Funcţională liniară

Fie V un spaţiu liniare peste Γ, unde $\Gamma = \mathbb{R}$ sau $\Gamma = \mathbb{C}$.

Definiţie

Se numeşte funcţională liniară o funcţie $f : V \to \Gamma$ care satisface

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in V$
2. $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u), \quad \forall u \in V, \ \ \alpha \in \Gamma.$

Notăm $V' = \{f : V \to \Gamma, f \text{ funcţională liniară}\}$. V' se numeşte dualul lui V.

Formă liniară

Definiţie

Dacă V este un spaţiu liniar finit dimensional, atunci o funcţională liniară se numeşte formă liniară.

Fie $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ o bază în V. Pentru orice $u \in V$ are loc $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Dacă f este o formă liniară atunci

$$f(u) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

Coeficienţii formei liniare

Definiţie

Scalarii

$$a_i = f(e_i) \tag{1}$$

se numesc coeficienţii formei liniare în baza $\mathcal{B}$.

Matricea $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}$ se numeşte matricea formei liniare în baza $\mathcal{B}$.
Relaţia $f(u) = \alpha, \ \alpha \in \Gamma$ este echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha.$$

Schimabrea matricei la o schimbare de bază

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$ două baze în V.

Teoremă

Dacă a'_i sunt coeficienţii lui f în baza $\mathcal{B}'$, atunci are loc

$$a' = a \cdot C. \tag{2}$$

Demonstraţie. Are loc

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j.$$

Coeficienţii a'_i sunt

$$a'_i = f(e'_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} a_j.$$

Forme biliniare reale

Fie V spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$.

Definiţie

Funcţionala $f : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţională biliniară dacă satisface:

1. $f(\alpha u + \alpha' u', v) = \alpha f(u, v) + \alpha' f(u', v)$

2. $f(u, \beta v + \beta' v') = \beta f(u, v) + \beta' f(u, v')$

$\forall \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}, \quad u, u', v, v' \in V.$

Definiţie

Dacă V este finit dimensional, o funcţională biliniară se numeşte formă biliniară.

Definiţie

f se numeşte simetrică dacă $f(u, v) = f(v, u), \ \forall u, v \in V.$

Expresia generală a unei forme biliniare

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ o bază în V şi $u, v \in V$. Au loc

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Aplicăm f peste vectorii bazei şi obţinem

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(e_i, e_j) \tag{3}$$

Notăm

$$a_{ij} = f(e_i, e_j). \tag{4}$$

Matricea formei biliniare într-o bază

Definiţie

Matricea $A = (a_{ij})$ se numeşte matricea formei biliniare în baza $\mathcal{B}$.

Relaţia (3) poate fi scrisă sub forma

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Schimbarea matricei unei forme bilinare

Teoremă

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ *şi* $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$ *două baze în* V. *Fie* $f : V \times V \to \mathbb{R}$ *o formă biliniară, care are matricea* A *în baza* $\mathcal{B}$ *şi matricea* A' *în baza* $\mathcal{B}'$. *Fie* C *matricea de schimbare de bază. Are loc*

$$A' = C^t \cdot A \cdot C. \tag{5}$$

Demonstraţie

Vectorii din $\mathcal{B}'$ se exprimă prin

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j.$$

Atunci

$$a'_{ij} = f(e'_i, e'_j) = f(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj} e_l) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{lj} f(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} c_{lj} a_{kl} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} c_{lj}$$

Formă biliniară simetrică

Teoremă

Fie $f : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară, care are matricea A în baza $\mathcal{B}$. Atunci f este simetrică dacă şi numai dacă $A = A^t$.

Demonstraţie. Fie $u, v \in V$. Au loc

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Afirmaţia rezultă dacă ţinem cont de

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} \text{ şi } f(v, u) = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}.$$

Forme pătratice reale

Fie V un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$, cu $dim(V) = n$.

Definiţie

Funcţia $h : V \to \mathbb{R}$ se numeşte formă liniară dacă există o formă biliniară simetrică $f : V \times V \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$h(u) = f(u, u). \tag{6}$$

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ în V şi $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Are loc dacă folosim (4)

$$h(u) = f(u, u) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}.$$

Matricea formei pătratice

Definiţie

Matricea

$$A = (a_{ij}),\ i, j = 1, \cdots, n, \tag{7}$$

se numeşte matricea formei pătratice în baza $\mathcal{B}$.

Forma biliniară se scrie sub formă matriceală

$$h(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Rangul unei forme pătratice

Definiţie

Dacă h este o formă pătratică, atunci forma biliniară asociată (polară) este prin definiţie

$$f(u,v) = \frac{1}{2}(h(u+v) - h(u) - h(v). \tag{9}$$

Definiţie

Numim rang al formei pătratice rangul matricei A.
Dacă $rang(A) = n$*, forma pătratică se numeşte nedegenerată.*
Dacă $rang(A) < n$*, forma pătratică se numeşte degenerată.*

Forma canonica

Definiţie

Spunem că forma pătratică are forma canonică *dacă există o bază $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ în care forma pătratică are expresia*

$$h(u) = \sum_{i=1}^{n} k_i (x'_i)^2 \quad unde \quad u = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i. \tag{10}$$

Forma Lorentz

$$h(u) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_4^2,$$

unde c este viteza luminii.

Metoda Iacobi

Fie A o matrice pătratică. Prin minor principal înţelegem un determinant, a cărui diagonală conţine numai elemente din diagonala principală a matricei.

Teoremă

Fie $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică cu matricea A. Presupunem că toţi minorii principali $\Delta_i, i = 1, \cdots, n$ satisfac $\Delta_i \neq 0, \forall i = 1, \cdots, n$. Atunci există o bază în care forma canonică este

$$h(u) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2. \qquad (11)$$

Metoda Gauss

Teoremă

Fie $h : V \to \mathbb{R}$ *o formă pătratică. Există o bază în care* h *are forma canonică.*

Metoda constă în transformarea matricei A a formei pătratice, până când aceasta are numai 0 sub diagonala principală.

Legea inerţiei

Teoremă

Fie $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Pentru orice bază în care h are formă canonică numărul coeficienţilor pozitivi, negativi sau nuli este acelaşi.

Pozitiva definire

Definiţie

Spunem că forma pătratică $h : V \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă pentru orice $u \neq 0_V$ are loc $h(u) > 0$.

Teoremă

O formă pătratică $h : V \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0, \forall i = 1, \cdots, n$.

Definiţie

Spunem că forma pătratică $h : V \to \mathbb{R}$ este pozitiv semi-definită dacă pentru orice $u \in V$ are loc $h(u) \geq 0$.

Definiţie

Spunem că forma pătratică $h : V \to \mathbb{R}$ este nedefinită dacă există $u, u' \in V, u \neq u'$ astfel ca $h(u) < 0$ şi $h(u') > 0$