1. Planul în spaţiu
   - Planul determinat de normală şi un punct
   - Ecuaţia generală
   - Plane paralele
   - Unghi diedru
   - Planul determinat de 3 puncte necoliniare
2. Dreapta în spaţiu
   - Dreapta printr-un punct şi de vector director dat
   - Dreapta prin două puncte
   - Dreapta ca intersecţie a două plane
   - Plane determinate de drepte paralele şi concurente

Planul determinat de normală şi un punct

Fie reperul $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ în spaţiu.
Numim **normala** a unui plan, un vector perpendicular pe fiecare direcţie din plan. Normala este un vector de forma

$$\overrightarrow{N} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat al planului şi $M(x, y, z)$ un punct oarecare al planului. Din definiţia normalei

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{N}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{N} = 0. \tag{1}$$

Relaţia (1) este echivalentă cu

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \perp \overrightarrow{N} = 0 \tag{2}$$

Planul determinat de normală şi un punct are ecuaţia:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3}$$

Ecuaţia generală

Fie în S reperul cartezian $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Teoremă

Pentru orice plan există $A, B, C \in \mathbb{R}$, cu $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ astfel ca orice punct din plan să satisfacă ecuaţia

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4}$$

Ecuaţia explicită. Dacă $C \neq 0$, atunci ecuaţia planului se poate pune sub forma

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C} \tag{5}$$

Cazuri particulare

1. Dacă $D = 0$ planul trece origine
2. Dacă $A = 0$ planul este paralel cu Ox
3. Dacă $A = D = 0$, planul conţine axa Ox
4. Dacă $A = B = 0$ planul este paralel cu planul $x0y$
5. Dacă $A = B = D = 0$ planul este $z = 0$.

Plane paralele

Teoremă

Două plane sunt paralele dacă normalele sunt coliniare.

Fie planele

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Planele sunt paralele dacă şi numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{6}$$

Planele coincid dacă şi numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{7}$$

Unghi diedru

Unghiul diedru a două plane este unghiul determinat de normale şi are cosinusul

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{8}$$

Planul determinat de 3 puncte necoliniare

Fie $M_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$ trei puncte necoliniare şi fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al planului. Atunci vectorii $\overrightarrow{M_1 M}$, $\overrightarrow{M_1 M_2}$, $\overrightarrow{M_1 M_3}$ sunt coplanari. Ecuaţia planului este

$$(\overrightarrow{M_1 M},\ \overrightarrow{M_1 M_2},\ \overrightarrow{M_1 M_3}) = 0. \tag{9}$$

Forma echivalentă este:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Planul prin tăieturi

Altă formă este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Planul prin tăieturi. Dacă planul taie axele de coordonate în punctele $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ atunci din ecuaţia planului prin 3 puncte deducem

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Distanţa de la un punct la un plan

Un plan este unic determinat dacă se cunoaşte distanţa de la origine la plan, notată p şi versorul normalei

$$\overrightarrow{n} = \cos\alpha \overrightarrow{i} + \cos\beta \overrightarrow{j} + \cos\gamma \overrightarrow{k}.$$

Ecuaţia normală a planului este

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{10}$$

Distanţa de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $P) : Ax + By + Cz + D = 0$ este

$$d(M_0, (P)) = \left|\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \tag{11}$$

Poziţia relativă a trei plane în spaţiu

Fie planele

$$P_i) : \quad A_i x + B_i y + C_i k + D_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Formăm sistemul

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 k + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 k + D_2 = 0 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 k + D_3 = 0 \end{cases}$$

Fie

$$r = rang \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ şi } p = rang \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

1. Dacă $r = p = 3$ planele au un singur punct comun.

Definiţie

*Numim **snop de plane** determinat de 3 plane, mulţimea tuturor planelor care trec prin punctul comun de intersecţie.*

Ecuaţia snopului este

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

2. Dacă $r = 2, p = 3$ două plane sunt paralele sau planele formează o prismă.

3. Dacă $r = p = 2$ planele se intersectează după o dreaptă.
4. Dacă $r = 1, p = 2$ planele sunt paralele
5. Dacă $r = p = 1$ planele sunt confundate.

Dreapta printr-un punct şi de vector director dat

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorul director
$\overrightarrow{v} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}, \quad l^2 + m^2 + n^2 \neq 0.$
Un punct $M(x, y, z)$ aparţine dreptei dacă are loc

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \overrightarrow{v}.$$

Ecuaţia vectorială a dreptei

$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = \lambda \overrightarrow{v} \tag{12}$$

unde $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_0}$ sunt vectorii directori ai punctelor M şi M_0.

Ecuaţiile parametrice

Ecuaţiile parametrice ale dreptei:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Cazuri particulare:

1. Dreaptă perpendiculară pe Oz

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{0}.$$

2. Dreaptă paralelă cu Oz

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Dreapta prin două puncte

Fie $M_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 2$ două puncte din spaţiu. Acestea determină în mod unic o dreaptă, al cărei vector director este $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$.
Ecuaţia vectorială este

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}).$$

Forma echivalentă este

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Dreapta ca intersecţie a două plane

Fie două plane

$$P) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ şi } Q) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

astfel ca $rang \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$

Atunci cele două plane determină în mod unic o dreaptă, de ecuaţii

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} . \tag{15}$$

Direcţia dreptei este

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}.$$

Fascicul de plane

Mulţimea tuturor planelor P) care trec printr-o dreaptă de forma (15) se numeşte **fascicul de plane.**

Ecuaţia fasciculului de plane este

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

Distanţa de la un punct la o dreaptaă

Fie A un punct în spaţiu şi D o dreaptă de vector director $\overrightarrow{v}$.
Fie $AA' \perp D$. Observăm că distanţa d este egală cu $\|\overrightarrow{AA'}\|$
Distanţa de la A la D este dată de formula

$$d = \frac{\|\overrightarrow{M_0A} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

unde M_0 este un punct arbitrar al dreptei.

Unghiul a două drepte

Fie două drepte

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Unghiul dintre drepte este unghiul vectorilor directori şi este determinat prin

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|}=\frac{l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

Consecinţe

1. Condiţia de perpendicularitate a două drepte este

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$$

condiţie echivalentă cu

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

2. Condiţia de paralelism a două drepte este

$$\overrightarrow{v_1} = \lambda \overrightarrow{v_2}$$

echivalentă cu

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Poziţiile relative a două drepte

Fie două drepte

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

1. Dreptele sunt coplanare dacă $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})=0$.
Dreptele coplanare pot fi: paralele sau concurente.

2. Planele sunt necoplanare (oarecare) dacă $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})\neq 0$.

Planul determinat de două drepte paralele

Fie două drepte paralele

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$\frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}.$$

Atunci ecuaţia planului este

$$(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v})=0.$$

Forma echivalentă este

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Planul determinat de două drepte concurente

Fie două drepte concurente

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Atunci ecuaţia planului este

$$(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})=0.$$

Forma echivalentă este

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Perpendiculara comună a două drepte

Fie două drepte

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Perpendiculara comună a celor două drepte este o dreaptă d care :
-intersectează ambele drepte
-este perpendiculară pe ambele drepte; deci vectorul director $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$ unde $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ sunt vectorii directori ai celor două drepte

Considerăm planele:
P_1) planul determinat de $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_1}$ şi
P_2) planul determinat de $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v_2}$.

Perpendiculara comună este $d = P_1 \cap P_2$.

Poziţia relativă a unei drepte faţă de un plan

Fie planul P de ecuaţie $Ax + By + Cz + D = 0$ şi dreapta d de ecuaţii $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$.

1. Dreapta d este paralelă cu planul P, dacă $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N} = 0$, sau echivalent

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

2. Dreapta d este inclusă în planul P, dacă au loc

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}.$$

3. Dreapta d şi planul P sunt secante; dacă sistemul format cu ecuaţiile lor au un punct comun.