} = \max_{i\in S} \; p_{ij}^{(n)}, \quad \underline{p}_j^{(n)} = \min_{i\in S} \; p_{ij}^{(n)}. \tag{5.10}$$

Arătăm că $\overline{p}_j^{(n)}$ este necrescător; într-adevăr folosind (5.6)

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{l\in S} p_{il}^{(1)} p_{lj}^{(n)} \leqslant \overline{p}_j^{(n)} \sum_{l\in S} p_{il}^{(1)} = \overline{p}_j^{(n)} \quad , \forall i \in S,$$

deci

$$\overline{p}_j^{(n+1)} \leqslant \overline{p}_j^{(n)}.$$

Analog rezultă că $\underline{p}_j^{(n)}$ este nedescrescător, deci

$$\underline{p}_j^{(n+1)} \geqslant \underline{p}_j^{(n)}.$$

Deoarece cele două şiruri sunt şi mărginite ($1 \geqslant \overline{p}_j^{(n)} \geqslant \underline{p}_j^{(n)} \geqslant 0$) ele sunt convergente; să notăm

$$\overline{p}_j^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \overline{p}_j^{(n)}, \quad \underline{p}_j^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \underline{p}_j^{(n)}.$$

Rămâne să mai arătăm că $\underline{p}_j^\infty = \overline{p}_j^\infty$. Pentru aceasta să demonstrăm că

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i,l\in S} |p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)}| = 0.$$

Folosind relaţia (5.6), pentru $n > s$, cu s dat din ipoteza 1

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r\in S} p_{ir}^{(s)} p_{rj}^{(n-s)},$$

rezultă

$$p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)} = \sum_{r\in S} (p_{ir}^{(s)} - p_{lr}^{(s)}) p_{rj}^{(n-s)} = \sum_{r\in S} u_{il}(r) p_{rj}^{(n-s)},$$

unde am introdus notaţia $u_{il} = p_{ir}^{(s)} - p_{lr}^{(s)}$. Să notăm cu S^+ mulţimea acelor stări din S pentru care $u_{il}(r) > 0$ şi cu S^- mulţimea acelor stări din S pentru care $u_{il}(r) < 0$. Avem evident $S = S^+ \cup S^-$. Deoarece

$$\sum_{r\in S} p_{ir}^{(s)} = \sum_{r\in S} p_{lr}^{(s)} = 1,$$

rezultă că

$$\sum_{r\in S} u_{il}(r) = \sum_{r\in S^+} u_{il}(r) + \sum_{r\in S^-} u_{il}(r) = 0,$$

deci

$$\sum_{r\in S^+} u_{il} = \sum_{r\in S^-} |u_{il}(r)|.$$

Să demonstrăm că are loc

$$\sum_{r\in S^+} u_{il}(r) < 1. \tag{5.11}$$

Presupunem că starea j_0 din ipoteza 1 aparţine lui S^+; atunci

$$\sum_{r\in S^+} u_{il}(r) = \sum_{r\in S^+} (p_{ir}^{(s)} - p_{lr}^{(s)}) = \sum_{r\in S^+} p_{ir}^{(s)} - \sum_{r\in S^+} p_{lr}^{(s)} \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \sum_{r\in S^+} p_{lr}^{(s)} \leqslant 1 - p_{lj_0}^{(s)} < 1$$

deoarece $0 < p_{lj_0}^{(s)} \leqslant \sum_{r\in S^+} p_{lr}^{(s)}$. Aceeaşi evaluare se obţine după un raţionament analog în cazul în care $j_0 \in S^-$. Deoarece (5.11) are loc pentru orice $i, l \in S$, rezultă

$$u = \sup_{i,l\in S} \sum_{r\in S^+} u_{il}(r) < 1.$$

Revenim la suma ce trebuia majorată şi folosim (5.10)

$$p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)} = \sum_{r\in S^+} u_{il}(r) p_{rj}^{(n-s)} - \sum_{r\in S^-} |u_{il}(r)| p_{rj}^{(n-s)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r\in S^+} u_{il}(r)\overline{p}_j^{(n-s)} - \sum_{r\in S^-} u_{il}(r)\underline{p}_j^{(n-s)} \leqslant u(\overline{p}_j^{(n-s)} - \underline{p}_j^{(n-s)}).$$

Cum inegalitatea are loc pentru orice $i, l \in S$, rezultă că

$$\overline{p}_j^{(n)} - \underline{p}_j^{(n)} \leqslant u(\overline{p}_j^{(n-s)} - \underline{p}_j^{(n-s)}).$$

Aplicând această inegalitate de $[\frac{n}{s}]$ ori, unde [ ], semnifică partea întreagă a numărului $\frac{n}{s}$, deducem că

$$\sup_{i,l\in S} |p_{ij}^{(n)} - p_{lj}^{(n)}| = |\overline{p}_j - \underline{p}_j| \leqslant u^{\left[\frac{n}{s}\right]}$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} u^{\left[\frac{n}{s}\right]} = 0.$$

De aici rezultă că

$$\overline{p}_j = \underline{p}_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

şi această limită o notăm p_j^{∞}. ■

Importanţa acestei teoreme este însemnată, deoarece pe baza ei putem analiza stabilitatea în timp a unor procese aleatoare.

Exemplul 5.1.8 Considerăm următorul proces Markov: mulţimea stărilor are 3 elemente şi dacă la un moment dat este luată o anumită stare, la momentul următor se trece în oricare din celelalte două cu aceeaşi probabilitate. Matricea de trecere este evident

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

satisface condiţia 1 din teorema precedentă, pe care o vom numi condiţie de ergodicitate. Fiind matrice simetrică ea admite valorile proprii reale $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$ şi forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Fie S matricea ortogonală de schimbare de bază, care are forma

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ridicând la puterea n matricea $P = SDS^t$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Mai sus s-a folosit faptul că D^n are pe diagonală puterea a n -a a elementelor de pe diagonala lui D. Deci după un număr foarte mare de paşi se poate presupune că fiecare stare este luată cu aceleaşi şanse.

Exemplul 5.1.9 Fie un lanţ Markov cu două stări şi diagrama asociată în Figura 5.3.

Obsevăm că matricea de tranziţie este de forma

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Să studiem comportarea la limită a matricei de tranziţie. Putem scrie

$$P = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Se constată uşor că

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Matricea de tranziţie după n paşi tinde pentru $n \to +\infty$ la

$$\frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dacă cele două stări sunt luate iniţial cu probabilităţile $p_0, 1-p_0$, se constată că pentru $n \to +\infty$ probabilităţile de stare sunt $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Deci după un număr foarte mare de paşi probabilităţile nu depind de starea iniţială.

Dacă analizăm mersul la întâmplare cu bariere absorbante, pentru $l = 2$, găsim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar $P^n = P$, $\forall n \in I\!N$. Observăm că nu este în deplinită condiţia de ergodicitate; se poate totuşi aprecia că la un număr foarte mare de paşi particula rămâne imobilă, fiind absorbită de bariere.

5.2 Procese Markov continue. Procese Poisson

Procese Poisson.

În unele situaţii practice, făcând observaţii asupra unui eveniment aleator ne poate interesa de câte ori s-a produs acesta într-un interval de timp ; de exemplu numărul de impulsuri care apar la o centrală telefonică într-un interval de timp, numărul de "clienţi" care solicită un produs într-o "staţie de deservire", numărul de vehicule care traversează un pod, etc. Pentru orice $t \in I\!R$, notăm cu $X(t)$ numărul de produceri ale evenimentului în intervalul $(0, t)$; evident variabila aleatoare $X(t)$ ia valori în $I\!N$. Facem următoarele presupuneri:

1. observaţiile încep la momentul iniţial $t = 0$, deci $X(0) = 0$;

2. pentru orice momente de timp $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, variabilele aleatoare $X(t_2) - X(t_1)$ şi $X(t_4) - X(t_3)$ sunt independente (proces cu *creşteri independente*);

3. repartiţia variabilei aleatoare $X(t + s) - X(t)$, $\ t > 0,\ s > 0$, depinde doar de s, lungimea intervalului şi nu de t;

4. probabilitatea ca un singur eveniment să se producă în intervalul $(t, t+\Delta t)$, pentru Δt suficient de mic este aproximativ proporţională cu lungimea intervalului, deci de forma $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Probabilitatea ca mai mult de un eveniment să se producă în intervalul $(t, t + \Delta t)$ este $o(\Delta t)$.(Prin $o(\Delta t)$s-a notat o cantitate ce depinde doar de Δt ce satisface $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.) Notăm $p_k(t) = P(\{X(t) = k\})$. Fie Δt suficient de mic; la momentul $t + \Delta t$, $X(t)$ ia valoarea k în următoarele două moduri:

a. $X(t) = k$ şi nici un eveniment nu se produce în intervalul $(t, t + \Delta t)$;

b. $X(t) = k - 1$ şi un eveniment se produce în $(t, t + \Delta t)$.

Deoarece din ipoteza 2, variabilele aleatoare $X(t + \Delta t) - X(t)$ şi $X(t)$ sunt independente, probabilitatea evenimentului dat de a este $p_k(t)(1 - \lambda\Delta t)$, iar cea a evenimentului dat de b este $p_{k-1}(t)\lambda\Delta t$ şi cum evenimentele de la a şi b sunt independente

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_{k-1}(t)\lambda\Delta t.$$

Relaţia se scrie sub forma echivalentă

$$\frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \;\; k = 1, 2, 3 \ldots$$

Când $\Delta t \to 0$, găsim ecuaţia diferenţială

$$p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t). \tag{5.12}$$

Pentru $k = 0$, $\ p_{-1}(t) = 0$ şi ecuaţia (5.12) devine

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$$

cu soluţia evidentă $p_0(t) = Ae^{-\lambda t}$. Din ipoteza 1 avem condiţia iniţială $X(0) = 0$, care determină în mod unic soluţia

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Pentru $k = 1$, ecuaţia (5.12) devine

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t},$$

care este o ecuaţie liniară cu soluţia

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Procedând recursiv în acest mod, găsim

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots .$$

Constatăm că pentru fiecare $t \in I\!R$, $X(t)$ este o variabilă aleatoare repartizată Poisson cu parametru λt.

Matricea de tranziţie cu un pas.

$$p_{ij}(t) = P(\{j - i \text{ evenimente au loc în } t \text{ secunde}\}) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \; j \geqslant i.$$

Matricea P este

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!} & \ldots \\ 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Intervalul aleator dintre două evenimente succesive într-un proces Poisson.

Dacă în cadrul unui proces Poisson un eveniment se produce la momentul t, iar următorul la momentul $t + \tau$, τ este o variabilă aleatoare. Să-i determinăm densitatea de probabilitate. Pentru aceasta determinăm mai întâi funcţia de repartiţie. Avem

$$P(\{\tau \geqslant x\}) = e^{-\lambda x}.$$

$\{\tau \geqslant x\}$ exprimă faptul că nici un eveniment nu are loc în intervalul $(t, t+x)$. Deci funcţia de repartiţie este $1 - \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$, iar prin derivare găsim $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$, care este repartiţia exponenţială. Această densitate caracterizează intervalul aleator de timp dintre două produceri succesive de evenimente ale unui proces Poisson. Să observăm că

$$P(\{\tau \geqslant t + t_0\} | \{\tau \geqslant t_0\}) = \frac{P(\{\tau \geqslant t_0 + t\})}{P(\{\tau \geqslant t_0\})} =$$

$$= \frac{\lambda \displaystyle\int_{t_0+t}^{\infty} e^{-\lambda s} ds}{\lambda \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda s} ds} = e^{-\lambda t} = P(\{\tau \geqslant t\}),$$

ceea ce semnifică faptul că procesul Poisson este un proces Markov. Observăm că probabilitatea ca în intervalul $(0, t)$ să se producă exact un eveniment este $\lambda t e^{-\lambda t}$, deoarece este urmată o lege Poisson cu parametrul λt.

Exemplul 5.2.1 Impulsurile care se recepţionează la o staţie se primesc cu rata de 15 pe minut. Să determinăm probabilitatea ca într-un minut să se recepţioneze 5 impulsuri astfel: 3 impulsuri să ajungă în primele 10 secunde şi 2 impulsuri în ultimile 15 secunde. Obţinem $\lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ şi

$$P(\{X(10) = 3, X(60) - X(45) = 2\}) = P(\{X(10) = 3\})P(\{X(60) - X(45) = 2\}) =$$

$$= P(\{X(10) = 3\})P(\{X(60 - 45) = 2\}) = \frac{\frac{10}{4}^3 e^{-\frac{10}{4}}}{3!}\frac{\frac{15}{4}^2 e^{-\frac{15}{4}}}{2!}.$$

Momentul de producere al unui eveniment într-un proces Poisson.

Ne interesează, pe de altă parte, următorul eveniment: ştiind că în intervalul $(0, t)$ s-a produs exact un eveniment, ce densitate de probabilitate are momentul de producere, pe care îl notăm cu s, $0 \leqslant s \leqslant t$. s este o variabilă aleatoare continuă a cărei densitate de probabilitate o notăm cu g. Să determinăm funcţia de repartiţie.

$$F(s) = P(\{X(s) = 1\}|\{X(t) = 1\}) = \frac{P(\{X(s) = 1, X(t) = 1\})}{P(\{X(t) = 1\})} =$$

$$\frac{P(\{X(s) = 1, X(t) - X(s) = 0\})}{P(\{X(t) = 1\})} = \frac{P(\{X(s) = 1, X(t - s) = 0\}}{P\{X(t) = 1\})} = \frac{e^{-\lambda s}\lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)} = \frac{s}{t}.$$

Densitatea de probabilitate este atunci

$$g(s) = \frac{1}{t} \quad , 0 \leqslant s \leqslant t,$$

care este densitatea de probabilitate a repartiţiei uniforme; deci producerea în intervalul $(0, t)$ a unui singur eveniment se face după legea uniformă.

Exemplul 5.2.2 Doi clienţi ajung la o staţie într-o perioadă de două minute. Să determinăm probabilitatea ca ambii să ajungă în primul minut. Timpii fiind repartizaţi uniform şi independent, rezultă că probabilitatea este $\frac{1}{4}$.

Timpul la care s-a produs evenimentul n într-un proces Poisson.

Apariţia unui "client" la o "staţie de deservire" este supus legii Poisson cu parametrul λ. Dacă staţia se închide după apariţia clientului n să determinăm densitatea de probabilitate pentru timpul T în care staţia rămâne deschisă. Fie T_i timpul dintre sosirea clientului $i - 1$ şi a clientului i (T_1 este timpul de la deschidere până la sosirea primului client). Avem deci

$$T = T_1 + \ldots + T_n,$$

unde $\{T < t\}$ semnifică faptul că staţia s-a închis până la momentul t, deci au apărut cel puţin n clienţi, iar probabilitatea este dată de legea Poisson cu parametrul λt

$$P(\{T < t\}) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Prin derivare găsim

$$f_T(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\lambda k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} - \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} \right) e^{-\lambda t} = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

care este o densitate de probabilitate pentru variabila numită **repartiţia Erlang**.

Exemplul 5.2.3 Numărul de semnale emise de un radar este un proces Poisson cu parametrul λ. Dacă n semnale au fost observate în intervalul $(0,t)$ să determinăm probabilitatea evenimentului $\{k$ particule au fost emise în $(0,\tau)\}$ cu $\tau < t$.

$$P(\{k \text{ semnale emise în } (0,\tau) \mid n \text{ semnale emise în } (0,t)\}) =$$

$$= \frac{P(\{k \text{ semnale emise în } (0,\tau) \text{ şi } n-k \text{ semnale emise în } (\tau,t)\})}{P(\{n \text{ semnale emise în } (0,t)\})} =$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k}{k!} \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}(\lambda(t-\tau))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = C_n^k \left(\frac{\tau}{t}\right)^k \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{n-k}.$$

Exemplul 5.2.4 Semnalul telegrafic aleator.

Fie $T(t)$ un proces care ia stările ± 1 cu aceeaşi probabilitate la momentul iniţial. $T(t)$ îşi schimbă polaritatea odată cu sosirea unui semnal dintr-un proces Poisson cu parametrul α. Reprezentăm o traiectorie în Figura 5.4.

Să calculăm probabilităţile evenimentelor $\{T(t) = \pm 1\}$.

Ne ocupăm pentru început de evenimentul $\{T(t) = 1\}$. Folosind formula probabilităţii totale avem

$$P(\{T(t) = 1\}) = P(\{T(t) = 1\}|\{T(0) = 1\})P(\{T(0) = 1\}) +$$

$$+ P(\{T(t) = 1\}|\{T(0) = -1\})P(\{T(0) = -1\}).$$

Calculăm probabilităţile condiţionate. Notăm cu $A = \{$ în intervalul $(0,t)$ se produce un număr par de schimbări $\}$ şi cu $B = \{$ în intervalul $(0,t)$ se produce un număr impar de schimbări $\}$

$$P(\{T(t) = 1\}|\{T(0) = 1\}) = P(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{2j}}{(2j)!} e^{\lambda t} = \frac{e^{-\lambda t}}{2}(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda t}).$$

$$P(\{T(t) = 1\}|\{T(0) = -1\}) = P(B) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda t}).$$

Deoarece $P(\{T(0) = 1\}) = P(\{T(0) = -1\}) = \frac{1}{2}$, rezultă după înlocuiri că evenimentele $\{T(t) = \pm 1\}$ au probabilitatea $\frac{1}{2}$.

Procese de naştere-moarte.

Vom modela în continuare următoarea situaţie practică ce apare în teoria aşteptării. Considerăm un sistem format dintr-un "fir de aşteptare" formată din n "clienţi" şi o persoană care serveşte. Spunem că sistemul se află în starea S_n dacă sunt n "clienţi" la coadă, inclusiv cel servit (dacă există). Din starea S_n sunt posibile doar două tranziţii:

- la starea S_{n-1} dacă un client a fost servit şi părăseşte coada;

- la starea S_{n+1} dacă un client este încă servit în timp ce un nou client se aşează la coadă.

Considerăm un proces care descrie comportarea cozii în timp. La momentul t, dacă sistemul precedent se află în starea S_n, vom nota $X(t) = n$. Se obţine astfel un proces Markov. Facem următoarele ipoteze:

1. Dacă sistemul este în starea S_n, poate realiza tranziţii la S_{n-1} sau la S_{n+1}, $n \geqslant 1$ (de la S_0 este posibilă doar S_1).

2. Probabilitatea unei tranziţii $S_n \to S_{n+1}$ într-un interval scurt Δt este $\alpha_n \Delta t$ parametrul α_n se numeşte parametru de "naştere"şi facem ipoteza că depinde de starea S_n.

3. Probabilitatea unei tranziţii $S_n \to S_{n-1}$ într-un interval de lungime Δt este $\beta_n \Delta t$ parametru β_n se numeşte parametru de "moarte".

Probabilitatea ca în intervalul $(t, t + \Delta t)$ să aibă loc mai mult de o tranziţie este 0. Sistemul se află în starea S_n la momentul $t + \Delta t$ în următoarele situaţii:

a. La momentul t se află în starea S_n şi nici o tranziţie nu are loc în intervalul $(t, t+\Delta t)$ cu probabilitatea $(1 - \alpha_n \Delta t)(1 - \beta_n \Delta t)$, care poate fi aproximată cu $1 - \alpha_n \Delta t - \beta_n \Delta t$.

b. Fiind în starea S_{n-1} la momentul t are loc o tranziţie la starea S_n în intervalul $(t, t + \Delta t)$ cu probabilitatea $\alpha_{n-1} \Delta t$.

c. La momentul t sistemul se află în starea S_{n+1} şi o tranziţie la starea S_n are loc în $(t, t + \Delta t)$ cu probabilitatea $\beta_{n+1} \Delta t$.

Notăm $P_n(t) = P(\{\ X(t)$ se află în starea $S_n\ \})$ şi facem ipoteza că că $P_n(t)$ este o funcţie derivabilă cu derivată continuă. Atunci

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \alpha_n \Delta t - \beta_n \Delta t) + \alpha_{n-1} \Delta t P_{n-1}(t) + \beta_{n+1} \Delta t P_{n+1}(t), \quad n \geqslant 1,$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \alpha_0 \Delta t) + \beta_1 \Delta t P_1(t).$$

Impărţind prin Δt

$$\frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -(\alpha_n + \beta_n) P_n(t) + \alpha_{n-1} P_{n-1}(t) + \beta_{n+1} P_{n+1}(t), \quad n \geqslant 1,$$

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0}{\Delta t} \Delta t = -\alpha_0 P_0(t) + \beta_1 P_1(t).$$

Dacă $\Delta t \to 0$, obţinem

$$P_n'(t) = -(\alpha_n + \beta_n) P_n(t) + \alpha_{n-1} P_{n-1}(t) + \beta_{n+1} P_{n+1}(t), \quad n \geqslant 1,$$

$$P_0'(t) = -\alpha_0 P_0(t) + \beta_1 P_1(t).$$

Vom da soluţii pentru aceste ecuaţii diferenţiale în cazul în care $P_n(t)$ nu depinde de t; în acest caz sistemul precedent devine

$$\begin{cases} (\alpha_n+\beta_n)P_n = \alpha_{n-1}P_{n-1}+\beta_{n+1}P_{n+1}, \quad n \geqslant 1, \\ \alpha_0 P_0 = \beta_1 P_1, \end{cases}$$

şi se rezolvă prin recurenţă. Se obţine soluţia

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\alpha_0}{\beta_1}P_0 \\ P_2 &= \frac{\alpha_0\ \alpha_1}{\beta_1\ \beta_2}P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= \frac{\alpha_0\ \alpha_1 \ldots\ \alpha_{n-1}}{\beta_1\ \beta_2 \ldots\ \beta_n}P_0 \end{aligned}.$$

Deoarece sistemul trebuie să se afle într-o stare, suma probabilităţilor precedente trebuie să fie 1, deci

$$P_0\left(1+\frac{\alpha_0}{\beta_1}+\frac{\alpha_0\alpha_1}{\beta_1\beta_2}+\ldots\right) = 1.$$

Exemplul 5.2.5 Intr-o "staţie" sosesc "clienţi" după legea Poisson cu parametrul λ, iar timpul de servire este o lege exponenţială cu parametrul pozitiv μ, $0<\lambda<\mu$. Dacă este aglomeraţie se formează o coadă, iar starea sistemului la momentul $X(t)$ este un proces de naştere -moarte cu parametrii $\alpha_n=\lambda$ şi $\beta_n=\mu$. Particularizând ecuaţiile precedente şi notând $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ găsim

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda}{\mu}P_0 \\ P_2 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 = \rho^2 P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0 \end{aligned}.$$

Punem condiţia

$$P_0(1+\rho+\rho^2+\ldots) = P_0\frac{1}{1-\rho} = 1, \quad \rho<1.$$

De aici rezultă $P_0 = 1-\rho$. Deducem $P_n=(1-\rho)\rho^n$, pentru $n=0,1,\ldots$, care este repartiţia geometrică.Să particularizăm această situaţie. Pentru a evita aglomeraţia dintr-o staţie de deservire, clienţii aşezaţi la coadă ar trebui să nu depăşească numărul 5, cu probabilitatea 0,99. Sosirile au loc după o lege Poisson cu parametrul $\lambda=1,5$ clienţi pe minut. Dacă deservirea se face după o lege exponenţială, cât de repede trebuiesc aceştia serviţi ? Să determinăm deci μ.

Probabilitatea ca cel puţin 5 clienţi să fie la coadă este

$$p=\sum_{n=5}^{\infty}(1-\rho)\rho^n=\rho^5; \quad \rho=\frac{\lambda}{\mu}.$$

Pentru ca această probabilitate să fie 1-0,99 =0,01, punem condiţia

$$\rho^5 \leqslant 0,1$$

de unde găsim $\mu > 9,12$. Deci ar trebui serviţi cel puţin 10 clienţi în medie pe minut pentru a evita aglomeraţia.

5.3 Procese stochastice staţionare

În unele situaţii stările precedente ale unui sistem exercită un puternic efect asupra stărilor viitoare. În general dacă procesele au fost considerate fără postacţiune (procese Markov), se pot face unele corectări în alegerea stărilor. De exemplu, dacă considerăm o schimbare în poziţia unei particule în procesul de difuzie, considerat ca proces fără postacţiune, aceasta înseamnă că se neglijează inerţia particulei. Situaţia se poate corecta introducând în conceptul de stare şi viteza particulei, alături de coordonatele poziţiei. În cazul cel mai general Hincin a izolat o clasă importantă de procese stochastice cu *postacţiune*, numite *procese staţionare*. Acestea se întâlnesc în fenomenele acustice, teoria semnalelor etc.

Fie $\{X(t)\}, \ \ t \geqslant 0$, un proces stochastic.

Definiţia 5.3.1 *Numim* funcţie de repartiţie $n-$dimensională *funcţia dată prin formula*

$$F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P(\{X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\})$$

pentru orice $t_1, \dots, t_n, \ \ n \in I\!N$.

Presupunem că funcţia de repartiţie n-dimensională satisface următoarele două condiţii:

-condiţia de simetrie

$$F(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) = F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n), \tag{5.13}$$

pentru orice permutare $i_1, \dots, i_n$ a mulţimii $1, \dots, n$,

-condiţia de compatibilitate; dacă $m < n$

$$F(x_1, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m) =$$

$$= F(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty, t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n), m + 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{5.14}$$

Kolmogorov a demonstrat că aceste funcţii de repartiţie caracterizează complet un proces stochastic, în sensul că dată o familie de funcţii ce verifică condiţiile 1-4, din Capitolul 3.3 şi satisface (5.13), (5.14), există un câmp borelian de probabilitate şi un proces stochastic care admite aceste funcţii, ca funcţii de repartiţie n-dimensionale (vezi [9]). Prin analogie cu cazul variabilelor aleatoare n-dimensionale, se poate introduce noţiunea de densitate de probabilitate, care se va nota $f(x_1, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m)$. Dacă procesul este cu valori discrete, analogul îl constituie

$$p(x_1, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m) = P(\{X_1(t_1) = x_1, X_2(t_2) = x_2, \dots, X_n(t_n) = x_n\})$$

Exemplul 5.3.1 Fie X_n un lanţ de variabile aleatoare identic, independent repartizate, cu $p = \frac{1}{2}$, atunci

$$P(\{X_1(t_1) = x_1, X_2(t_2) = x_2, \ldots, X_n(t_n) = x_n\}) = 2^{-n}.$$

Valori caracteristice ale unui proces.

Fie $X(t)$ un proces aleator. *Media* $m_X(t)$ este definită prin

$$m_X(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,t)dx,$$

unde $f(x,t)$ este densitatea de probabilitate a variabilei $X(t)$. *Autocorelaţia* $R_X(t_1,t_2)$ este definită prin

$$R_X(t_1,t_2) = M[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y,t_1,t_2)dxdy,$$

unde $f(x,y,t_1,t_2)$ este densitatea de probabilitate de dimensiune doi a procesului. *Autocovarianţa* $Cov_X(t_1,t_2)$ este definită drept covarianţa variabilelor $X(t_1)$ şi $X(t_2)$,

$$Cov_X(t_1,t_2) = M[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))].$$

Legătura dintre cele două funcţii este imediată şi constă în

$$Cov_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2).$$

Dispersia (varianţa) lui $X(t)$ este dată de formula

$$D^2[X(t)] = M[(X(t) - m_X(t))^2] = Cov_X(t,t).$$

Coeficientul de corelaţie este definit de

$$\rho_X(t_1,t_2) = \frac{Cov_X(t_1,t_2)}{\sqrt{Cov_X(t_1,t_1)}\sqrt{Cov_X(t_2,t_2)}}.$$

Exemplul 5.3.2 Fie $X(t) = A\cos 2\pi t$, unde A este o variabilă aleatoare. Să determinăm valorile caracteristice.

$$m_X(t) = M[A\cos 2\pi t] = M[A]\cos 2\pi t;$$

$$R_X(t_1,t_2) = M[A\cos 2\pi t_1 A\cos 2\pi t_2] = M[A^2]\cos 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2;$$

$$Cov_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = (M[A^2] - M^2[A])\cos 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2 =$$

$$= D^2[A]\cos 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2.$$

Procese multiple.

Două procese $X(t),\ Y(t)$ se numesc *independente* dacă $\forall\ k, j$ şi orice alegere $t_1, \ldots, t_k$ şi $t'_1, \ldots t'_j$, variabilele aleatoare multidimensionale $(X(t_1), \ldots, X(t_k))$ şi $(Y(t'_1), \ldots Y(t'_j))$ sunt independente. *Corelaţia încrucişată* $R_{XY}(t_1, t_2)$ este definită prin

$$R_{XY}(t_1, t_2) = M[X(t_1)Y(t_2)].$$

Procesele $X(t)$ şi $Y(t)$ se numesc *ortogonale* dacă

$$R_{XY}(t_1, t_2) = 0, \quad \forall t_1, t_2.$$

Covarianţa încrucişată $Cov_{XY}(t_1, t_2)$ este definită prin

$$Cov_{XY}(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m_X(t_1))(Y(t_2) - m_Y(t_2))] = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2).$$

Procesele se numesc *necorelate* dacă

$$Cov_{XY}(t_1, t_2) = 0,\ \forall t_1, t_2.$$

Exemplul 5.3.3 Fie $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$ şi $Y(t) = \sin(\omega t + \Theta)$ unde Θ este o variabilă aleatoare repartizată uniform pe $[-\pi, +\pi]$. Să determinăm covarianţa încrucişată. Arătăm că media procesului $X(t)$ este 0.

$$m_X(t) = M[\cos(\omega t + \theta)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + x)dx = 0.$$

Analog rezultă că media procesului $Y(t)$ este 0.

$$R_{XY}(t_1, t_2) = M[\cos(\omega t_1 + \Theta)\sin(\omega t_2 + \Theta)] =$$

$$= M[-\frac{1}{2}\sin(\omega(t_1 - t_2)) + \frac{1}{2}\sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta)] = -\frac{1}{2}\sin(\omega(t_1 - t_2))$$

deoarece $M[\sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta)] = 0$.

Definiţia 5.3.2 *Procesul* $X(t)$ *se numeşte* staţionar în sens restrâns *dacă* $\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N},\ \ u \in \mathbb{R}_+$ *are loc*

$$F(x_1, \ldots x_n, t_1 + u, \ldots, t_n + u) = F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n). \tag{5.15}$$

Relaţia (5.15) se interpretează astfel: funcţiile de repartiţie n-dimensionale nu depind de creşterea timpului. Dacă în (5.15) dăm lui n valoarea 2, găsim că funcţiile de repartiţie bidimensionale depind numai de diferenţa $t_2 - t_1$. Deoarece în practică lucrul cu funcţiile de repartiţie este dificil se pune problema înlocuirii lor cu alte caracteristici şi anume cu momentele. Dacă $X(t)$ are dispersie finită şi $X(t)$ este staţionar în sens restrâns găsim:

1.$M[X(t + u)] = M[X(t)] = M[X(0 + t)] = M[X(0)] = m$;

2.$D^2[X(t + u)] = D^2[X(t)] = D^2[X(0)] = \sigma^2$;

3.$M[(X(t + u)X(t))] = M[(X(u)X(0))]$.

Ca o primă consecinţă a acestor proprietăţi, observăm că în cazul proceselor staţionare putem presupune $m = 0$ şi $\sigma = 1$, ceea ce revine la considerarea procesului normalizat, adică $\dfrac{X(t) - m}{\sigma}$.

Definiţia 5.3.3 *Procesul* $X(t)$ *este* staţionar în sens larg *dacă au loc condiţiile 1-3.*

Definiţia 5.3.4 *Numim* funcţie de corelaţie *a unui proces staţionar în sens larg coeficientul de corelaţie al variabilelor aleatoare* $X(t)$ *şi* $X(t+u)$.

Deci funcţia de corelaţie are expresia

$$R(u) = \frac{M[X(t+u) - M[X(t+u)]]M[X(t) - M[X(t)]]}{\sqrt{D^2[X(t)]D^2[X(t+u)]}}.$$

Dacă facem ipoteza $m = 0$ şi $\sigma = 1$ din condiţia de a fi staţionar rezultă că funcţia de corelaţie depinde doar de u şi are expresia

$$R(u) = M[(X(u)X(0))].$$

Definiţia 5.3.5 *Un proces staţionar se numeşte* continuu *dacă are loc*

$$M(X(t+u) - X(t))^2 \to 0, \text{ pentru } u \to 0.$$

Propoziţia 5.3.1 *Dacă* $X(t)$ *este un proces continuu, atunci au loc:*
1. $P(\{\ |X(t+u) - X(t)\ | \geqslant \varepsilon\}) \to 0$, *dacă* $u \to 0$;
2. $\lim\limits_{u\to 0} R(u) = 1$;
3. $R(u)$ *este continuă.*

Demonstraţie.
1. Din inegalitatea lui Cebâşev , rezultă

$$P(\{|X(t+u) - X(t)| \geqslant \varepsilon\}) = P(\{|X(t+u) - X(t) - M[(X(t+u) - X(t))]| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{D^2[(X(t+u) - X(t))]}{\varepsilon},$$

care din definiţia continuităţii tinde la 0, dacă $u \to 0$.
2. Se observă imediat că

$$M(X(t+u) - X(t))^2 = 2(1 - R(u)) \to 0, \text{ dacă } u \to 0,$$

de unde afirmaţia 2.
3. Folosind inegalitatea lui Cauchy are loc

$$|R(u+\Delta u) - R(u)| = |M[(X(u+\Delta u)X(0))] - M[(X(u)X(0))]| =$$
$$= |M[(X(0)(X(u+\Delta u) - X(u))]| \leqslant \sqrt{M[X^2(0)]M[(X(u+\Delta u) - X(u))^2]} \to 0,$$

dacă $\Delta u \to 0$. ∎

Teorema 5.3.1 *(*Teorema lui Hincin*) Funcţia reală* $R(u)$ *este o funcţie de corelaţie pentru un proces staţionar continuu dacă şi numai dacă există o funcţie de repartiţie* $F(x)$ *astfel încât*

$$R(u) = \int_{-\infty}^{\infty} cosux\ dF(x).$$

Demonstrație. Să presupunem mai întâi că $R(u)$ este o funcţie de corelaţie pentru un proces staţionar continuu. Din proprietatea precedentă $R(u)$ rezultă continuă şi mărginită. Să arătăm că este şi pozitiv definită. Pentru orice numere reale $u_1, u_2, \ldots, u_n$ din $I\!R$ şi $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbf{C}$ unde $n \in I\!N$, are loc

$$0 \leqslant M|\sum_{k=1}^{n} \eta_k X^2(u_k)| = M\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_i \overline{\eta}_j X(u_i) X(u_j)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(u_i - u_j)\eta_i \overline{\eta}_j.$$

Deoarece $R(0) = 1$ din teorema Bochner-Hincin are loc reprezentarea

$$R(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF(x),$$

unde F este o funcţie de repartiţie. Deoarece R este o funcţie reală, rezultă afirmaţia.

Reciproc, să arătăm că dacă

$$R(u) = \int_{-\infty}^{\infty} cosux\; dF(x),$$

există un proces staţionar $X(t)$ cu funcţia de corelaţie $R(u)$. Fie $n \in I\!N$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ şi variabila aleatoare n-dimensională normal repartizată $X(t_1), \ldots X(t_n)$ cu

$$M[X(t_1)] = \ldots = M[X(t_n)] = 0,$$

$$D^2[(X(t_1))] = \ldots = D^2[(X(t_n))] = 1,$$

având funcţiile de corelaţie

$$R(t_i - t_j) = M[X(t_i)X(t_j)].$$

Deoarece forma pătratică

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_i - t_j) u_i u_j$$

este pozitiv definită, se pot defini funcţiile de densitate

$$f_n(u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n) = A_n e^{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_i - t_j) u_i u_j}, \quad A_n \in I\!R.$$

Se verifică uşor că funcţiile de repartiţie asociate satisfac condiţiile de simetrie şi compatibilitate, deci definesc un proces stochastic, care rezultă staţionar. ∎

Exemplul 5.3.4 Considerăm procesul de forma

$$Z(t) = X(t)\cos\lambda t + Y(t)\sin\lambda t,\ \ \lambda \in I\!R,$$

unde $X(t), Y(t)$ sunt procese necorelate, deci $M[XY] = M[X]M[Y]$ ce satisfac

$$M[X] = M[Y] = 0,\ \ D^2[X] = D^2[Y] = 1.$$

Să arătăm că $Z(t)$ este un proces staţionar. Pentru aceasta să calculăm funcţia de corelaţie

$$R(u) = M[X(t+u)X(t)] =$$
$$= M[X\cos\lambda(t+u) + Y\sin\lambda(t+u))(X\cos\lambda t + Y\sin\lambda t)] =$$
$$= M[(X^2\cos\lambda t\cos\lambda(t+u) + XY(\sin\lambda(t+u)\cos\lambda t + \cos\lambda(t+u)\sin\lambda t)+$$
$$+Y^2\sin\lambda t\sin\lambda(t+u)] = \cos\lambda(t+u)\cos\lambda t + \sin\lambda t\sin\lambda(t+u) = \cos\lambda u.$$

Alegem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\lambda \\ \frac{1}{2}, & -\lambda < x \leqslant \lambda \\ 1, & x > \lambda \end{cases}.$$

Avem atunci

$$\cos\lambda u = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ux dF(x) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \cos ux dF(x),$$

de unde în virtutea teoremei rezultă că procesul este staţionar.

Exemplul 5.3.5 Considerăm procesul

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k Z_k(t),$$

unde $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, iar $Z_k(t) = X_k(t)\cos\lambda_k t + Y_k\sin\lambda_k t,\ \lambda_k \in I\!R$. $X_k(t),\ Y_k(t)$ sunt preocese ce satisfac

$$M[X_k] = M[Y_k] = 0,\quad D^2[X_k] = D^2[Y_k] = 1,\ \ k = \overline{1,n}$$
$$M[X_iX_j] = M[Y_iY_j] = 0,\ \ i \neq j,\ \ M[X_iY_j] = 0,\ \ i,j = \overline{1,n}.$$

Calculând funcţia de corelaţie, găsim

$$R(u) = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \cos\lambda_k u,$$

de unde rezultă că procesul este staţionar, asociat funcţiei de repartiţie F care are salturi de mărimea $\frac{1}{2}b_k^2$ în punctele $\pm\lambda_k$.

In literatura de specialitate F se numeşte *spectru*; dacă F este funcţie de salturi, procesul se numeşte *cu spectru discret*. Slutsky a demonstrat că orice proces cu spectru discret este reprezentabil sub forma celui din exemplul precedent.

PROBLEME PROPUSE

Problema 4.1 Fie I_n procesul Bernoulli identic şi independent repartizat. Calculaţi $P(\{I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0, I_4 = 1\})$.
R: $p^2(1-p)^2$.

Problema 4.2 Fie $D_n = 2I_n - 1$ unde I_n este procesul din problema precedentă. Calculaţi media şi dispersia.
Soluţie $m_X(n) = M[2I_n - 1] = 2M[I_n] - 1 = 2p - 1$ $D^2[D_n] = D^2[2I_n - 1] = 2^2D^2[I_n] = 4p(1-p)$. Procesul reprezintă de fapt schimbarea poziţiei unei particule care se mişcă în linie dreaptă făcînd salturi de ± 1 la fiecare unitate de timp.

Problema 4.3 Fie X un număr ales la întîmplare din $[0, 1]$ şi fie dezvoltarea lui în baza 2, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 2^{-n}$, $b_n \in \{0, 1\}$. Definim $X_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Calculaţi $P(\{X_1 = 0\})$ şi $P(\{X_1 = 0, X_2 = 1\})$.
Soluţie. $X_1 = 0$, dacă $0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}$, deci cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Iar $P(\{X_1 = 0, X_2 = 1\})$ este $\frac{1}{4}$, deoarece $\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}$.

Problema 4.4 Un calculator este inspectat la momentele t_1, t_2, t_3 şi se poate afla în una din următoarele stări:
s_1 funcţionează normal;
s_2 are un număr neglijabil de erori, care nu impiedică calculatorul să funcţioneze;
s_3 are erori considerabile, dar rezolvă limitat probleme;
s_4 nu funcţionează.
La momentul iniţial calculatorul este în starea s_1 iar matricea de tranziţie este

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Asociaţi diagrama şi aflaţi probabilităţile de stare după fiecare din cele trei inspecţii.
Soluţie. Probabilităţile de stare iniţială sunt $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, deoarece iniţial calculatorul funcţionează. Apoi

$$p_1(1) = 0,5,\ p_2(1) = 0,3,\ p_3(1) = 0,2,\ p_4(1) = 0$$

$$p_1(2) = 0,25,\ p_2(2) = 0,27,\ p_3(2) = 0,28,\ p_4(2) = 0,2$$

$$p_1(3) = 0,125,\ p_2(3) = 0,183,\ p_3(3) = 0,242,\ p_4(3) = 0,450.$$

Diagrama este următoare

Problema 4.5 O particulă se deplasează aleator, sărind câte o unitate la dreapta sau stânga, după diagrama de mai jos. Găsiţi probabilitatea ca după patru paşi particula să nu fie mai depărtată cu o unitate faţă de origine. Iniţial particula se află în origine.

R: Însumăm probabilităţile, ca la momentul 4, particula să se afle în stările S_{-1}, S_0, sau S_1 şi găsim 0,693.

Problema 4.6 Fie $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$ unde Θ este repartizată uniform pe $(-\pi, +\pi)$. Să determinăm media, autocorelaţia şi autovarianţa.
Soluţie $m_X(t) = M[\cos(\omega t + \Theta)] = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{+\pi}\cos(\omega t + x)dx = 0$;
$Cov_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) = M[\cos(\omega t_1 + \theta)\cos(\omega t_2 + \theta)] =$
$\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{+\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(\omega(t_1 - t_2)) + \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2x)\right)dx = \frac{1}{2}\cos(\omega(t_1 - t_2))$.

Problema 4.7 Fie X_n un lanţ de variabile normale independente, identic repartizate, cu media m şi dispersia σ^2. Determinaţi matricea de covarianţă la momentele $t_1, \ldots, t_k$ şi densitatea de probabilitate.

Soluţie $C_X(t_i, t_j) = \sigma^2\delta_{ij}$ unde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$f(x_1, \ldots, x_k, X_1, \ldots, X_k) = f_X(x_1)f_X(x_2)\ldots f_X(x_k) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{k/2}} e^{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Problema 4.8 Un proces $Y(t)$ constă dintr-un semnal dorit $X(t)$ la care se adaugă zgomotul $N(t)$, deci $Y(t) = X(t) + N(t)$. Găsiţi corelaţia încrucişată dintre cele două procese, presupunînd că $X(t), N(t)$ sunt independente.
Soluţie Folosind independenţa variabilelor $X(t)$ şi $N(t)$, găsim

$$R_{XY}(t_1, t_2) = M[X(t_1)Y(t_2)] = M\left[X(t_1)(X(t_2) + N(t_2))\right] =$$

$$= M[X(t_1)X(t_2)] + M[X(t_1)N(t_2)] =$$

$$= R_{XY}(t_1, t_2) + M[X(t_1)]M[N(t_2)] = R_{XY}(t_1, t_2) + m_X(t_1)m_N(t_2).$$

Problema 4.9 În ziua 0 există 2 becuri noi de rezervă. Probabilitatea de a schimba un bec este p, iar probabilitatea de a nu schimba este $q = 1 - p$. Fie Y_n numărul de becuri necesar la sfârşitul zilei n. Determinaţi matricea de tranziţie după un pas şi după n paşi, probabilităţile de stare la momentul n şi comportarea lor la limită.
Soluţie Stările procesului sunt 2,1,0, iar diagrama corespunzătoare este
Matricea de tranziţie cu un pas este

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

iar probabilităţile de stare la momentul iniţial sunt 0, 0, 1. După n paşi

$p_{22}(n) = P(\{$ nici un bec nou nu e necesar în n zile$\}) = q^n$;
$p_{21}(n) = P(\{$ un bec nou este necesar în n zile$\}) = C_n^1 pq^{n-1}$;
$p_{20}(n) = 1 - p_{22}(n) - p_{21}(n)$;
Matricea de tranziţie după n paşi este

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - q^n & q^n & 0 \\ 1 - q^n - npq^{n-1} & npq^{n-1} & q^n \end{pmatrix}.$$

Trecînd la limită pe fiecare element al matricei găsim matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probabilităţile de stare la momentul n sunt date de produsul

$$(0 \ \ 0 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - q^n & q^n & 0 \\ 1 - q^n - npq^{n-1} & npq^{n-1} & q^n \end{pmatrix}$$

iar la limită se obţine $(1 \ \ 0 \ \ 0)$. Interpretarea evidentă este că după un număr foarte mare de paşi procesul devine "staţionar" şi rămân 0 becuri de rezervă.

Index

Index