Cuprins

Prefaţă

Folosirea metodelor probabilistice este un fenomen tot mai răspândit în inginerie, economie, ştiinţe medicale etc. Aceste metode sunt folosite, de exemplu în teoria transmiterii informaţiei, în teoria semnalelor, modelarea fenomenelor de zgomot, fiabilitatea sistemelor, teoria aşteptării, matematici financiare, pentru a enumera doar câteva dintre ramuri.
Datele experimentale analizate cu metode statistice fac aplicabilă teoria generală a probabilităţilor şi oferă posibilitatea de a aproxima comportarea aleatoare a diferitelor fenomene importante, mai ales dacă nu avem suficiente informaţii.
Cartea se adresează în primul rând studenţilor din învăţământul tehnic şi înţelegerea materialului presupune cunoaşterea unor capitole de matematică, după cum urmează : combinatorică, calcul matriceal, calcul diferenţial şi integral, transformata Fourier, ecuaţii diferenţiale ordinare.
Pentru înţelegerea conţinutului acestei cărţi, recomandăm cititorilor să parcurgă mai întâi primele 2 capitole, care sintetizează principalele aspecte ale teoriei probabilităţilor. Celelalte trei capitole sunt independente, dar se bazează pe materialul din capitolele enunţate.

Câmp finit de probabilitate
Este introdusă noţiunea de probabilitate în sens clasic, apoi axiomatic şi sunt enunţate principalele formule de calcul cu probabilităţi. Aici sunt prezentate schemele clasice de probabilitate şi un număr variat de exemple şi probleme care ilustrează multitudinea domeniilor în care apar fenomene aleatoare ale căror şanse de producere pot fi apreciate. Se insistă pe înţelegerea independenţei şi a condiţionării evenimentelor şi sunt prezentate primele aspecte ale analizei Bayesiane.

Variabile aleatoare
Materialul din acest capitol prezintă pentru început variabile discrete, punând accent deosebit pe variabila Bernoulli şi pe cazurile ei limită: legea numerelor mari şi legea normală. Alte variabile cu infinitate numărabilă de valori sunt prezentate şi exemplificate: variabila geometrică şi variabila Pascal.
Partea a doua cuprinde cazul continuu. Aici sunt prezentate variabilele continue, cu legături şi aplicaţii. Numeroase exemple indică rolul important jucat de vari-

abila normală. Caracterul de lege limită este ilustrat prin aplicaţii ale teoremei limită centrală. Printre cele mai importante aplicaţii menţionăm pe cele din teoria fiabilităţii.
Noţiunea de valoare medie a unei variabile joacă un rol important, deoarece din acestea decurg şi alte valori caracteristice, care completează informaţiile asupra teoriei.

Următoarele capitole pot fi citite independent unul de celălalt.

Variabile aleatoare multidimensionale
În acest capitol se prezintă principalele aspecte teoretice ale variabilelor bidimensionale, probleme de condiţionare şi, ca o consecinţă, apar operaţiile cu variabile continue. Cunoaşterea modului în care se transformă, prin diferite operaţii, densităţile de probabilitate este importantă, deoarece acestea sunt folosite în analiza calităţii, ştiut fiind că proprietatea de funcţionare a unui sistem este exprimată prin anumite operaţii cu componentele sale.

Procese stochastice
Procesele de numărare: binomiale sau Poisson reprezintă o componentă a oricărui studiu de inginerie electrică modernă sau a teoriei aşteptării. Sunt date numeroase exemple în aceste sens. Lanţurile Markov sunt de asemenea deosebit de importante în teoria transmiterii informaţiilor. Evoluţia în timp a unor sisteme care se pot afla în diferite stări, în mod aleator, duce la studiul matricelor stochastice ataşate.

Statistica matematica
Ultimul capitol este justificat de toate aspectele teoretice precedente. Date fiind determinări experimentale apar o serie de probleme interesante. Dacă este cunoscută legea teoretică, prin metode statistice, se pot determina parametrii ei necunoscuţi, se pot estima media, dispersia sau se pot găsi intervale cărora acestea le aparţin cu o anumită probabilitate. Dacă legea nu este cunoscută, prin aplicarea testelor de concordanţă, se poate motiva alegerea unei anumite legi.

Aducem mulţumiri domnilor profesori care au citit atent şi constructiv această carte: prof. dr. Nicoleta Negoescu si prof. dr. Eugen Popa, recomandând-o spre publicare. Mulţumim anticipat tuturor celor care vor face observaţii şi sugestii pe marginea acestui material.

Capitolul 1

Câmp finit de probabilitate

1.1 Formule de calcul într-un câmp de probabilitate

Fie $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ o mulţime finită ale cărei elemente le numim **cazuri posibile** (sau **evenimente elementare**) şi $\mathcal{P}(E)$ mulţimea submulţimilor ei ($\emptyset \subset E$).

Exemplul 1.1.1 1. *La aruncarea unui zar omogen pe o suprafaţă plană se obţin cazurile posibile*

$$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_6\}$$

unde prin evenimentul elementar $e_i, i = 1, \cdots, 6$ *înţelegem că ”la o aruncare se obţine faţa cu numărul* i*”.*

2. *La aruncarea a două zaruri simultan sunt 36 de cazuri posibile, iar mulţimea lor este*

$$E = \{(e_i, e_j), i, j = 1, \cdots, 6\}$$

3. *Dacă trebuie să transmitem 3 semnale diferite pe un canal, iar transmisia se poate face într-o ordine aleatoare, atunci avem* $6!$ *moduri, iar mulţimea* E *este mulţimea tuturor tripletelor ordonate (permutări), care se pot forma cu elementele mulţimii* $\{1, 2, 3\}$. 4. *Dacă trebuie să transmitem 3 semnale diferite pe 3 canale de transmisie în mod aleator, atunci avem* 3^3 *cazuri posibile.*

■

Dacă $A \subset E,\ A = \{e_1, \cdots, e_k\}$, numim elementele ei **cazuri favorabile**.

Exemplul 1.1.2 1. *La aruncarea unui zar un eveniment poate fi* A *”obţinerea unui număr par”, deci are 3 cazuri favorabile*

$$A = \{e_2, e_4, e_6\}$$

2. *La aruncarea a două zaruri evenimentul A "obţinerea unei duble" are 6 cazuri favorabile*

$$A = \{ \ (e_1, e_1), \ (e_2, e_2), \ (e_3, e_3), \ (e_4, e_4), \ (e_5, e_5), \ (e_6, e_6) \ \}$$

■

Operaţii cu evenimente

Evenimentele A şi B **coincid** sau sunt **egale** şi notăm $A = B$, dacă se realizează simultan. Aceasta revine la existenţa aceloraşi cazuri favorabile.
Dacă A este un eveniment, $\bar{A}$ se numeşte **eveniment contrar** şi este acel eveniment, care se realizează atunci când A nu se produce; în limbajul teoriei mulţimilor, acesta reprezintă complementara mulţimii A, deci $\bar{A} = E \setminus A = C_E A$.

Exemplul 1.1.3 *La aruncarea unui zar, dacă A a fost "obţinerea unui număr par", atunci $\overline{A}$ reprezintă "obţinerea unui număr impar".*

■

Dacă A şi B sunt două evenimente, spunem că A **implică** B şi notăm $A \subseteq B$, dacă realizarea lui A antrenează realizarea lui B, sau echivalent toate cazurile favorabile lui A sunt favorabile şi lui B.

Intersecţia evenimentelor
Date A şi B două evenimente, numim **intersecţia** lor, evenimentul notat $A \bigcap B$ care se realizează atunci când A şi B se produc simultan. Dacă $A \bigcap B = \emptyset$, evenimentele se numesc **incompatibile**.
Mai general, dacă avem o familie cel mult numărabilă de evenimente $(A_i)_{i \in I}, I \subseteq \mathbb{N}$, evenimentul

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

se realizează atunci când toate evenimentele A_i se produc.

Reuniunea evenimentelor
Dacă A, B sunt două evenimente, **reuniunea** lor este evenimentul notat $A \cup B$ care se realizează dacă cel puţin unul dintre evenimentele A sau B se produce. Dacă avem o mulţime cel mult numărabilă de evenimente $A_i, i \in I, I \subseteq \mathbb{N}$ reuniunea este evenimentul notat

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

se realizează dacă cel puţin unul dintre A_i se produce.

Au loc următoarele proprietăţi ale operaţiilor cu mulţimi:

1. comutativitatea

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

2. asociativitatea

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. distributivitatea

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Semnalăm relaţiile lui de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$$

care se generalizează

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

Exemplul 1.1.4 *Dacă A, B, C sunt 3 evenimente să exprimăm cu ajutorul lor următoarele evenimente.*

1. *Faptul că toate trei se realizează se exprimă prin $A \cap B \cap C$.*
2. *Cel puţin unul se realizează înseamnă $A \cup B \cup C$.*
3. *A sau B se realizează şi C nu are loc, se exprimă prin $(A \cup B) \cap \overline{C}$.*
4. *Exact unul se realizează înseamnă $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.*

■

Numim **probabilitate în sens clasic** funcţia $P : \mathcal{P}(E) \to [0, 1]$ definită prin

$$P(A) = \frac{\text{n}r.cazurilor\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile} = \frac{k}{n} \tag{1.1}$$

Se observă că această noţiune satisface următoarele proprietăţi:

$$P(A) \in [0,1],\ \ \forall A \in \mathcal{P}(E) \tag{1.2}$$

$$P(E) = 1 \tag{1.3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\ \ \forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = \emptyset \tag{1.4}$$

Să mai observăm că proprietatea (1.4) se extinde imediat la o familie finită de evenimente. Dacă $(A_i), i \in \{1, \cdots, n\},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ atunci

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Tripletul $(E, \mathcal{P}(E), P)$ se numeşte **câmp finit de probabilitate**. Deoarece calculul probabilităţilor revine într-un câmp finit la numărarea unor cazuri, dăm în continuare câteva reguli.

Reguli de numărare

Principiul multiplicării. Presupunem că două evenimente A şi B, se pot realiza în m respectiv k moduri, independent unul de celălalt. Numărul de moduri în care se poate realiza A şi B este $m \times k$.

Permutări. Numărul tuturor aplicaţiilor bijective (permutări) de la o mulţime de n elemente la ea însăşi este $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Aranjamente. Numărul submulţimilor ordonate cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente, $0 \leqslant k \leqslant n$, se numeşte aranjamente de n luate câte k şi este $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Combinări. Numărul submulţimilor cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente, $0 \leqslant k \leqslant n$, se numeşte combinări de n luate câte k şi este $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

Exemplul 1.1.5 1. *Câte parole cu câte 5 litere se pot forma pentru un computer, dacă literele nu se pot repeta ? Dar dacă se pot repeta ? (Folosim 26 de litere).*

2. *Câte coduri de trei cifre se pot forma cu cifrele* $0, 1, \dots 9$?

3. *În câte moduri 10 studenţi pot ocupa 10 bănci? Dar 12 bănci?*

1. Pentru primul caz se folosesc submulţimi ordonate A_{26}^5, deoarece putem interpreta ca prima literă poate fi aleasă în 26 de moduri, a doua în 25 de moduri etc, deci o parola este o submulţime ordonată cu 5 elemente. În al doilea caz din principiul multiplicării 26^5, deoarece fiecare poziţie poate sa fie ocupată de oricare dintre cele 26 de litere, independent de celelalte.

2. Din principiul multiplicării rezultă 10^3 de cazuri.

3. Evident că 10 studenţi pot ocupa 10 bănci în 10! moduri. Apoi 10 bănci pot fi alese în C_{12}^{10}, iar pentru 10 bănci fixate avem 10! moduri, după care folosim principiul multiplicării şi obţinem $C_{12}^{10} \times 10! = A_{12}^{10}$.

■

Exemplul 1.1.6 *Dintr-o urnă cu 3 bile albe şi 2 bile negre extragem 2 bile astfel:*

1. *simultan*
2. *câte una fără repunere*
3. *cu repunere*

Indicaţi toate cazurile posibile.

Numerotăm bilele a_1, a_2, a_3, n_1, n_2.
În cazul 1. se formează submulţimi de 2 elemente dintr-o mulţime cu 5 , deci C_5^2.

$$E_1 = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, n_1), (a_1, n_2), (a_2, a_3), (a_2, n_1)$$

$$(a_2, n_3), (a_3, n_1), (a_3, n_2), (n_1, n_2).\}$$

În al doilea caz intervine şi ordinea deci A_5^2 şi

$$E_2 = E_1 \cup \{(a_2, a_1), (a_3, a_1), (n_1, a_1), (n_2, a_1), (a_3, a_2)$$

$$(n_1, a_2), (n_3, a_2), (n_1, a_3), (n_2, a_3), (n_2, n_1), \}$$

3. După principiul multiplicării rezultă 5×5 moduri

$$E_3 = E_1 \cup E_2 \cup \{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (n_1, n_1), (n_2, n_2).\}$$

■

1.2 Formule de calcul într-un câmp de probabilitate

Fiind dată o mulţime finită E şi o aplicaţie $P : \mathcal{P}(E) \to [0,1]$ satisfăcând axiomele (1.3) şi (1.4) spunem că avem un **câmp finit de probabilitate**.
Evenimentul sigur, E, este acela care se realizează cu certitudine la orice probă, iar **evenimentul imposibil**, $\emptyset$, este acela care nu se poate realiza în nici o efectuare a experienţei. Are loc:

$$P(\emptyset) = 0$$

Probabilitatea **evenimentului contrar**. Evenimentul a cărui realizare constă în nerealizarea evenimentului A se numeşte ”non A”, se notează cu $\bar{A}$ şi are probabilitatea:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{1.5}$$

Următorul exemplu de aplicare a probabilităţii unei diferenţe este una din primele probleme de calcul al probabilităţilor cunoscută din istoria matematicii şi a fost rezolvată de Blaise Pascal în secolul 17.

Exemplul 1.2.1 *Să arătăm că probabilitatea de a obţine cel puţin un 6 când se aruncă un zar de patru ori este mai mare decât probabilitatea de a obţine cel puţin o dublă (6,6), dacă se aruncă 2 zaruri de 24 de ori.*

Notăm cu
A evenimentul ”de a obţine cel puţin un 6 când se aruncă un zar de patru ori”
B evenimentul ”de a obţine cel puţin un $(6,6)$ când se aruncă două zaruri de 24 ori”
Constatăm că A şi B reprezintă reuniuni de evenimente. Este mult mai comod să trecem la evenimentele contrare
$\overline{A}$ evenimentul ”de a nu obţine nici un 6 când se aruncă un zar de patru ori”
$\overline{B}$ evenimentul ”de a nu obţine nici un$(6,6)$ când se aruncă două zaruri de 24 ori”
Dacă aruncăm un zar avem 6 cazuri posibile la o aruncare, iar la 4 aruncări 6^4; pentru $\overline{A}$ avem 5^4 cazuri deci $P(\overline{A}) = (\frac{5}{6})^4$, iar folosind (1.5) $P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0,5177$. Deoarece la o aruncare a două zaruri există, conform principiului multiplicării, 6×6 cazuri, iar la 24 de aruncări 6×6^{24}.

$$P(\overline{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

■

Probabilitatea unei diferenţe

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \tag{1.6}$$

Consecinţă. Dacă $A \subseteq B$ rezultă $P(A) \leqslant P(B)$. Aceasta deoarece dacă $A \subseteq B$, avem $A = A \cap B$ şi $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geqslant 0$.

Probabilitatea unei reuniuni

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j = n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \tag{1.7}$$

Exemplul 1.2.2 *Rezistorii circuitului din figura* (1.1) $R_i, i = 1, 4$ *funcţionează independent şi au aceleaşi şanse de a se arde. Să calculăm probabiliatea ca prin circuit să circule curentul.*

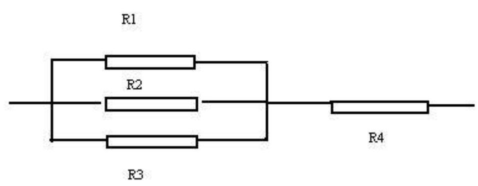


Figura 1.1:

Fie $R_i, i = 1, 4$, evenimentul că rezistorul R_i funcţionează şi A faptul că circulă curentul. Avem

$$A = (R_1 \cup R_2 \cup R_3) \cap R_4 = (R_1 \cap R_4) \cup (R_2 \cap R_4) \cup (R_3 \cap R_4)$$

$$P(A) = P(R_1 \cap R_4) + P(R_2 \cap R_4) + P(R_3 \cap R_4) -$$

Dacă aplicăm probabilitatea

$$-P(R_1 \cap R_2 \cap R_4) - P(R_1 \cap R_3 \cap R_4) - P(R_2 \cap R_3 \cap R_4) +$$
$$+P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4)$$

Cazurile posibile sunt 2^4 , deorece orice rezistor poate fi în două situaţii, independent de celelalte. Doi rezistori funcţionează în 2^2 cazuri favorabile,trei rezistori în 2 cazuri favorabile, iar toate patru într-un singur caz. Deci

$$P(A) = 3\frac{2^2}{2^4} - 3\frac{2}{2^4} + \frac{1}{2^4}$$

■

Inegalitatea lui Boole

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_i) - (n-1) \tag{1.8}$$

Exemplul 1.2.3 *Un dispozitiv corespunde cerinţelor dacă satisface proprietăţile a, b, c. Într-un lot de dispozitive există 95% de dispozitive ce satisfac a, 90% ce satisfac b si 92% ce satisfac c. Să determinăm o limită inferioară a probabilităţii ca alegând la întâmplare un dispozitiv, acesta să corespundă.*

Notăm cu A, B, C, faptul că dispozitivul satisface proprietăţile a, b, c. Atunci faptul că acesta corespunde, reprezintă evenimentul

$$A \cap B \cap C$$

Deoarece nu avem informaţii despre dispozitivele ce satisfac simultan două sau toate proprietăţile folosim inegalitatea lui Boole şi avem

$$P(A \cap B \cap C) \geqslant 1 - 3 + P(A) + P(B) + P(C) = 0,95 + 0,90 + 0,92 - 2 = 0,77.$$

■

Inegalitatea lui Boole este utilă deoarece dă o margine inferioară a probabilităţii unei intersecţii.

Condiţionare şi independenţă
Dacă $A \subset E$, satisface $P(A) \neq 0$, atunci probabilitatea de realizare a evenimentului B în ipoteza că evenimentul A s-a realizat, se numeşte **probabilitatea lui B, condiţionată de A** şi este definită prin:

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{1.9}$$

Evenimentele A şi B se numesc **independente** dacă are loc $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exemplul 1.2.4 *O urnă contine 6 bile albe şi patru bile negre. Extragem o bila şi constatăm că este albă. Mai extragem o bilă; cu ce probabilitate a doua este tot albă. Vom considera situaţiile:*

a. *prima bila este repusă*

b. *prima bila nu este repusă.*

Considerăm evenimentele A ”prima bilă este albă” şi B ” a doua bilă este albă”. Dacă suntem în situaţia a., atunci A condiţionează pe B şi prin urmare

$$P_A(B) = \frac{5}{9}$$

Dacă suntem în cazul b., faptul ca s-a produs A nu influenţează pe B. Atunci $P(B) = \dfrac{6}{10}$.
Punctul b. ne conduce la ideea de independenţă a două evenimente.

■

Exemplul 1.2.5 *Dacă* $A, B \in \mathcal{P}(E)$ *şi* $P(A) \cdot P(B) \neq 0$, *atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente*

1. A, B *sunt independente*
2. $P(A|B) = P(A)$
3. $P(B|A) = P(B)$.

Afirmaţiile rezultă imediat; noi vom exemplifica doar implicaţia $1 \Leftrightarrow 2$
Arătăm mai intâi $1 \Rightarrow 2$. Calculăm probabilitatea condiţionată, folosind independenţa şi avem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Pentru $2 \Rightarrow 1$, din

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

rezultă $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, deci independenţa evenimentelor.

■

Exemplul 1.2.6 *Următoarele afirmaţii sunt echivalente pentru două evenimente A, B oarecare*

1. A, B *sunt independente*
2. $A, \overline{B}$ *sunt independente*
3. $\overline{A}, B$ *sunt independente*
4. $\overline{A}, \overline{B}$ *sunt independente.*

Demonstrăm doar $2 \Leftrightarrow 4$. Dacă 2 este adevărată, atunci

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$$

Primul membru este probabilitatea unei diferenţe

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

dar folosind de Morgan şi probabilitatea unei diferenţe

$$P(A \setminus B) = P(A) - 1 + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

Din $P(A)P(\overline{B}) = P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})$ rezultă independenţa evenimentelor $\overline{A}, \overline{B}$.

$4 \Rightarrow 2$ rezultă asemănător.

■

$(A_i), i \in \{1, \cdots, n\} \in \mathcal{P}(E)$ se numesc **global independente** dacă pentru orice $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ are loc

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Exemplul lui Bernstein arată că există 3 evenimente independente două câte două, dar care nu sunt global independente.

Exemplul 1.2.7 *Un tetraedru regulat şi omogen are feţele colorate astfel: o faţă complet albă, o faţă complet roşie, o faţă complet neagră şi a patra faţă conţine toate cele trei culori. Aruncăm tetraedrul pe o suprafaţă plană şi fie evenimentele*

A_1 *"tetradedrul se aşează pe faţa ce conţine culoarea albă"*

A_2 *”tetradedrul se aşează pe faţa ce conţine culoarea roşie”*
A_3 *”tetradedrul se aşează pe faţa ce conţine culoarea neagră”. Avem atunci*

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

iar

$$P(A_1)P(A_2) = P(A_1)P(A_3) = P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

de unde deducem independenţa cate două; în timp ce

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

ceea ce arată că nu sunt global independente.

■

Probabilitatea unei intersecţii

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \tag{1.10}$$

Exemplul 1.2.8 *Un lot de 100 de diode conţine 5% rebuturi. Se face umătorul control de calitate: se aleg (fără repunere) 5 diode şi dacă cel puţin una este defectă, lotul se respinge. Să calculăm probabilitatea de a respinge lotul.*

Notăm cu A_i faptul că ”la extragerea i se obţine o diodă corespunzătoare”. Lotul este respins dacă se produce

$$\bigcup_{i=1}^{5} \overline{A}_i$$

Calculăm probabilitatea trecând la evenimentul contrar

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} \overline{A}_i\right) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) = 1-$$

$$-P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$= 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96}.$$

■

Evenimentele $A_i, i = 1, \cdots, n$ cu proprietăţile

1. $P(A_i) > 0, \;\; \forall i = 1, \cdots, n$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$
3. $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

formează un **sistem complet de evenimente**.

Exemplul 1.2.9 1. *Dacă $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ este finită, mulţimea evenimentelor elementare e_i formează un sistem complet de evenimente.*

2. *Dacă A este un eveniment, atunci A şi $\overline{A}$ formează un sistem complet de evenimente.*

■

Dacă $A_i, i = 1, \cdots, n$ este un sistem complet de evenimente au loc următoarele două formule.

Formula probabilităţii totale

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i) \tag{1.11}$$

Formula lui Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}, \;\; i = 1, \cdots, n \tag{1.12}$$

Exemplul 1.2.10 *Într-un canal de comunicaţii se transmite 0 sau 1 cu probabilităţile $\frac{1}{3}$ şi respectiv $\frac{2}{3}$. Recepţionerul face erori de decizie cu probabilitatea $p = 0,1$. Să determinăm probabilitatea de a recepţiona 1. Dacă semnalul recepţionat este 1, cu ce probabilitate a fost transmis 0?*

Considerăm evenimentele $A_i, i = 0, 1$ cu semnificaţia
A_0 ”s-a transmis 0”
A_1 ”s-a transmis 1”
Evident că $\{A_0, A_1\}$ formează un sistem complet de evenimente. Fie A faptul că ” s-a recepţionat 1”. Pentru prima întrebare folosim (1.11). Avem

$$P(A) = P(A_0) \cdot P(A|A_0) + P(A_1) \cdot P(A|A_1) = \frac{1}{3} \cdot 0,1 + \frac{2}{3} \cdot 0,9 = 0,633.$$

Dacă s-a recepţionat 1, atunci folosim formula (1.12)

$$P(A_0|A) = \frac{P(A_0)P(A|A_0)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,1}{0,633} = 0,0526.$$

■

1.3 Scheme clasice de probabilitate

Schema lui Poisson Urnele $U_i, i = 1, \cdots n$ conţin bile albe şi negre în proporţii cunoscute; fie p_i, respectiv q_i probabilităţile de a extrage o bilă albă respectiv neagră din urna U_i; extragem câte o bilă din fiecare urnă; probabilitatea de a obţine k bile albe este coeficientul lui x^k din polinomul

$$\prod_{i=1}^{n}(p_i x + q_i) \tag{1.13}$$

Exemplul 1.3.1 *Trei semnale sunt receptionate corect cu probabilităţile* $0,8$*;* $0,7$ *şi* $0,9$*. Să determinăm cu ce probabilitate două semnale sunt recepţionate corect.*

Ne aflăm în cazul schemei Poisson, iar probabilităţile de a ”extrage bile albe” sunt cele din enunţ. Atunci probabilitatea căutată este coeficientul lui x^2 din polinomul

$$(0,8\,x + 0,2)(0,7\,x + 0,3)(0,9\,x + 0,1)$$

Rezultă $p = 0,398$.

■

Schema lui Bernoulli (a bilei revenite) Dintr-o urnă cu a bile albe şi b bile negre, extragem cu repunere n bile; probabilitatea ca să avem k bile albe, $0 \leqslant k \leqslant n$ este

$$p_{n;k} = C_n^k p^k q^{n-k},\;\; p = \frac{a}{a+b}, q = \frac{b}{a+b} \tag{1.14}$$

Exemplul 1.3.2 *Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea ca de 4 ori să apară suma 7?*

La o efectuare a experienţei evenimentul "apariţia sumei 7" are probabilitatea 1/6 (6 cazuri favorabile din 36 posibile). Deci

$$p = \frac{1}{6},\ q = \frac{5}{6},\ n = 10,\ k = 4$$

iar probabilitatea cerută este $C_{10}^4 (\frac{1}{6})^4 (\frac{5}{6})^6$.

■

Generalizare Intr-o urnă cu bile de $s \in \mathbb{N}$ culori, extragem cu repunere n bile; probabilitatea de a extrage k_i bile de culoare $i, i = 1, \cdots, s$ este

$$p_{n;k_1,\cdots,k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_s!} p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s},\ \ k_1 + \cdots + k_s = n,\ \ p_1 + \cdots + p_s = 1 \quad (1.15)$$

unde p_i este probabilitatea de a extrage o bilă de culoare i

Exemplul 1.3.3 *Se aruncă un zar de 10 ori. Care este probabilitatea ca exact de 2 ori să apară faţa cu un punct şi exact de 3 ori să apară faţa cu două puncte?*

Avem:

$$n = 5,\ n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 5,\ p_1 = \frac{1}{6},\ p_2 = \frac{1}{6},\ p_3 = \frac{2}{3},$$

iar probabilitatea cerută este:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} (\frac{1}{6})^2 (\frac{1}{6})^3 (\frac{2}{3})^5.$$

■

Schema geometrică (a bilei neîntoarse) Dintr-o urnă cu a bile albe şi b bile negre, extragem fără repunere n bile $n \leqslant a + b$; probabilitatea ca să avem k bile albe $k \leqslant a$ este

$$p_{a,b}^{k,n-k} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \quad (1.16)$$

Generalizare Intr-o urnă sunt a_i bile de culoarea $i,\ i = 1 \cdots s, s \in N$; extragem n fără repunere; probabilitatea de e extrage $k_i,\ k_1 + \cdots + k_s = n$ bile de culoarea i este

$$p_{a_1,\cdots,a_s}^{k_1,\cdots k_s} = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdots C_{a_s}^{k_s}}{C_n^{k_1+\cdots+k_s}} \quad (1.17)$$

Exemplul 1.3.4 *Într-un lot de 100 de articole se află 80 corespunzătoare, 15 cu defecţiuni remediabile şi 5 rebuturi. Alegem 6 articole. Cu ce probabilitate 3 sunt bune, 2 cu defecţiuni remediabile şi 1este rebut ?*

Vom presupune pentru început că extragerile se fac cu repunere. Atunci ne aflăm în cazul schemei Bernoulli generalizată şi aplicăm (1.15).

$$p_{6;3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{80}{100}\right)^3\left(\frac{15}{100}\right)^2\left(\frac{5}{100}\right)^1$$

Dacă extragerile se fac fără repunere atunci folosim (1.17) şi obţinem

$$p^{3,2,1}_{80,15,5} = \frac{C^3_{80}C^2_{15}C^1_5}{C^6_{100}}.$$

$\blacksquare$

1.4 Câmp infinit de evenimente.

Fie E o mulţime oarecare şi $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(E), \mathcal{K} \neq \emptyset$. $\mathcal{K}$ se numeşte **σ-algebră** dacă satisface

1. $\forall A \in \mathcal{K} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{K}$
2. $\forall A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{K}$$

Punem în evidenţă proprietăţi imediate

1. $E, \emptyset \in \mathcal{K}$

Într-adevăr, deoarece $\mathcal{K} \neq \emptyset$ există $A \in \mathcal{K}$, iar din prima axiomă $\overline{A} \in \mathcal{K}$; din a doua axiomă $A \cup \overline{A} = E \in \mathcal{K}$. Folosind prima axiomă, $\emptyset = \overline{E} \in \mathcal{K}$.

2. $\forall A_n \in \mathcal{K}$ $n \in N$ avem

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{K}$$

Într-adevăr, din $A_n \in \mathcal{K}$ rezultă $\overline{A_n} \in \mathcal{K}$, iar din a doua axiomă

$$\overline{\bigcap_{n\in N} A_n} = \bigcup_{n\in N} \overline{A_n} \in \mathcal{K}$$

deci şi complementara este din $\mathcal{K}$.

3. $\forall A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{K}$.

Aceasta rezultă din relaţia $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ şi axiomele structurii. În acest cadru Kolmogorov a introdus axiomatic, noţiunea de probabilitate.

Fie E o mulţime şi $\mathcal{K}$ o σ-algebră. Funcţia

$$P : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$$

cu proprietăţile

1. $P(E) = 1$
2. $\forall A_n \in \mathcal{K}\ ,\ \ n \in \mathbb{N},\ A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m$

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in N} P(A_n)$$

se numeşte **probabilitate**.
Tripletul $(E, \mathcal{K}, P)$ se numeşte **câmp infinit de probabilitate**.

Exemplul 1.4.1 *σ -algebra Boreliană. Fie $E = (0, 1)$ şi considerăm mulţimea*

$$\mathcal{D} = \{\bigcup_{i\in I}(a_i, b_i), I \subseteq N, (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, i \neq j\}$$

Elementele lui $\mathcal{D}$ se numesc mulţimi deschise.

Se poate demonstra că există o cea mai mică σ -algebră, care conţine pe $\mathcal{D}$ (aceasta se construieşte luând intersecţia tuturor σ-algebrelor care conţin pe $\mathcal{D}$). σ-algebra astfel obţinută se numeşte σ- algebra Boreliană şi o notăm $\mathcal{K}$.
Definim ”măsura” (lungimea) unui element din $\mathcal{D}$ prin $P_0 : \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$ definită

$$P_0(a, b) = b - a$$

$$P_0(\bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)) = \sum_{i\in I}(b_i - a_i)$$

Seria din membrul al doilea este convergentă. Funcţia P_0 se poate extinde pe $\mathcal{K}$ cu îndeplinirea celor două proprietăţi ale noţiunii de probabilitate. Această prelungire o numim **măsură Lebesgue**. Construcţii asemănătoare se pot face în R^2 sau R^3.
■

Se pot acum rezolva probleme în care factorul aleator depinde de mărimea unui domeniu care se află pe dreaptă, în plan sau spaţiu. Se obţin astfel probabilităţi geometrice.

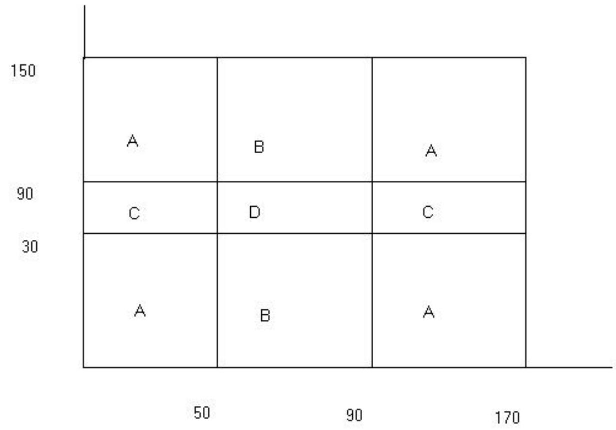


Figura 1.2:

Probabilităţi geometrice
Presupunem că un ”punct aleator ” se află într-un **domeniu posibil** $E \subset R^n$, iar probabilitatea ca acesta să se afle într-un anumit domeniu, depinde de mărimea μ (măsura) acestui domeniu; mărimea este o lungime ($n = 1$), o arie ($n = 2$), sau un volum ($n = 3$). Probabilitatea ca ”punctul aleator” să se afle într-un **domeniu favorabil** $D \subset E$ este

$$P(D) = \frac{\mu(D)}{\mu(E)} \tag{1.18}$$

Exemplul 1.4.2 *Pe cadranul unui osciloscop, care este un pătrat cu latura $a > 0$ apare aleator un semnal luminos. Cu ce probabilitate acesta apare la o distanţă $d < \frac{a}{2}$?*

Domeniul posibil este interiorul pătratului cu aria a^2. Domeniul favorabil este interiorul cercului cu centrul 0 şi raza $\frac{a}{2}$, al cărui centru coincide cu centrul pătratului. Deci

$$P = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

■

Exemplul 1.4.3 *O bandă magnetică are lungimea de 200 m şi conţine două mesaje înregistrate pe două piste; pe prima pistă se află un mesaj de 30 m, iar pe a doua de 50 m, a căror poziţie nu se cunoaşte precis. Din cauza unei defecţiuni trebuie îndepărtaţi 10 m de bandă, după primii 80 m. Găsiţi probabilităţile evenimentelor:*

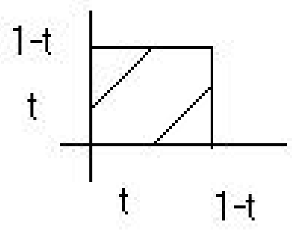


Figura 1.3:

A "nici o înregistrare nu este afectată"
B "prima înregistrare este afectată şi a doua nu"
C "a doua înregistrare este afectată şi prima nu"
D "ambele sunt afectate".

Fie x, y coordonata la care poate începe prima respectiv a doua înregistrare; $x \in [0, 170],\ y \in [0, 150]$. Pentru ca prima să nu fie afectată, trebuie ca $x \in [0, 50] \cup [90, 170]$, iar a doua $y \in [0, 30] \cup [90, 150]$. Probabilităţile sunt date făcînd raportul ariilor din figură şi aria domeniului total posibil (vezi figura (1.2)).

■

Exemplul 1.4.4 *Două semnale de lungime $\tau < \frac{1}{2}$ sunt transmise în intervalul de timp $(0, 1)$; fiecare poate să înceapă în orice moment al intervalului $(0, 1 - \tau)$. Dacă semnalele se suprapun, chiar şi parţial se distorsionează şi nu pot fi receptate. Găsiţi probabilitatea ca semnalele să fie recepţionate fără distorsionări. (vezi figura (1.3)).*

Domeniul posibil este un pătrat de latură $1 - \tau$, iar domeniul favorabil este $A = \{(x, y) | |x - y| > \tau\}$. deci probabilitatea este $\dfrac{(1 - 2\tau)^2}{(1 - \tau)^2}$.

■

1.5 Probleme propuse

1. Câte numere de telefon cu 7 cifre sunt posibile, dacă primele două cifre nu pot fi 0 sau 1 ?

2. a. În câte moduri putem monta 5 becuri de culori diferite în serie ?

   b. Din 5 rezistenţe numerotate, alegem la întâmplare 2; în câte moduri e posibil ?

3. În câte moduri 3 semnale diferite se pot transmite aleator pe un canal de transmisie ? Dar pe 3 canale diferite ?

4. 3 rezistori sunt montaţi într-un circuit şi considerăm A_i evenimentul că rezistorul i funcţionează. Exprimaţi faptul ca funcţionează:

   1. numai primul
   2. numai unul
   3. cel puţin unul
   4. cel mult unul
   5. toate
   6. nici unul

5. Câte cazuri posibile se obţin la aruncarea simultană a două zaruri ? Dar a 3 monede ?

6. 12 semnale de intensităţi diferite se transmit aleator pe 12 canale. Cu ce probabilitate pe fiecare canal s-a transmis câte un semnal ?

7. 12 semnale de intensităţi diferite se transmit aleator pe 8 canale. Cu ce probabilitate pe primul canal s-au transmis 3 semnale oarecare ?

8. Un calculator este format din n componente ce se pot defecta independent cu probabilitaţile $1 - p_i$ cu $i = 1, \dots n$ într-un anumit interval de timp. Cu ce probabilitate calculatorul nu mai funcţionează, ştiind că defectarea unei componente atrage acest lucru ?

9. O urnă conţine n bile numerotate cu $1, 2, \dots n$. Se extrage o bilă. Considerăm evenimentele:

   A : ”bila extrasă are număr pătrat perfect” şi

   B : ”bila extrasă are număr care mărit cu 1 este multiplu de 3”.

   Cele două evenimente sunt compatibile? Calculaţi $P(A \cup B)$.

10. O urnă conţine n bile numerotate cu $1, 2, \dots n$. Notăm $M\{a\}$ evenimentul ca la o extragere să obţinem o bilă numerotată cu un multiplu de a. Să se calculeze probabilitatea acestui eveniment. Dacă n este multiplu de a, să se calculeze probabilitatea obţinerii unui număr care nu se divide la a.

11. (**Problema concordanţelor**) Un student are de răspuns la n întrebări, cărora trebuie să le asocieze răspunsul corect dintre n răspunsuri indicate. Presupunând că studentul asociază la întâmplare răspunsurile, stabiliţi probabilitatea ca acesta să răspundă corect la:

    a) prima întrebare;

    b) primele două întrebări;

    c) cel puţin o întrebare.

12. Un circuit electric are patru relee a căror funcţionare este egal probabilă (funcţionează şi se pot defecta independent unul de celălalt), montate după ca în figura (1.4)). Calculaţi probabilitătea ca între punctele A şi B să nu circule curentul.

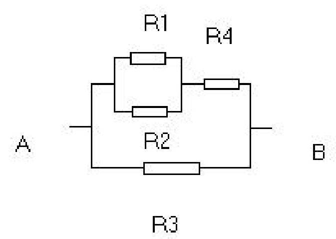


Figura 1.4:

13. Rezistorii R_i sunt legaţi ca în schema din figura (1.5) şi se pot arde independent unul de altul cu aceeaşi probabilitate $p \in (0, 1)$. Cu ce probabilitate prin circuit circulă curentul ?

14. În două urne se găsesc bile diferit colorate, astfel:

    U_1 : 5 albe, 11 negre, 8 roşii

    U_2 : 10 albe, 8 negre, 6 roşii.

    Din fiecare urnă se extrage la întâmplare câte o bilă. Care este probabilitatea ca ambele bile să fie de aceeaşi culoare?

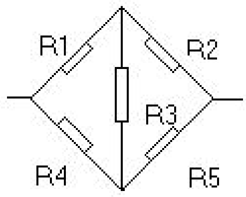


Figura 1.5:

15. O urnă conţine 3 bile albe şi 4 bile negre. Din această urnă se extrage o bilă. În locul ei se introduce o bilă de cealaltă culoare şi se face o nouă extragere.

    a) Care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie neagră, ştiind că prima a fost albă?

    b) Care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie neagră?

    c) Care este probabilitatea să obţinem bile de culori diferite?

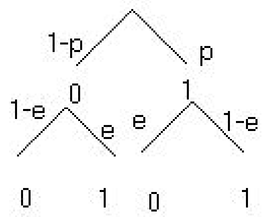


Figura 1.6:

16. Într-un canal de comunicaţie se introduc 0 sau 1 cu probabilitatea $1 - p$ respectiv p.

    Recepţionerul face erori de decizie cu probabilitatea ε. Fie evenimentele A_i ”intrarea a fost i” şi B_j ”ieşirea a fost j”. Calculaţi $P(A_i \cap B_j)$ $i = 0, 1, j = 0, 1$. Determinaţi probabilitatea de a recepţiona 1 (figura (1.6)) .

17. 10 aparate de acelaşi tip sunt supuse unei probe de verificare; se ştie

    3 provin de la fabrica A şi trec probele în 90 % din cazuri

    2 provin de la fabrica B şi trec probele în 75 % din cazuri

5 provin de la fabrica C şi trec probele în 85 % din cazuri

Se alege la întâmplare un aparat. Cu ce probabilitate trece probele ? Aparatul ales trece probele. Cu ce probabilitate provine de la A sau B?

18. Într-un lot de 100 de becuri 5 sunt rebuturi; la controlul de calitate alegem la întâmplare un bec, pe care din greşeală îl spargem. Alegem încă unul. Cu ce probabilitate becul este bun ?

19. Se dau şase urne cu următoarele structuri:

    1. U_1 şi U_2 conţin câte 4 bile albe şi 2 negre,

    2. U_3, U_4 şi U_5 conţin câte 3 bile albe şi 5 negre,

    3. U_6 conţine 6 bile albe şi 4 negre.

    Se extrage la întâmplare o bilă dintr-o urnă. Cu ce probabilitate bila extrasă este neagră. Ştiind că s-a extras o bilă albă, cu ce probabilitate aceasta provine dintr-o urnă cu structura 2?

20. Un lot de 50 de cipuri (circuite integrate) conţine 3 defecte. Alegem la întâmplare 10, simultan şi le verificăm. Cu ce probabilitate 2 sunt defecte ?

21. a. Un semnal este transmis pe trei canale diferite, iar probabilităţile de recepţionare corectă sunt 0,9; 0,8 şi 0,7. Cu ce probabilitate unul dintre ele se recepţionează corect ?

    b. Dar dacă semnalul este trimis pe un canal ales la întâmplare şi presupunem că orice canal poate fi ales cu aceeaşi probabilitate ?

22. O urnă conţine 2 bile albe şi 3 bile negre. Alegem la întâmplare 2 bile, fără repunere. Cu ce probabilitate sunt negre? Dar dacă repunem bila ?

23. Se testează cinci dispozitive ce funcţionează în condiţii identice, independent şi cu randamentul 0,9. Se cere probabilitatea ca exact două să funcţioneze.

24. Se consideră trei urne : U_1 cu 5 bile albe şi 5 negre, U_2 cu 4 albe şi 6 negre, iar U_3 cu 4 bile albe şi 5 negre. Din fiecare urnă se extrag cu repunere câte 5 bile. Care este probabilitatea ca din două urne să obţinem câte 2 bile albe şi 3 negre iar din cea de-a treia urnă să obţinem o altă combinaţie?

25. Se consideră urnele din problema precedentă. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Dacă se repetă experienţa de 5 ori, care este probabilitatea ca de trei ori să obţinem o bilă albă şi 2 bile negre?

26. O persoană cumpără două cutii de chibrituri cu câte n beţe fiecare. Apoi, de fiecare dată când are nevoie, scoate la întâmplare una sau alta dintre cutii.

    a) Care este probabilitatea ca în momentul în care constată că una din cutii este goală, cealaltă cutie să mai conţină k beţe? (Problema lui Banach)

    b) Utilizând rezultatul obţinut să se arate că:

$$C_{2n}^{n} + 2C_{2n-1}^{n} + 2^2 C_{2n-2}^{n} + \ldots + 2^n C_n^n = 2^{2n}.$$

27. Într-un lot de 100 de articole există 90 bune, 6 cu defecţiuni remediabile şi 4 rebuturi. Alegem 3 cu repunere. Cu ce probabilitate se obţine cel mult un articol bun şi cel mult unul remediabil ? Dar dacă extragerile se fac fără repunere ?

28. Trei mesaje sunt transmise pe un canal de comunicaţe.În funcţie de exactitatea transmisiunii avem evenimentele:

    A_1 mesajul este transmis într-o formă corectă

    A_2 mesajul este parţial eronat

    A_3 mesajul este complet eronat.

    Probabilităţile evenimentelor A_1, A_2, A_3 sunt p_1, p_2 şi p_3, $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Considerând că transmiterea corectă sau eronată a unui mesaj nu este influenţată de modul de transmitere a celorlalte (independenţa evenimentelor), să se găsească probabilităţle următoarelor evenimente:

    A ”toate mesajele sunt transmise corect ”

    B ”cel puţin un mesaj să fie complet eronat”

    C ” cel puţin două mesaje sunt parţial sau complet eronate ”.

29. Un mesaj important este transmis simultan pe n canale de comunicaţie şi repetat pe fiecare canal de k ori pentru a uşura recepţionarea sa corectă. Probabilitatea ca în timpul transmisiei unui mesaj acesta să fie eronat este p şi nu depinde de transmiterea altor mesaje. Fiecare canal de comunicaţie poate fi ”blocat” cu zgomote cu probabilitatea q; un canal ”blocat” nu poate transmite nici-un fel de mesaje. Să se calculeze probabilitatea evenimentului A ” mesajul este transmis sub formă corectă măcar o dată”

30. Un mesaj este format din n cifre 0 şi 1 . Fiecare simbol poate fi transmis eronat cu probabilitatea p (este schimbat în contrarul său cu probabilitatea q). Pentru siguranţă, mesajul este transmis de două ori; informaţia este considerată corectă dacă ambele mesaje coincid. Să se calculeze probabilitatea ca mesajul să nu fie corect, în ciuda faptului că cele două mesaje transmise sunt identice.

31. Fie opt canale de transmitere a informaţiei care funcţionează independent. Presupunem că un canal este activ cu probabilitatea 1/3. Să se calculeze probabilitatea ca la un moment dat să fie mai mult de şase canale active.

32. Un asamblor de calculatoare foloseşte circuite din trei surse: $A_1,\ i = 1, 2.3.$ Ele pot fi defecte cu probabilităţile de respectiv 0,001, 0,005 şi 0,01. Dacă se ia un circuit la întîmplare şi se constată că este defect, care este probabilitatea ca el să provină de la sursa A_1 sau A_2.

33. Un sistem de comunicaţii transmite informaţie binară, care introduce erori aleatoare cu $p = 10^{-3}$. Emiţătorul transmite fiecare bit de 3 ori, iar decodorul decide asupra bitului transmis în funcţie de numărul majoritar al biţilor recepţionaţi. Recepţionerul ia o decizie greşită, dacă se introduc 2 sau mai multe erori. Cu ce probabilitate se ia o decizie greşită ?

34. 6 mesaje sunt trimise printr-un canal de comunicaţie; fiecare poate fi distorsionat independent de celelalte cu probabilitatea 0,2. Găsiţi probabilitatea evenimentelor D ”exact 2 mesaje sunt perturbate”, C ”cel mult 2 mesaje sunt perturbate”.

35. Un sistem este format din n unităţi; fiecare se poate afla în una din următoarele stări:

    s_1 unitatea funcţionează

    s_2 unitatea trebuie reglată

    s_3 unitatea trebuie reparată

    s_4 unitatea nu poate funcţiona,

    cu probabilităţile p_i şi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Stările s_i sunt independente. Găsiţi probabilitatea evenimentelor:

    A ”toate unităţile sunt în stare de funcţiune”

    B ”toate unităţile trebuie reparate”

    C ”o unitate aleasă la întâmplare trebuie reparată şi celelalte reglate”

    D ”cel puţin o unitate nu funcţionează”

    E ” 2 unităţi trebuie reglate, una reparată şi celelalte funcţionează”.

36. Un sistem constă din 5 unităţi; fiecare se poate defecta cu probabilitatea $p = 0,4$, independent de celelalte. Dacă una sau două unităţi s-au defectat, sistemul funcţionează cu eficienţă redusă; dacă cel puţin trei unităţi s-au defectat, sistemul nu poate funcţiona. Calculaţi probabilitatea evenimentelor:

A ” nici o unitate nu se defectează”

B ” sistemul nu funcţionează”

C ” sistemul funcţionează cu eficienţă redusă”

D ” exact o unitate se defectează”

E ” exact două unităţi se defectează”.

1.6 Soluţii

1. Primele două cifre pot fi ocupate în 8^2 moduri, iar restul în 10^5. Deci $8^2 10^5$.
2. a. $5!$, b. C_5^2.
3. Evident $3!$ pe un acelaşi canal; dacă canalele sunt diferite, fiecare semnal poate fi transmis în 3 moduri, deci după principiul multiplicării 3^3. (Dacă contează şi ordinea lor mai înmulţim cu $3!$.
4. 1. $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

   2. $B = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$

   3. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

   4. nici unul sau exact unul $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup B$

   5. $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

   6. $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.
5. $6 \times 6, \;\; 2 \times 2 \times 2$.
6. Există 12^{12} cazuri posibile, deoarece pentru fiecare semnal avem 12 posibilităţi, după care folosim principiul multiplicării. Cazurile favorabile sunt date de permutări, deci $p = \dfrac{12!}{12^{12}}$.
7. Fiecare semnal are 8 posibilităţi de a fi transmis, deci cazurile posibile sunt 8^{12}; 3 semnale sunt alese la în tîmplare în C_{12}^3 moduri, iar restul semnalelor sunt transmise în 7^9 moduri, deci probabilitatea este $\dfrac{C_{12}^3 7^9}{8^{12}}$.
8. Calculăm probabilitatea evenimentului contrar, adică în acel interval de timp toate componentele să funcţioneze, deci $\prod_{i=1}^{n} p_i$. Probabilitatea căutată va fi $1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$.

9. A şi B sunt incompatibile. $P(A) = [\sqrt{n}]/n$ iar $P(B) = [(n+1)/3]/n$, (am notat [x] partea întreagă a numărului x).

10. Fie k numărul multiplilor de a, care se găsesc printre numerele $1, 2, \ldots n$. Aceşti multipli sunt a, $2a$, $3a, \ldots$ ka. Rezultă că $n = ka + r,\ 0 < r < a$. Atunci numărul cazurilor favorabile primului eveniment este k şi avem $k = [n/a]$. Probabilitatea cerută este $[n/a]/n$. Dacă n este multiplu de a atunci $n = ka$ iar probabilitatea obţinerii unui multiplu de a este $k/ka = 1/a$.

11. a) numătul cazurilor posibile: $n!$, numărul cazurilor favorabile $(n-1)!$, probabilitatea căutată: 1/n;

    b) $1/(n-2)!$; c) dacă notăm cu A_i evenimentul că studentul răspunde corect la întrebarea i, evenimentul căutat este $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Aplicăm probabilitatea unei reuniuni şi găsim: $1 - 1/2! + 1/3! - \ldots + (-1)^{n-1}1/n!$.

12. Notăm cu A_i evenimentul "releul R_i funcţionează.". Curentul circulă dacă $((A_1 \cup A_2) \cap A_4) \cup A_3 = (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup A_3$. Cum orice releu poate fi în două poziţii, închis sau deschis, rezultă că numărul cazurilor posibile este $2^4 = 16$. Probabilitatea să funcţioneze este $P(A_1 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_4) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_4 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ Un releu funcţionează în 2^3 cazurile favorabile (deoarece au rămas 3 relee ce pot fi în 2^3 cazuri), două în 2^2 cazuri, trei relee în 2^1 cazuri, iar toate într-un caz. Probabilitatea căutată este $1 - (2 \cdot 4/16 + 8/16 - 3 \cdot 2/16 + 1/16) = 0,3125$.

13. $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3 \cap A_5) \cup (A_4 \cap A_3 \cap A_2) \cup (A_4 \cap A_5)$.

14. Considerăm evenimentele A_1 : "ambele bile extrase sunt albe", A_2 : "ambele bile extrase sunt negre" şi A_3 : "ambele bile extrase sunt roşii". Se cere probabilitatea evenimentului $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. $P(A) = 5/24 \cdot 10/24 + 11/24 \cdot 8/24 + 8/24 \cdot 6/24 = 0,32$.

15. Fie A ="prima bilă este albă şi B ="a doua bilă este albă. $P(A) = 3/7$

    a) $P(\overline{B}|A) = 5/7$ (prima bilă a fost albă, deci s-a adăugat una neagră);

    b) $F = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ şi $P(F) = 3/7 \cdot 5/7 + 4/7 \cdot 3/7 = 0,55$;

    c) $G = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ şi $P(G) = 3/7 \cdot 5/7 + 4/7 \cdot 4/7 = 0,63$.

16. $P(A_0 \cap B_0) = (1-p)(1-\varepsilon);\ P(A_0 \cap B_1) = (1-p)\varepsilon;\ P(A_1 \cap B_0) = p\varepsilon;\ P(A_1 \cap B_1) = p(1-\varepsilon)$.

    Din formula probabilităţii totale avem

$$P(B_1) = P(A_0)P(B_1|A_0) + P(A_1)P(B_1|A_1).$$

17. Din formula probabilităţii totale, aparatul ales trece probele cu probabilitatea: $P(M) = \dfrac{3}{10} \cdot 0,9 + \dfrac{2}{10} \cdot 0,75 + \dfrac{5}{10} \cdot 0,85 = 0,845$. Apoi, evenimentul contrar este că nu provine de la C, iar acesta, după formula lui Bayes, are probabilitatea: $\dfrac{\frac{5}{10} \cdot 0,85}{P(M)} = 0,503$.

18. Considerăm evenimentele A_1 "primul bec a fost bun", A_2 "al doilea bec a fost bun". A_1 şi $\overline{A_1}$ formează un sistem complet de evenimente. Din formula probabilităţii totale rezultă: $P(A_2) = 0,95 \cdot \frac{94}{99} + 0,05 \cdot \frac{95}{99} = 0,94$.

19. Notăm $A_i,\ i = 1, 2, \dots 6$ evenimentul " bila extrasă provine din urna U_i, şi cu X evenimentul " bila extrasă este neagră". Din formula probabilităţii totale rezultă: $P(X) = \frac{1}{6}(2\frac{1}{3} + 3\frac{5}{8} + \frac{2}{5}) = 0,49$. Apoi, din formula lui Bayes, avem:

$$P(A_3 \cup A_4 \cup A_5|\overline{X}) = 3 \cdot \frac{P(A_3) \cdot P(\overline{X}|A_3)}{P(\overline{X})} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8}}{1 - 0,49} = 0,36$$

20. Schema geometrică $\dfrac{C_{47}^8 C_3^2}{C_{50}^3}$

21. a. Schema lui Poisson cu probabilităţile $p_1 = 0,9, q_1 = 0,1,\ p_2 = 0,8, q_2 = 0,2,\ p_3 = 0,7,\ q_3 = 0,3$. Probabilitate căutată este coeficientul lui x din polinomul $P(x) = (0,9x + 0,1)(0,8x + 0,2)(0,7x + 0,3)$, adică $0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,092$.

    b. Formula probabilităţii totale $1/3 \times 0,9 + 1/3 \times 0,8 + 1/3 \times 0,7 = 0,8$.

22. Fără repunere este schema geometrică $\dfrac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2}$, iar cu repunere schema lui Bernoulli $C_5^2(3/5)^2(2/5)^0$.

23. Schema lui Bernoulli $C_5^2(0,9)^2(0,1)^3$.

24. Fie A evenimentul cerut. După schema lui Poisson $P(A)$ este coeficientul lui X^2 din polinomul $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)$, unde p_i este probabilitatea evenimentului $A_i =$"din urna U_i se obţin 2 bile albe şi 3 negre", $q_i = 1 - p_i,\ i = 1, 2, 3$. După schema lui Bernoulli avem

$$p_1 = C_5^2(5/10)^2(5/10)^3,\ p_2 = C_5^2(4/10)^2(6/10)^3,\ p_3 = C_5^2(4/9)^2(5/9)^3.$$

25. Fie A evenimentul evenimentul "la o extragere obţinem 1 bilă albă şi 2 bile negre. Conform schemei lui Poisson $P(A)$ este coeficientul lui X^1

din polinomul $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3)$, unde $p_1 = 5/10$, $p_2 = 4/10$, $p_3 = 4/9$ iar $q_i = 1 - p_i$ $i = 1, 2, 3$. Probabilitatea cerută este $C_5^3(P(A))^3(1 - P(A))^2$.

26. a) Să numim cele două cutii (i) şi (ii). Pentru a ajunge în situaţia dată persoana a scos de $2n - k + 1$ ori o cutie din buzunar (de n ori o cutie pentru a o goli, de $n - k$ ori cealaltă cutie –pentru a-i rămâne k beţe– şi din nou prima cutie, pentru a constata că este goală). Deci are loc evenimentul A ”în $2n - k$ cazuri apare de n ori cutia (i) şi de $n - k$ ori cutia (ii), iar în al $2n - k + 1$-lea caz apare cutia (i)” *sau* evenimentul B ”în $2n - k$ cazuri apare de n ori cutia (ii) şi de $n - k$ ori cutia (i), iar în al $2n - k + 1$-lea caz apare cutia (ii)”. Cele două evenimente au evident probabilităţi egale. Să considerăm evenimentul A. Probabilitatea ca ”în $2n - k$ extrageri să apară de n ori cutia (i) şi de $n - k$ ori cutia (ii)” este (schema binomială)

$$C_{2n-k}^n(\frac{1}{2})^k \cdot (\frac{1}{2})^{n-k}.$$

Probabilitatea ca în a $2n - k + 1$-a extragere să apară (i) este $1/2$. Astfel $P(A) = 1/2 \cdot C_{2n-k}^n(\frac{1}{2})^k \cdot (\frac{1}{2})^{n-k}$, iar probabilitatea cerută este

$$p_k = C_{2n-k}^n(\frac{1}{2})^{2n-k}$$

b) Se ţine cont de $\bigcup_{k=0}^{n} p_k = E$ şi deci $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

27. Cu repunere (schema binomială generalizată)

$$\frac{3!}{1!1!1!}(90/100)^1(6/100)^1(4/100)^1 + \frac{3!}{0!1!2!}(90/100)^0(6/100)^1(4/100)^2 +$$

$$+\frac{3!}{1!0!2!}(90/100)^1(6/100)^0(4/100)^2 + \frac{3!}{0!0!3!}(90/100)^0(6/100)^0(4/100)^3$$

iar fără repunere (schema geometrică generalizată

$$\frac{C_{90}^1C_6^1C_4^1}{C_{100}^3} + \frac{C_{90}^0C_6^1C_4^2}{C_{100}^3} + \frac{C_{90}^1C_6^0C_4^2}{C_{100}^3} + \frac{C_{90}^0C_6^0C_4^3}{C_{100}^3}.$$

28. Notăm cu

$A_{1i},\ i = 1, 2, 3$ mesajul i este transmis corect

$A_{2i},\ i = 1, 2, 3$ mesajul i este transmis parţial eronat

$A_{3i},\ i = 1,2,3$ mesajul i este transmis complet eronat

Avem $P(A_{1i}) = p_1,\ P(A_{2i}) = p_2,\ P(A_{3i}) = p_3\ i = 1,2,3$.

$A = A_{11} \cap A_{12} \cap A_{13}$ şi $P(A) = p_1^3$.

Complementarul evenimentului $\overline{B}$ este: toate mesajele sunt sau corecte sau parţial eronate, deci $B = (A_{11} \cup A_{21}) \cap (A_{12} \cup A_{22}) \cap (A_{13} \cup A_{23})$. Probabilitatea acestui eveniment este $(p_1 + p_2)^3$, iar $P(B) = 1 - (p_1 + p_2)^3$.

$$C = [A_{11} \cap (A_{22} \cup A_{32}) \cap (A_{23} \cup A_{33})] \cup$$
$$\cup [(A_{21} \cup A_{31}) \cap A_{12} \cap (A_{23} \cup A_{33})] \cup$$
$$\cup [(A_{21} \cup A_{31}) \cap (A_{22} \cup A_{32}) \cap A_{13})] \cup$$
$$\cup [A_{21} \cup A_{31}) \cap (A_{22} \cup A_{32}) \cap (A_{23} \cup A_{33})]$$

Probabilitatea acestui eveniment este $P(C) = 3(p_2 + p_3)^2 p_1 + (p_2 + p_3)^3$.

29. Fie B ”un mesaj este transmis pe un canal de comunicaţie fără nici o eroare măcar o dată”.

    Pentru ca să aibă loc evenimentul B mai întâi canalul nu trebuie să fie ”blocat” cu zgomote şi apoi măcar unul din cele k mesaje transmise nu trebuie să fie eronat (contrar evenimentului că toate cele k mesaje transmise sunt eronate). Obţinem $P(B) = (1-q)(1-p^k)$. Probabilitatea evenimentului A, eveniment care înseamnă că evenimentul B s-a produs măcar o dată pe un canal, este $P(A) = 1 - (1 - P(B))^n = 1 - (1 - (1-q)(1-p^k))^n$.

30. Evenimentul ca mesajul să nu fie corect este contrar evenimentului că ambele mesaje sunt corecte. Probabilitatea ca un mesaj transmis să fie corect este $(1-p)^n$, probabilitatea ca ambele mesaje să fie corecte este $(1-p)^{2n}$, iar probabilitatea căutată este $1 - (1-p)^{2n}$.

31. Bernoulli $C_8^7(1/3)^7(2/3) + C_8^8(1/3)^8 = 0,0024 + 0,00015 = 0,00259$.

32. Fie A_i evenimentul ca circuitul să provină de la sursa A_i. Fie D evenimentul ca circuitul folosit să fie defect, iar $D|A_i, i = 1,2,3$ evenimentul ca circuitul folosit să fie defect ştiind că el provine de la sursa A_i. Avem $P(D|A_1) = 0,001, P(D|A_2) = 0,005, P(D|A_3) = 0,01$. Din formula probabilităţii totale rezultă $P(D) = 1/3 \cdot (0,001 + 0,005 + 0,01) = 1/3 \cdot 0,016$. Folosind formula lui Bayes obţinem $P(A_1|D) = 1/16, P(A_2|D) = 5/16$. Deoarece evenimentele $A_1|D$ şi $A_2|D$ sunt incompatibile, rezultă $P(A_1 \cup A_2|D) = P(A_1|D) + P(A_2|D) = 6/16 = 0,375$.

33. $C_3^2(0,001)^2 0,999 + C_3^3(0,001)^3$.

34. $P(D) = C_6^2(0,2)^2(0,8)^4$, iar
$P(C) = C_6^0(0,2)^0(0,8)^6 + C_6^2(0,2)^2(0,8)^4 + C_6^1(0,2)^1(0,8)^5$.

35. $P(A) = p_1^n,\ P(B) = p_3^n,\ P(C) = C_n^1 p_3 p_2^{n-1},\ P(D) = 1 - (1 - p_4)^n,$
$P(E) = C_n^2 C_{n-2}^1 p_2^2 p_1^{n-3} p_3$.

36.
$$P(A) = (1 - 0,4)^5$$
$$P(B) = C_5^5(0,4)^5(0,6)^0 + C_5^4(0,4)^4(0,6)^1 + C_5^3(0,4)^3(0,6)^2$$

$$P(C) = C_5^1(0,4)^1(0,6)^4 + C_5^2(0,4)^2(0,6)^3$$

$$P(D) = C_5^1(o,4)(0,6)^4$$

$$P(E) = C_5^2(0,4)^2(0,6)^3.$$

Capitolul 2

Variabile aleatoare

2.1 Variabile aleatoare discrete

In viaţa de toate zilele intâlnim la tot pasul mărimi care iau valori ce se schimbă sub influenţa unor factori intâmplători. Aşa sunt, de exemplu numărul de zile dintr-un an în care cade ploaia peste o anumită regiune, rezultatul obţinut în urma măsurării unei mărimi fizice, viteza unei molecule de gaz, numărul de apeluri zilnice primite la o centrală telefonică, numărul de bile albe care apar în n extrageri dintr-o urnă ce conţine bile de diferite culori, numărul de puncte care apar la aruncarea unui zar etc.

In capitolul de faţa studiem acele mărimi care iau un număr finit sau cel mult numărabil de valori. Fiecare din mărimi poate lua diferite valori în diversele efectuări ale unei experienţe, chiar dacă toate condiţiile rămân neschimbate la fiecare efectuare a experienţei. Modificarea valorilor are la bază factori întâmplători. De aceea vom numi aceste mărimi **variabile aleatoare (întâmplătoare)**. Pentru cunoaşterea unei variabile aleatoare trebuie să cunoaştem în, primul rând, valorile pe care le poate lua. Insă unele valori pot apărea mult mai des decât altele. Variabila aleatoare va fi precizată dacă vom cunoaşte şi probabilitatea cu care este luată fiecare valoare.

Dacă E este finită sau cel mult numărabilă, $\mathcal{P}(E)$ mulţimea tuturor submulţimilor lui E o funcţie

$$X : E \to \{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}, \;\; x_1, \cdots, x_n, \cdots \in \mathbb{R}$$

se numeşte **variabilă aleatoare discretă**. Tabelul

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots \tag{2.1}$$

unde

$$p_i = P\{X = x_i\} = P\{\, e \in E \mid X(e) = x_i \,\},\ i = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

se numeşte **repartiţia variabilei X**. Are loc

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \tag{2.3}$$

Exemplul 2.1.1 *Două aparate de acelaşi tip funcţionează independent unul de celălalt şi se pot defecta cu probabilitatea $p \in (0, 1)$. Să analizăm numărul de aparate ce funcţionează la un moment dat şi cu ce probabilitate acestea funcţionează.*

Notăm cu $A_i, i = 1, 2$ evenimentul că ”aparatul i funcţionează”. Atunci, dacă urmărim starea în care se află cele două aparate avem următoarele situaţii care constituie mulţimea cazurilor posibile

$$E = \{(\overline{A_1}, \overline{A_2}),\ (\overline{A_1}, A_2), (\ A_1, \overline{A_2}),\ (A_1, A_2)\}.$$

Am convenit să notăm cu A_i faptul că aparatul i funcţionează, iar cu $\overline{A_i}$, faptul că acesta nu funcţionează.
Fie X numărul de aparate care funcţionează. Evident

$$X : E \to \{0, 1, 2\}.$$

Probabilităţile cu care se iau aceste valori sunt

$$P\{X = 0\} = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = (1 - p)^2$$

$$P\{X = 1\} = P\left((\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\ A_1 \cap \overline{A_2})\right) = P(\overline{A_1} \cap A_2) + P(\ A_1 \cap \overline{A_2}) =$$

$$= P(\overline{A_1})P(A_2) + P(A_1)P(\overline{A_2}) = 2p(1 - p).$$

$$P\{X = 2\} = P(A_1 \cap A_2) = p^2$$

Se obţine astfel repartiţia

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \end{pmatrix}.$$

■

Date variabilele $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots$ şi $Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_i \end{pmatrix}, j = 1, 2, \ldots$, definim

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Exemplul 2.1.2 *Următoarele formule sunt adevărate.*

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij} \\ q_j &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p_{ij} \\ \sum_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}} & p_{ij} = 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Să arătăm de exemplu prima formulă.

$$p_i = P\{X = x_i\} = P(\{X = x_i\} \cap E) = P\left(\{X = x_i\} \cap (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{Y = y_j\})\right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij}.$$

■

Variabilele se numesc **independente**, dacă

$$p_{ij} = p_i \cdot q_j, \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, \ \forall j = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

Suma variabilelor are repartiţia

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Suma $X + \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$ are repartiţia

$$X + \alpha : \begin{pmatrix} x_i + \alpha \\ p_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

Produsul variabilelor XY are repartiţia

$$\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

Produsul αX are repartiţia

$$\alpha X : \begin{pmatrix} \alpha x_i \\ p_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots \tag{2.10}$$

Puterea X^2 are repartiţia

$$X^2 : \begin{pmatrix} x_i^2 \\ p_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots \tag{2.11}$$

Exemplul 2.1.3 *Se dau variabilele independente:*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0.4 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Determinaţi repartiţiile variabilelor $X + Y, \ \ XY, \ \ 2 + X, X^2, \ \ 3Y.$

Folosim formulele precedente şi independenţa variabilelor. Convenim să punem pe prima linie toate rezultate în ordine crescătoare. De exemplu suma $X+Y$ poate lua doar valorile $1, \ 2, \ 3, 4$. Înlocuim apoi probabilităţile şi folosind independenţa avem

$$P\{X + Y = 1\} = P(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) = P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 1\} = 0.12$$

Dacă unele valori sunt luate în mai multe moduri, folosim probabilitatea unei reuniuni, observând că evenimentele sunt incompatibile; de exemplu

$$P\{X + Y = 2\} = P\left((\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})\right) =$$

$$= P(\{X = 0\} \cap \{Y = 2\}) + P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = 0,2 \cdot 0.4 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,32.$$

$$X + Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,12 & 0,32 & 0,4 & 0,16 \end{pmatrix}, \quad XY : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0,2 & 0,24 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$2 + X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0.4 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0,2 & 0.4 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad 3Y : \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

■

Exemplul 2.1.4 *Ce distribuţie are suma variabilelor independente:*

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p^2 & \frac{5}{3}p & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ q^2 & \frac{8}{5}q & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}?$$

Dar produsul lor?

Punem condiţiile ca aceste tabele să reprezinte repartiţii de variabile aleatoare. Adică pe linia a doua să avem numere subunitare şi suma lor să fie 1. Obţinem pentru prima

$$p^2 + \frac{5}{3}p + \frac{1}{3} = 1 \text{ şi } p \in [0, 3/5]$$

de unde la $p = \frac{1}{3}$. Analog

$$q^2 + \frac{8}{5}q + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = 1 \quad \text{şi} \quad q \in [0, 5/8]$$

de unde $q = \frac{2}{5}$. Rezultă

$$X{+}Y : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{225} & \frac{36}{225} & \frac{577}{1350} & \frac{209}{675} & \frac{2}{27} & \frac{1}{90} \end{pmatrix}, \quad X{\cdot}Y : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{270} & \frac{97}{1350} & \frac{189}{225} & \frac{11}{150} & \frac{1}{90} \end{pmatrix}$$

■

Fie X o variabilă aleatoare discretă.
Funcţia de repartiţie a lui X este definită prin $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} \tag{2.12}$$

Dacă variabila X are un număr finit de valori, atunci expresia ei este

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1 & x_1 \leqslant x < x_2 \\ \dots & \\ \sum_{j=1}^{i} p_j & x_{i-1} \leqslant x < x_i \\ \dots & \\ 1 & x \geqslant x_n \end{cases}, \tag{2.13}$$

Dacă X este o variabilă discretă, funcţia de repartiţie poate fi scrisă sub forma

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i u(x - x_i) \tag{2.14}$$

Mai observăm că funcţia de repartiţie este continuă la dreapta, iar saltul ei într-un punct este probabilitatea de a lua această valoare

$$p_i = P\{X = x_i\} = F(x_i) - F(x_i - 0).$$

Derivata în sensul distribuţiilor este

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x - x_i)(F(x_i) - F(x_i - 0)) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x - x_i) p_i \tag{2.15}$$

Funcţia f se mai numeşte **densitate de probabilitate** şi considerarea ei în cazul discret asigură tratarea unitară cu cazul continuu.
În relaţiile de mai sus prin funcţia u s-a înţeles funcţia unitate:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Prin $\delta(x - x_i)$ s-a notat distribuţia Dirac.

Exemplul 2.1.5 *Determinaţi funcţia de repartiţie a variabilei:*

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0.1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,1 & 1 \leqslant x < 2 \\ 0,3 & 2 \leqslant x < 3 \\ 0,6 & 3 \leqslant x < 4 \\ 0,7 & 4 \leqslant x < 5 \\ 0,9 & 5 \leqslant x < 6 \\ 1 & 6 \leqslant x \end{cases}$$

Are loc

$$F(x) = 0,1u(x-1) + 0,2u(x-2) + 0,3u(x-3) + 0,1u(x-4) +$$

$$+ 0,2u(x-5) + 0,1u(x-6).$$

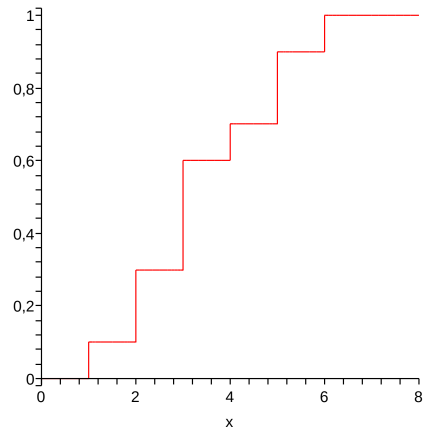


Figura 2.1: Funcţia de repartiţie

Funcţia de repartiţie este reprezentată în figura (2.1). Iar densitatea de probabilitate, reprezentată în figura (2.2), are expresia analitică

$$f(x) = 0,1\delta(x-1) + 0,2\delta(x-2) + 0,3\delta(x-3) + 0,1\delta(x-4) +$$
$$+0,2\delta(x-5) + 0,1\delta(x-6).$$

Se observă că derivând în sens distribuţional F obţinem f, deoarece derivata

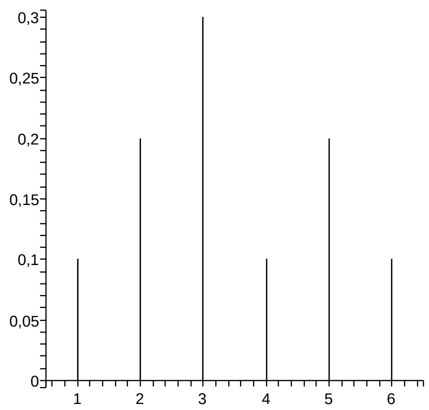


Figura 2.2: Densitatea de probabilitate

distribuţiei Heaviside, u este distribuţia Dirac, δ.

■

2.2 Momente ale variabilelor discrete

O variabilă aleatoare poate fi caracterizată prin funcţia sa de repartiţie. În multe situaţii aceasta din urmă nu este cunoscută şi se pune problema introducerii unor parametri (*caracteristici numerice*) care să permită caracterizarea variabilei aleatoare respective. Printre aceste caracteristici numerice, un rol important îl ocupă *valoarea medie* (speranţa matematică), *dispersia* (varianţa), *momentele de diferite ordine*.

Definiţiile următoare au fost date pentru cazul în care variabila are o infinitate numărabilă de valori, de aceea pentru existenţa valorilor caracteristice de mai jos, trebuie studiată convergenţa seriilor.

Momentul iniţial de ordinul r

$$m_r = M[X^r] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r p_i \tag{2.17}$$

Media sau **speranţa** este

$$M[X] = m_1 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \tag{2.18}$$

Proprietăţi ale mediei

1. $M[\lambda X] = \lambda M[X], \ \ \lambda \in \mathbb{R}$
2. $M[\lambda + X] = \lambda + M[X], \ \ \lambda \in \mathbb{R}$
3. $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$
4. $|M[XY]| \leqslant \sqrt{M[X^2]M[Y^2]}$.

Exemplul 2.2.1 *Dacă variabilele X, Y sunt independente atunci*

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y] \tag{2.19}$$

Calculăm media produsului

$$M[X \cdot Y] = \sum_i \sum_j (x_i \cdot y_j) p_{ij}$$

care datorită independenţei se scrie mai departe

$$\sum_i \sum_j (x_i \cdot y_j) p_i \cdot p_j = M[X] \cdot M[Y].$$

Vom da un exemplu de variabilă care nu admite medie.

■

Exemplul 2.2.2 *Variabilă aleatoare*

$$X : \begin{pmatrix} n \\ \dfrac{1}{n(n+1)} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

nu are medie.

Pentru început observăm că are loc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

deci funcţia din exemplu este o variabilă aleatoare. Deoarece seria

$$M[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)}$$

este divergentă, urmează că nu există medie.

■

Mediana este acea valoare notată m_e cu proprietatea

$$P\{X \leqslant m_e\} = P\{X \geqslant m_e\}.$$

Dacă variabila are un număr finit de valori şi anume n , atunci se obişnuieşte

$$m_e = \begin{cases} x_{k+1} & n = 2k+1 \\ x_k \text{ sau } x_{k+1} & n = 2k \end{cases} . \tag{2.20}$$

Moda este valoarea cu frecvenţă maximă. Evident este posibil ca să nu existe moda, de exemplu în cazul uniform, sau dacă există, aceasta să nu fie unică.

Momentul centrat de ordin r este

$$\mu_r = M[(X - M[X])^r] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M[X])^r p_i \tag{2.21}$$

Dispersia este momentul centrat de ordin 2, adică

$$D^2[X] = \mu_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M[X])^2 \tag{2.22}$$

Exemplul 2.2.3 *Dacă variabila aleatoare X are medie şi dispersie, atunci are loc*

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2. \tag{2.23}$$

Într-adevăr, dacă notăm media cu m

$$D^2[X] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - m)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i - 2m \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i + m^2 = M[X^2] - 2m^2 + m^2 = M[X^2] - (M[X])^2.$$

■

Dipersia mai este cunoscută şi sub numele de **varianţă**.

Proprietăţi ale dispersiei

1. $D^2[\lambda] = 0, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$
2. $D^2[X + \lambda] = D^2[X], \ \ \lambda \in \mathbb{R}$
3. $D^2[\lambda X] = \lambda^2 D^2[X], \ \ \lambda \in \mathbb{R}$
4. Dacă variabilele aleatoare $X, \ Y$ sunt independente, atunci

$$D^2[X \pm Y] = D^2[X] + D^2[Y].$$

Covarianţa variabilelor X **şi** Y este definită prin:

$$Cov[X,Y] = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] \tag{2.24}$$

şi are loc

$$D^2[X \pm Y] = D^2[X] + D^2[Y] \pm 2Cov[X,Y] \tag{2.25}$$

Abaterea medie pătratică notată D[X] este definită prin relaţia

$$\sigma = D[X] = \sqrt{D^2[X]}. \tag{2.26}$$

Proprietăţi ale abaterii medii pătratice.

1. $D[\lambda] = 0, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$
2. $D[\lambda + X] = D[X], \;\; \lambda \in \mathbb{R}$
3. $D[\lambda X] =\mid \lambda \mid D[X], \;\; \lambda \in \mathbb{R}.$

Functia caracteristică este funcţia

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

prin relaţia

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{jtx_i} p_i \tag{2.27}$$

Vom nota uneori φ_X, pentru a pune în evidenţă variabila căreia i se asociază. Remarcăm următoarele două proprietăţi ale funcţiei caracteristice.
Dacă variabilele X şi Y sunt independente, atunci

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t). \tag{2.28}$$

Momentele iniţiale se obţin cu ajutorul funcţiei caracteristice, după formula:

$$m_r = \frac{\varphi^{(r)}(0)}{j^r} \tag{2.29}$$

Variabila aleatoare binomială (Bernoulli) cu parametrii n şi p ($n \in \mathbb{N} \setminus 0,\ p \in (0,1)$) are repartiţia:

$$X : \left(\begin{array}{c} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{array} \right)_{k=\overline{0,n}}$$

unde $q = 1 - p$. Distribuţia binomială este de o mare importanţă în teoria fiabilităţii şi intervine în cazul în care se presupune că se efectuează o serie de n încercări independente, în fiecare încercare un eveniment A putându-se realiza cu probabilitatea p. Probabilitatea ca evenimentul A să se producă de k ori şi să nu se realizeze în celelalte $n-k$ încercări este $C_n^k p^k q^{n-k}$.

V.a. X cu distribuţie binomială se poate scrie ca suma a n v.a. independente $X_1,\ X_2,\ \ldots X_n$ definite astfel: $X_i = 1$ dacă la încercarea i s-a produs evenimentul A şi $X_i = 0$ în caz contrar: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Media v.a. binomiale este $M[X] = n \cdot p$, dispersia ei este $D^2[X] = n \cdot p \cdot q$, iar funcţia caracteristică este $\varphi(t) = (pe^{jt} + q)^n$.
Intr-adevăr

$$M[X] = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Din identitatea:

$$(pt + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k t^k q^{n-k}$$

prin derivare membru cu membru, în raport cu t, obţinem :

$$np(pt + q)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k t^{k-1} q^{n-k}.$$

Făcând aici $t = 1$ şi ţinând seama că $p + q = 1$ deducem

$$np = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Pentru calculul dispersiei $D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2$, trebuie să calculăm momentul iniţial de ordinul 2. Vom folosi pentru aceasta funcţia caracteristică a v.a. X, care este:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} e^{jtk} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{jt})^k q^{n-k} = (pe^{jt} + q)^n.$$

Avem

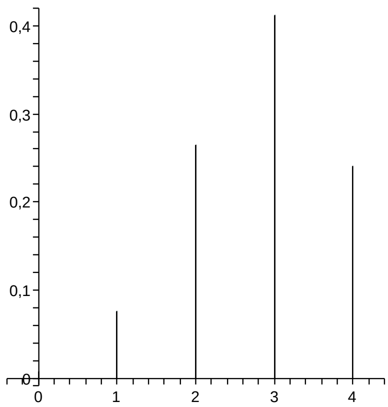


Figura 2.3: Repartiţia Bernoulli pentru $n = 4, p = 0,7$

$$M[X^2] = \frac{\varphi''(0)}{j^2} = n^2p^2 + np - np^2$$

şi prin urmare

$$D^2[X] = np - np^2 = np(1-p) = npq.$$

Repartiţia Poisson.
În cazul unui experiment se pot produce evenimentele $A_1, A_2, \cdots, A_n$ cu probabilităţile $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Facem ipoteza că evenimentele sunt independente. Fie X numărul de evenimente care se produc la o repetare în condiţii identice ale experimentului şi fie $q_i = 1 - p_i$. Fie $X_i, i = \overline{1,n}$, variabilele aleatoare care iau valoarea 1 dacă s-a produs A_i şi 0 în caz contrar. Acestea au repartiţia

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i & p_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n},$$

Observăm că

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Să calculăm media şi dispersia. Mai întâi pentru X_i avem

$$M[X_i] = p_i.$$

Pentru dispersie vom folosi

$$D^2[X_i] = M[X_i^2] - (M[X_i])^2.$$

Deoarece

$$X_i^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q_i & p_i \end{pmatrix},$$

avem

$$M[X_i^2] = p_i,$$

deci

$$D^2[X_i] = p_i - p_i^2 = p_i q_i \text{ şi } D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

Pentru variabila X rezultă acum din proprietăţile mediei şi ale dispersiei:

$$M[X] = M[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

$$D^2[X] = D^2[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} D^2[X_i],$$

deoarece variabilele aleatoare $X_i, i = \overline{1,n}$, sunt independente.

Repartiţia hipergeometrică.
Fie X variabila aleatoare care ia ca valori numărul de bile albe care se obţin extrăgând n bile dintr-o urnă care conţine a bile albe şi b bile negre ($n \leqslant a + b$). Tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare X este

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & \min\{n,a\} \\ \frac{C_a^0 C_b^n}{C_{a+b}^n} & \frac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \frac{C_a^2 C_b^{n-2}}{C_{a+b}^n} & \ldots & \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} & \ldots & \frac{C_a^{\min\{n,a\}} C_b^{n-\min\{n,a\}}}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix}.$$

Calculăm caracteristicile numerice ale variabilei aleatoare X. Avem

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\min\{a,n\}} k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_k k C_a^k C_b^{n-k} = = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_k a C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} =$$

$$= \frac{a}{C_{a+b}^n} C_{a+b-1}^{n-1} = a \frac{n!(a+b-n)!}{(a+b)!} \frac{(a+b-1)!}{(n-1)!(a+b-n)!} = \frac{an}{a+b}.$$

Pentru calculul dispersiei utilizăm formula

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Calculăm mai întâi

$$M[X^2] = \sum_k k^2 \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \sum_k k(k-1) \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} + \sum_k k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n};$$

$$\sum_k k(k-1) \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_k a(a-1) C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} = \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n} C_{a+b-2}^{n-2} =$$

$$= a(a-1) \frac{n!(a+b-n)!(a+b-2)!}{(a+b)!(n-2)!(a+b-n)!} = \frac{a(a-1)n(n-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

De aici rezultă că

$$M[X^2] = \frac{a(a-1)n(n-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{an}{a+b} = \frac{an}{a+b} \left(\frac{(a-1)(n-1)}{a+b-1} + 1 \right),$$

$$D^2[X] = \frac{an(an-n+b)}{(a+b)(a+b-1)} - \frac{a^2n^2}{(a+b)^2} = \frac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

Repartiţia Poisson cu infinitate numărabilă de valori se mai numeşte şi **legea evenimentelor rare** este de forma

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}. \qquad (2.30)$$

Folosim notaţia

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Evident

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

deci (2.30) este o repartiţie bine definită.
Arătăm că media repartiţiei Poisson este aceeaşi cu dispersia repartiţiei şi egală cu λ.

Într-adevăr,

$$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

Pentru calculul dispersiei folosim formula

$$M[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$D^2[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda = \lambda.$$

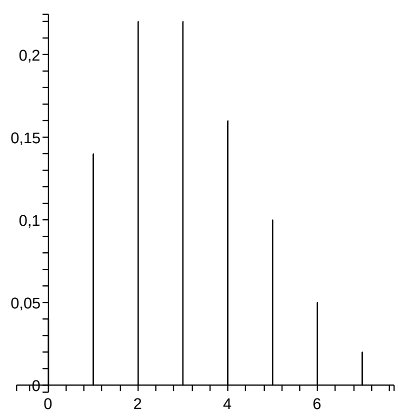


Figura 2.4: Repartiţia Poisson pentru $\lambda = 3$

Funcţia caracteristică este

$$\varphi(t) = e^{-\lambda(1-e^{jt})}.$$

Intr-adevăr

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{jtk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{jt})^k}{k!} = e^{-\lambda(1-e^{jt})}.$$

Repartiţia Poisson este intim legată de distribuţia binomială, obţinându-se ca un caz limită al acesteia din urmă, când $n \to \infty$ şi p scade astfel încât $np = \lambda = const.$ Avem

$$C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} = \\ \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

şi deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} = e^{-\lambda}$$

se deduce aproximarea, pentru $n \to \infty$:

$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Exemplul 2.2.4 *Un generator de particule emite particule în unitatea de timp. Care este probabilitatea ca în intervalul t să apară k impulsuri ?*

Pentru n suficient de mare împărţim $[0, t]$ în intervale de lungime $\frac{t}{n}$, încât în fiecare interval să existe cel mult un impuls. Probabilitatea ca într-un interval de timp de lungime $\frac{t}{n}$ să fie înregistrat un impuls este $\approx w\frac{t}{n} = p$ (se observă că $\frac{wt}{n} \longrightarrow 0$, pentru $n \to \infty$, ceea ce justifică încă o dată denumirea de eveniment rar). Probabilitatea ca în intervalul $[0, t]$ să fie înregistrate k impulsuri este dată de schema lui Bernoulli

$$C_n^k \left(\frac{wt}{n}\right)^k \left(1 - \frac{wt}{n}\right)^{n-k} \longrightarrow \frac{(wt)^k}{k!} e^{-wt} \text{ pentru } n \to \infty \text{ cu } \lambda = wt.$$

■

Exemplul 2.2.5 *O staţie de recepţie primeşte în medie 16 impulsuri pe minut şi poate prelucra cel mult 24 pe minut. Cu ce probabilitate staţia devine saturată?*

Suntem în condiţiile repartiţiei Poisson, cu $a = 16, t = 1$. Dacă X este numărul de semnale care ajung la staţie într-un minut, atunci staţia devine saturată dacă $\{X > 24\}$, iar probabilitatea este

$$P\{X > 24\} = \sum_{k=25}^{\infty} \frac{16^k}{k!} e^{-16} = 1 - \sum_{k=0}^{24} \frac{16^k}{k!} e^{-16} = 0,0017.$$

■

Repartiţia binomială cu exponent negativ (Pascal)
Într-un experiment un eveniment se poate produce cu probabilitatea $p \in (0, 1)$. Definim variabila X care ia valoarea k, dacă la repetarea k a experimentului s-a produs a m-a apariţie a evenimentului A, unde $k \geqslant m$. Deci evenimentul $\{X = k\}$ se produce în următoarele situaţii

1. evenimentul A se produce la repetarea k cu probabilitatea p

2. în cele $k - 1$ repetări anterioare au loc $m - 1$ produceri ale evenimentului, în condiţiile legii Bernoulli, adică $C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}$.

Deoarece cele două situaţii sunt independente urmează

$$P\{X = k\} = C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}, \quad q = 1 - p.$$

Observăm că definirea acestei variabile aleatoare este corectă deoarece $P\{X = k\} > 0$ şi $\sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = 1$.

Numele acestei repartiţii provine din faptul că probabilitatea căutată este coeficient în dezvoltarea în serie a lui

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p}\right)^{-m} = p^m (1 - q)^{-m} = p^m \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} q^{k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}.$$

Pentru a calcula media ţinem seama că $(1 - x)^{-m} = \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^{k-m}$ şi deci

$$\frac{x^m}{(1 - x)^m} = \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^k \;\text{ dacă }\; |x| < 1, \tag{2.31}$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^m}{(1 - x)^m}\right) = \frac{m x^{m-1}}{(1 - x)^{m+1}} \;\text{ dacă }\; |x| < 1,$$

adică

$$M[X] = \sum_{k=m}^{\infty} kC_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} =$$

$$= p^m q^{-m+1} \sum_{k=m}^{\infty} kC_{k-1}^{m-1} q^{k-1} = p^m q^{-m+1} \frac{mq^{m-1}}{p^{m+1}} = \frac{m}{p}.$$

Deci media este

$$M[X] = \frac{m}{p}.$$

Pentru calculul dispersiei folosim

$$M[X^2] = \sum_{k=m}^{\infty} k^2 C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = p^m q^{-m+1} \sum_{k=m}^{\infty} k^2 q^{k-1}.$$

Pentru a calcula ultima sumă înmulţim (2.31) cu x şi derivăm

$$\sum_{k=m}^{\infty} k^2 C_{k-1}^{m-1} x^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{mx^m}{(1-x)^{m+1}}\right) = \frac{mx^{m-1}(m+x)}{(1-x)^{m+2}},$$

deci

$$M[X^2] = \frac{m(m+q)}{p^2},$$

iar

$$D^2[X] = \frac{mq}{p^2}.$$

Exemplul 2.2.6 *Se transmit aleator semnalele 0 şi 1, cu aceeaşi probabilitate. Cu ce probabilitate cel de-al cincilea semnal este al doilea 0 ?*

Ne aflăm în condiţiile variabilei Pascal, unde $m = 2,\ k = 5$ şi $p = \dfrac{1}{2}$, deci

$$C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}.$$

■

Repartiţia geometrică.
Un eveniment A se poate produce în cadrul unui experiment cu probabilitatea $p \in (0,1)$. Fie X numărul de repetări în condiţii identice ale experimentului

până la producerea evenimentului. Teoretic variabila aleatoare X ia o infinitate de valori $X = k,\ k = 1, 2, \ldots, m, \ldots$ iar probabilităţile cu care sunt luate sunt

$$P\{X = k\} = pq^{k-1},\ \ q = 1 - p,\ \ k = 1, 2, 3, \ldots,$$

deorece evenimentul $\{X = k\}$ înseamnă faptul că în $k-1$ repetări ale experimentului A nu s-a produs. Avem, evident

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p\frac{1}{1-q} = 1.$$

deci repartiţia este bine definită

$$X : \begin{pmatrix} k \\ pq^{k-1} \end{pmatrix},\ \ k = 1, 2, \cdots . \tag{2.32}$$

Funcţia de repartiţie este

$$F(k) = P\{X \leqslant k\} = \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} = p\frac{1-g^{k-1}}{1-q} = 1 - q^k.$$

Calculăm media şi dispersia variabilei aleatoare.

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) =$$
$$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p},$$

ţinând seama de proprietăţile seriilor de puteri pentru $|q| < 1$.

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2,$$

$$M[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1} = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} kq^k =$$
$$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right) = p\frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2},$$

şi deci

$$D^2[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Exemplul 2.2.7 *Determinaţi funcţia de repartiţie a variabilei:*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0.4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,2 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0,6 & 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & 2 \leqslant x \end{cases}$$

Are loc

$$F(x) = 0,2u(x) + 0,4u(x-1) + 0,4u(x-2).$$

Funcţia este reprezentată în figura (2.5).
Iar densitatea de probabilitate este

$$f(x) = 0,2\delta(x) + 0,4\delta(x-1) + 0,4\delta(x-2).$$

Se observă că derivând în sens distribuţional F obţinem f, deoarece derivata distribuţiei Heaviside, u este distribuţia Dirac, δ.

■

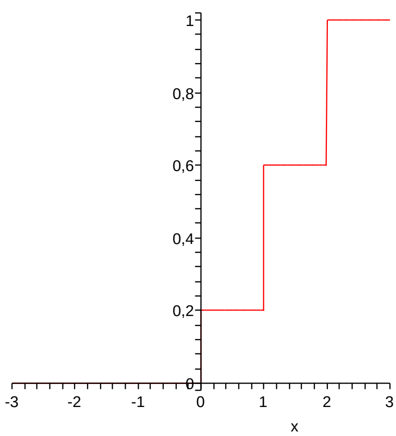


Figura 2.5: Funcţia de repartiţie

Exemplul 2.2.8 *Se transmit independent trei semnale diferite. Probabilităţile ca ele să fie corect recepţionate sunt 0,8/ 0,9/ 0,7. Determinaţi repartiţia variabilei aleatoare care dă numărul de semnale corect recepţionate. Cu ce probabilitate se recepţionează cel puţin 2 semnale; dar cel mult un semnal ?*

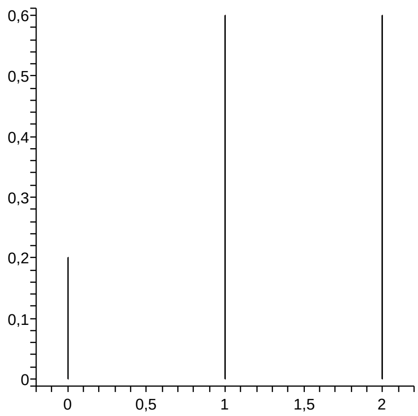


Figura 2.6: Densitatea de probabilitate

X urmează schema Poisson. Asociem polinomul

$$(0,8x + 0,2)(0,9x + 0,1)(0,7x + 0,3).$$

Variabila aleatoare X are repartiţia:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,006 & 0,092 & 0,398 & 0,504 \end{pmatrix}.$$

Probabilitatea de a recepţiona corect cel puţin 2 semnale este

$$P\{X \geqslant 2\} = P\{X = 2\} \cup \{X = 3\} = 0,902$$

iar cel mult un semnal,

$$P\{X \leqslant 1\} = P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = 0,098.$$

■

Exemplul 2.2.9 *Fie X o variabilă aleatoare repartizată binomial. Determinaţi valoarea lui X care are probabilitate maximă.*

Facem raportul a două probabilităţi consecutive.

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}$$

iar prin comparaţia cu 1, $P\{X = k\}$ este maximă pentru $k_{max} = [(n+1)p]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x; (dacă $(n+1)p$ este un întreg, atunci maximum este atins în k_{max} şi $k_{max} - 1$.

■

Exemplul 2.2.10 *Într-o hală funcţionează 30 de becuri, care se pot arde cu probabilitatea 0,8. Care este numărul cel mai probabil de becuri care se ard la un moment dat ? Dar dacă sunt 4 becuri ?*

Aplicăm exemplul precedent cu $n = 30$ şi $p = 0,8$. Avem

$$[(30+1)0,8] = 24, \quad [(4+1)0,8] = 4$$

deci în primul caz 27 de becuri, iar în al doilea 3 şi 4.

■

Exemplul 2.2.11 *Calculatorul A transmite mesaje pentru calculatorul B pe o linie telefonică nefiabilă. Mesajul este codificat şi B poate detecta dacă au apărut erori în timpul transmisiei. Probabilitatea de transmisie reuşită este p. Cu ce probabilitate este necesar să transmitem un mesaj mai mult de două ori ?*

Folosim v.a. distribuită geometric, cu repartiţia:

$$X : \begin{pmatrix} k \\ (1-p)^{k-1}p \end{pmatrix}_{k=1,2\ldots}$$

Probabilitatea este atunci $P\{X \geqslant 3\} = \sum\limits_{k=3}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = (1-p)^2$.

■

Exemplul 2.2.12 *Fie X o variabilă aleatoare repartizată geometric. Să se calculeze $P\{X > k\}$ şi $P\{X \text{este un număr par}\}$.*

Folosim probabilitatea evenimetului contrar şi avem pentru prima cerinţă

$$P\{X > k\} = 1 - P\{X \leqslant k\} = 1 - p\frac{1-q^k}{1-q} = q^k.$$

Pentru a doua cerinţă obervăm că problema revine la calculul unei serii geometrice cu raţia q^2.

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty}\{X = 2k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}P\{X = 2k\} = \sum_{k=1}^{\infty}pq^{2k-1} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}.$$

■

Exemplul 2.2.13 *Probabilitatea unei erori de bit într-o linie de comunicaţie este 0,001. Găsiţi probabilitatea ca un bloc de 1000 de biţi să aibă 5 sau mai multe erori.*

Folosim v.a Bernoulli

$$\sum_{k=5}^{1000} C_{1000}^{k}(0,001)^{k}(0,999)^{100-k}.$$

Este posibilă şi o altă abordare. Pentru a aproxima combinările folosim v.a. Poisson , deoarece n este foarte mare; parametrul $\lambda = 1000 \times 0,001 = 1$ şi obţinem

$$\sum_{k=5}^{+\infty} \frac{1^k e^{-1}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-1}}{k!}.$$

■

Exemplul 2.2.14 *Un generator de particule emite în condiţiile distribuţiei Poisson. Ştiind că într-un interval de timp fixat, probabilitatea de a nu apare nici o particulă este 1/4, cu ce probabilitate în acelaşi interval apar 2 particule ?*

Aflăm parametrul din condiţia $P\{X = 0\} = 1/4$. Deci

$$\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = 1/4$$

şi înlocuim în $P\{X = 2\} = \dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$.

■

Exemplul 2.2.15 *O echipă de intervenţii într-un anumit sector de producţie este solicitată de 600 de ori, în timp de 300 de zile lucrătoare, pentru lucrul în două schimburi de câte 8 ore. Care este probabilitatea ca echipa să fie solicitată de 3 ori într-un schimb ?*

Folosim v.a. Poisson cu $\lambda = a\,t$, iar densitatea $a = \dfrac{600}{300 \cdot 2 \cdot 8}$ şi $t = 8,\ \ k = 3.$

■

Exemplul 2.2.16 *Arătaţi că suma a două variabile aleatoare Poisson independente de parametri $\lambda_1,\ \lambda_2$ este o variabilă aleatoare Poisson, cu parametrul $\lambda_1 + \lambda_2$.*

$$P\{X_1 + X_2 = n\} = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} (P\{X_1 = k\} \cap P\{X_2 = n-k\})\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}.$$

O altă metodă utilizează funcţia caracteristică

$$\varphi_i(t) = e^{-\lambda_i(1-e^{jt})},\ i = 1, 2$$

şi folosind independenţa obţinem funcţia caracteristică

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(1-e^{jt})}.$$

Recunoaştem funcţia caracteristică a unei variabile Poisson cu parametrul $\lambda_1 + \lambda_2$.

■

Exemplul 2.2.17 *Se dau variabilele aleatoare independente*

$$X : \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & p & q \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - q & p \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze a astfel încât variabila $X - Y$ să aibă dispersia egală cu $\frac{4}{9}$.

Avem $1/3 + p + q = 1,\ 1/3 + 2/3 - q + p = 1$ şi deci $p = q = 1/3$. Apoi

$$D^2[X - Y] = D^2[X] + D^2[Y]$$

si obţinem $a = 1$.

■

Exemplul 2.2.18 *Să se calculeze valorile medii ale variabilelor:*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Prin derivare în raport cu t, în relaţia evidentă

$$\sum_{k=1}^{n} t^k = \frac{t - t^{n+1}}{1-t},$$

obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} k t^{k-1} = \frac{1-(n+1)t^n + nt^{n+1}}{(1-t)^2}.$$

De aici, pentru $t = 1/2$ rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{2^{k-1}} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

iar, apoi

$$M[X] = \sum_{k=2}^{n} k \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{n+2}{2^{n-1}}.$$

Pentru variabila Y avem:

$$M[Y] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

■

2.3 Variabile aleatoare continue

Anumite situaţii din practica tehnologică, economie şi alte sectoare de activitate conduc la considerarea unor variabile aleatoare care au ca valori o mulţime infinită dar nenumărabilă. În aceste situaţii probabilitatea de a fi luată o anumită valoare este nulă, dar prezintă interes să calculăm probabilitatea ca mărimea aleatoare sa ia valori într-un interval; de exemplu

- timpul de funcţionare a unui dispozitiv să fie cuprins între două valori
- durata de viata a unui sistem format din mai multe dispozitive să depăşească o anumită perioada de timp
- erorile de măsurare printr-o anumită metodă să fie mai mici decât o valoare dată
- variaţiile de tensiune datorită ”zgomotului” de pe o linie de transmisie să se încadreze între anumite limite

- cantitatea dintr-o anumită materie primă să ajungă, dacă din ea se consumă zilnic mărimi aleatoare
- deservirea unui client la o staţie să se încadreze într-un anumit interval de timp.

În acest caz definiţia unei variabile aleatoare este mai generală şi se face relativ la un câmp de probabiliatte oarecare. Fie $\{E, \mathcal{K}, P\}$ un câmp borelian de probabilitate. O funcţie

$$X : E \to \mathbb{R}$$

este o variabilă aleatoare dacă

$$\{X < x\} = \{e \in E \mid X(e) < x\} \in \mathcal{K}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.33}$$

Condiţia (2.33) este echivalentă cu oricare din condiţiile de mai jos

$$\{X \leqslant x\} \in \mathcal{K}, \quad \{X > x\} \in \mathcal{K}, \quad \{X \geqslant x\} \in \mathcal{K}$$

$$\{x_1 < X < x_2\} \in \mathcal{K}, \quad \{x_1 \leqslant X < x_2\} \in \mathcal{K},$$

$$\{x_1 < X \leqslant x_2\} \in \mathcal{K}, \quad \{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} \in \mathcal{K}.$$

Aceasta înseamnă că putem calcula probabilităţile oricăror evenimente de forma precedentă.

Dacă X este o variabilă aleatoare, atunci $X + \lambda, \quad \lambda X, \; X^2, \dfrac{1}{X}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ sunt variabile aleatoare.
Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare, atunci $XY, \quad X + Y, \; \dfrac{X}{Y}, \quad \max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ sunt variabile aleatoare.
Funcţia de repartiţie, F, este dată de definiţia generală (2.12), dar în cazul continuu această funcţie este legată de densitatea de probabilitate. Dacă există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, cu o mulţime cel mult numărabilă de puncte de discontinuitate de prima speţă, astfel ca

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.34}$$

atunci f se numeşte **densitate de probabilitate**. Dacă F este o funcţie continuă vom spune că X este o **variabilă aleatoare continuă**. Au loc:

$$F'(x) = f(x) \tag{2.35}$$

în toate punctele de continuitate ale lui f, iar ca distribuţie totdeauna.
O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ este densitate de probabilitate pentru o variabilă aleatoare dacă şi numai dacă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{2.36}$$

Pentru o variabilă aleatoare oarecare au loc formulele

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1) \tag{2.37}$$

$$P\{X = x\} = F(x) - F(x - 0). \tag{2.38}$$

Dacă variabila este continuă atunci are loc următoarea formulă de calcul

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} =$$

$$P\{x_1 \leqslant X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1). \tag{2.39}$$

Funcţia de repartiţie condiţionată.

În câmpul de probabiliatate $\{E, \mathcal{K}, P\}$ considerăm $A \in \mathcal{K}$, cu proprietatea $P(A) \neq 0$.
Dată o variabilă aleatoare X, numim **funcţie de repartiţie condiţionată de evenimentul** A, funcţia dată de

$$F(x|A) = P(\{X < x\}|A) = \frac{P(\{X < x\} \cap A)}{P(A)}.$$

Toate proprietăţile funcţiei de repartiţie se păstrează; menţionăm

$$F(+\infty|A) = 1; \quad F(-\infty|A) = 0.$$

Exemplul 2.3.1 *Să demonstrăm următoarea formulă*

$$P(\{a \leqslant X < b\}|A) = F(b|A) - F(a|A). \tag{2.40}$$

Într-adevăr, dacă $a < b$ avem $\{X < a\} \subset \{X < b\}$ şi

$$P(\{a \leqslant X < b\}|A) = \frac{P(\{a \leqslant X < b\} \cap A)}{P(A)} =$$

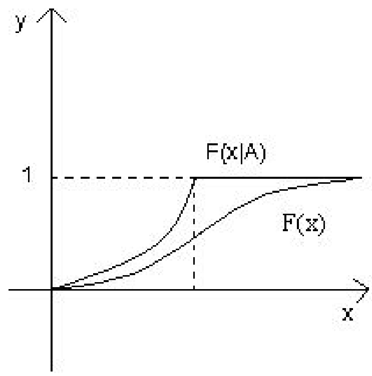


Figura 2.7: Funcţia de repartiţie condiţionată

$$= \frac{P\left((\{X < b\} \cap A) \setminus (\{X < a\} \cap A)\right)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(\{X < b\} \cap A) - P(\{X < a\} \cap A)}{P(A)} = F(b|A) - F(a|A).$$

■

Ne interesează în continuare, pentru numeroasele aplicaţii practice, unele cazuri particulare ale evenimentului A.

1. Dacă $A = \{X < a\}$ şi $F(a) = P(\{X < a\}) \neq 0$, atunci

$$F(x|A) = \frac{P(\{X < x\} \cap \{X < a\})}{P\{X < a\}} = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(a)} & \text{dacă } x \leqslant a \\ 1 & \text{dacă } x > a. \end{cases}$$

Deci obţinem

$$F(x \mid \{X < a\}) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(a)} & \text{dacă } x \leqslant a \\ 1 & \text{dacă } x > a. \end{cases} \tag{2.41}$$

În figura (2.7) sunt ilustrate cele două funcţii.

2. Fie $A = \{a \leqslant X < b\}$ astfel ca $P(A) = F(b) - F(a) \neq 0$. Deducem imediat că

$$F(x \mid \{a \leqslant X < b\}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant a \\ \dfrac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & \text{dacă } a < x \leqslant b \\ 1 & \text{dacă } x > b. \end{cases} \tag{2.42}$$

Exemplul 2.3.2 *Următoarea formulă de calcul este adevărată.*

$$P(A \mid \{a \leqslant X < b\}) = \frac{(\ F(b|A) - F(a|A)\ )P(A)}{F(b) - F(a)}. \tag{2.43}$$

Aceasta rezultă imediat

$$P(A \mid \{a \leqslant X < b\}) = \frac{P(A \cap \{a \leqslant X < b\})}{P\{a \leqslant X < b\}} =$$

$$= \frac{P(\{a \leqslant X < b\} \mid A)P(A)}{F(b) - F(a)} = \frac{(F(b|A) - F(a|A))P(A)}{F(b) - F(a)}.$$

În ultima relaţie s-a folosit (2.40).

■

Densităţi de probabilitate condiţionate. Fie X o variabilă aleatoare continuă şi $A \in \mathcal{K}$, cu probabilitatea $P(A) \neq 0$. Presupunem că X are densitatea de probabilitate f. Atunci **densitatea de probabilitate a lui X, condiţionată de** A este dată, în punctele ei de continuitate, de derivata funcţiei de repartiţie condiţionată

$$f(x|A) = F'(x|A).$$

1. Dacă $A = \{X < a\}$, prin derivarea formulei (2.41) se obţine

$$f(x|A) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(a)} & \text{dacă } x \leqslant a \\ 0 & \text{dacă } x > a. \end{cases} \tag{2.44}$$

2. Dacă $A = \{a \leqslant X < b\}$ prin derivarea relaţiei (2.42) găsim

$$f(x \mid \{a \leqslant X < b\} = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(b) - F(a)} & \text{dacă } a < x \leqslant b \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \tag{2.45}$$

Formula probabilităţii totale. Formula lui Bayes.
Definim probabilitatea condiţionată $P(A|\{X=x\})$

$$P(A \mid \{X=x\}) = \lim_{\Delta x \to 0} P(A \mid \{x \leqslant X < x+\Delta x\}) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(F(x+\Delta x|A) - F(x|A))P(A)}{F(x+\Delta x) - F(x)} = \frac{f(x|A)P(A)}{f(x)}.$$

În şirul de egalităţi s-a folosit formula (2.43). Dacă integrăm pe $\mathbb{R}$ relaţia

$$P(A \mid \{X=x\})f(x) = f(x|A)P(A)$$

obţinem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(A \mid \{X=x\})f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|A)P(A)dx =$$

$$= P(A)(F(+\infty|A) - F(-\infty|A)) = P(A).$$

Relaţia obţinută se numeşte **formula probabilităţii totale** în cazul continuu şi este

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A \mid \{X=x\})f(x)dx. \tag{2.46}$$

Formula lui Bayes în cazul continuu este

$$f(x|A) = \frac{P(A \mid \{X=x\})f(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(A \mid \{X=x\})f(x)dx}.$$

2.4 Momente ale variabilelor continue

Ca şi în cazul variabilei discrete putem defini **caracteristicele numerice** ale unei variabile continue.
Media unei variabile aleatoare continue este:

$$m = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{2.47}$$

(dacă există) şi satisface proprietatea:

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y], \tag{2.48}$$

iar, dacă X, Y sunt independente, atunci are loc şi proprietatea:

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y] \tag{2.49}$$

Momentul iniţial de ordin r este:

$$m_r = M[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx \tag{2.50}$$

Momentul centrat de ordin r este:

$$\mu_r = M[(X - M[X])^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^r f(x)dx \tag{2.51}$$

Dispersia este momentul centrat de ordinul 2

$$\sigma^2 = D^2[X] = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x)dx = m_2 - m^2 \tag{2.52}$$

iar **abaterea medie pătratică** este

$$\sigma = D[X] = \sqrt{D^2[X]}.$$

Dacă X, Y sunt independente, are loc proprietatea:

$$D^2[X \pm Y] = D^2[X] + D^2[Y] \tag{2.53}$$

Să remarcăm că proprietăţile medii şi dispersiei unei variabile aleatoare discrete se menţin şi în cazul variabilei aleatoare continue, dispersia dând o indicaţie asupra gradului de concentrare a valorilor variabilei în jurul valorii medii.

Covarianţa variabilelor X **şi** Y este definită prin:

$$Cov[X, Y] = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] \tag{2.54}$$

şi are loc

$$D^2[X + Y] = D^2[X] + D^2[Y] + 2Cov[X, Y] \tag{2.55}$$

Dacă X este o variabilă aleatoare şi $Y = g(X)$ este o variabilă obţinută printr-o transformare cu ajutorul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă, inversabilă, atunci **media transformării** este

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \tag{2.56}$$

Dacă X este o variabilă cu media m şi dispersia σ^2, are loc **inegalitatea lui Cebâşev**

$$P\{|X-m|<\epsilon\} \geqslant 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \tag{2.57}$$

Un instrument comod de studiu al unei variabile aleatoare îl reprezintă **funcţia caracteristică** $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin:

$$\varphi(t) = M[e^{jtX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x) dx, \quad j^2 = -1 \tag{2.58}$$

Să remarcăm faptul că funcţia caracteristică φ a unei v.a. continue este transformata Fourier a densităţii de probabilitate f (care este funcţie absolut integrabilă). Din formula de inversiune a transformatei Fourier deducem şi relaţia:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jtx} \varphi(t) dt \tag{2.59}$$

Momentele iniţiale se obţin cu ajutorul funcţiei caracteristice, după formula:

$$m_r = \frac{\varphi^{(r)}(0)}{j^r} \tag{2.60}$$

Repartiţia normală. Această repartiţie este una din cele mai importante din teoria probabilităţilor, apare cel mai frecvent în practică, stă la baza metodelor de prelucrare a datelor de măsurare jucând un rol important în statistica matematică şi este în acelaşi timp legea limită către care tind alte legi. Spunem că o variabilă aleatoare este distribuită normal cu media m şi dispersia σ^2, şi notăm acasta prin $X : N(m, \sigma^2)$, dacă are densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.61}$$

Funcţia lui Laplace se defineşte prin

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

şi are proprietăţile

$$\Phi(-z) = -\Phi(z)$$

şi

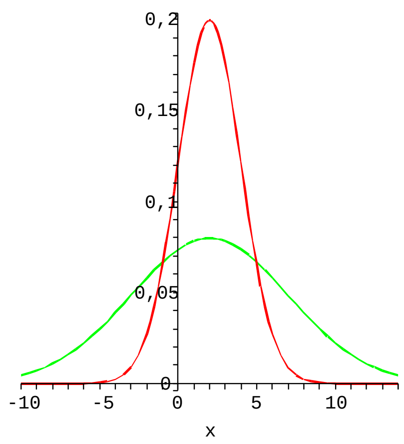


Figura 2.8: Repartiţia normală

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2}. \tag{2.62}$$

În integrala $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ facem schimbarea de variabilă $\dfrac{t-m}{\sigma} = u$ şi obţinem

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}\sigma du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}du + \int_0^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

În ultima egalitate s-a folosit relaţia (2.62). Se obţine astfel formula funcţiei de repartiţie a variabilei aleatoare normale

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{2.63}$$

Deducem formula

$$P\{a \leqslant X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Probabilitatea ca abaterea faţă de m, notată $|X-m|$ să nu depăşească $\epsilon > 0$, este dată de

$$P\{|X - m| < \epsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)$$

Exemplul 2.4.1 Regula celor 3σ. *O variabilă normal repartizată* $X : N(m, \sigma^2)$ *ia valori semnificative în intervalul* $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$.

Într-adevăr, $P\{|X - m| \geqslant 3\sigma\} = 1 - P\{|X - m| < 3\sigma\} = 1 - 2\Phi(3) = 0,0027$, valoare care în unele situaţii poate fi neglijată.

■

Exemplul 2.4.2 *Funcţia caracteristică a repartiţiei normale este*

$$\varphi(t) = e^{jmt - \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \tag{2.64}$$

Reamintim că densitatea de probabilitate a repartiţiei normale este

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

pe care o înlocuim în expresia funcţiei caracteristice. Facem schimbarea de variabilă $x - m = \sqrt{2}\sigma y$ şi obţinem

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtm - y^2 + jty\sqrt{2}\sigma} dy =$$

$$= \frac{e^{jtm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y - \frac{t\sigma}{2}j)^2} dy = e^{jmt - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

■

Exemplul 2.4.3 *Dacă* $X_k : N(m_k, \sigma_k^2), k = 1, \ldots n$, *sunt variabile aleatoare independente, atunci variabila aleatoare* $X_1 + \ldots + X_n$ *este repartizată normal de forma* $N(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2)$.

Funcţia caracteristică a sumei este produsul funcţiilor caracteristice

$$\varphi_{X_1 + \ldots + X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{im_k t - \frac{t^2\sigma_k^2}{2}} =$$

$$= e^{it\sum_{k=1}^{n}\left(m_k - \frac{t^2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}{2}\right)},$$

care corespunde în mod unic variabilei repartizate $N(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)$.

■

Exemplul 2.4.4 *Dacă $X_k, k = 1, \ldots n$, sunt variabile aleatoare independente repartizate normal $N(m, \sigma^2)$, atunci media lor aritmetică*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

este repartizată $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$.

Din exemplul precedent suma este repartizată $N(nm, n\sigma^2)$. Să calculăm funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare notată

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Avem

$$F_{\overline{X}} = P\{\overline{X} < x\} = P\{\sum_{k=1}^{n} X_k < nx\}.$$

Prin derivare găsim densitatea de probabilitate

$$f_{\overline{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(nx-nm)^2}{2n\sigma^2}} n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}},$$

de unde afirmaţia.

■

Teorema limită centrală afirmă că, dacă variabilele $X_i,\ i = 1, 2, \ldots n$ au aceeaşi repartiţie şi sunt independente două câte două, atunci variabila aleatoare

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}{D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]}$$

urmează, pentru n suficient de mare, legea normal distribuită $N(0,1)$.

Dacă X este o variabilă repartizată Bernoulli, atunci conform teoremei **Moivre Laplace**, variabila

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}}, \quad p+q=1$$

urmează, pentru n suficient de mare, legea normală $N(0,1)$.

Exemplul 2.4.5 *Intr-o fabrică se produc rezistori cu rezistenţa R. Un rezistor este considerat bun dacă R este cuprinsă între $4,99\,k\Omega$ şi $5,01\,k\Omega$. Dacă R este o variabilă aleatoare normal distribuită cu media $m = 5,002\,k\Omega$ şi abatera medie pătratică $\sigma = 0,005\,k\Omega$ să determinăm probabilitatea ca un rezistor să fie considerat rebut.*

Avem $R : N(5,002; 0,005^2)$. Probabilitatea ca un rezistor să fie bun este:

$$P\{4,99 \leqslant R \leqslant 5,01\} = \Phi\left(\frac{5,01-5,002}{0,005}\right) - \Phi\left(\frac{4,99-5,002}{0,005}\right) =$$
$$= \Phi(1,6) - \Phi(-2,4) = \Phi(1,6) + \Phi(2,4) = 0,4452 + 0,4918 = 0,937$$

iar probabilitatea de rebut este $1 - 0,937 = 0,063$, ceea ce înseamnă că se produc $6,3\%$ rebuturi.

■

Exemplul 2.4.6 *O variabilă aleatoare X este distribuită normal $N(0,\sigma^2)$. Dat un interval (α,β), cu $\alpha > 0,\ \beta > 0$, să determinăm valoarea σ, astfel ca probabilitatea $P\{X \in (\alpha,\beta)\}$ să fie maximă.*

Are loc evident

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\frac{\beta}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_0^{\frac{\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right).$$

Anulăm derivata în raport cu σ a integralei cu parametru şi găsim

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}}(-\frac{\beta^2}{\sigma^2}) - e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}}(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2})\right) = 0.$$

Deducem

$$\sigma = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln\beta - \ln|\alpha|)}}.$$

■

Exemplul 2.4.7 *Variabila aleatoare X este distribuită $N(m, \sigma^2)$. Determinaţi densitatea de probabilitate a variabilei $Y = aX + b$.*

Pentru $a > 0$ avem:

$$F_Y(x) = P\{aX + b \leqslant x\} = P\left\{X \leqslant \frac{x-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

iar pentru $a < 0$ avem:

$$F_Y(x) = P\{aX + b \leqslant x\} = P\left\{X \geqslant \frac{x-b}{a}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Prin derivare găsim

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

rezultă că variabila este normal repartizată cu parametrii $N(am + b, |a|\sigma)$.

■

Exemplul 2.4.8 *Fie $X : N(m, \sigma^2)$. Să determinăm $f(x \mid \{|X - m| \leqslant k\sigma\})$.*

Să notăm $A = \{a \leqslant X \leqslant b\}$. Are loc

$$F(x|A) = P(\{X \leqslant x|A\}) = \frac{P(\{X \leqslant x\} \cap A}{P(A)}.$$

$$F(x|A) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < a \\ \dfrac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & \text{dacă } x \in [a, b] \\ 1 & \text{dacă } x > b. \end{cases}$$

Prin derivare obţinem:

$$f(x|A) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(b) - F(a)} & \text{dacă } x \in [a, b] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Pentru $a = m - k\sigma$ şi $b = m + k\sigma$ rezultă:

$$f(x \mid \{|X - m| \leqslant k\sigma\}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma 2\Phi(k)} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} & \text{dacă } |x - m| \leqslant k\sigma \\ \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

■

Exemplul 2.4.9 *Să calculăm momentele centrate ale repartiţiei normale* $N(m, \sigma^2)$.

Avem

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

în care facem schimbarea de variabilă $x - m = \sqrt{2}\sigma y$, deci

$$\mu_k = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^k e^{-y^2} dy.$$

Dacă integrăm prin părţi obţinem

$$\mu_k = \frac{(\sigma\sqrt{2})^k}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2} e^{-y^2} y^{k-1} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{k-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-2} e^{-y^2} dy \right) =$$

$$= \frac{(k-1)(\sigma\sqrt{2})^k}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-2} e^{-y^2} dy = (k-1)\sigma^2 \mu_{k-2},$$

deoarece prima expresie se anulează la limită. Deducem din relaţia de recurenţă precedentă

$$\begin{cases} \mu_{2k+1} & = 0 \\ \mu_{2k} & = (2k-1)!!\sigma^{2k} \end{cases}$$

În particular, pentru $k = 2$, obţinem $D^2[X] = \sigma^2$.

■

Exemplul 2.4.10 *Se aruncă un zar de* 500 *de ori. Cu ce probabilitate putem afirma că obţinem faţa* 6 *de cel mult* 50 *de ori?*

Fie X variabila aleatoare care dă frecvenţa de apariţie a feţei cu 6 puncte. Avem $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 500$. Utilizăm teorema lui Moivre-Laplace şi avem

$$P\{X \leqslant 90\} = P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{90 - np}{\sqrt{npq}}\right\} \simeq$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{90 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi(0,8) = 0,788.$$

■

Exemplul 2.4.11 *Densitatea de probabilitate a defectării unei valve radio în momentul deschiderii este* $q(v)$. *Voltajul* V *este aleator şi are repartiţie* $N(m, \sigma^2)$. *Să găsim probabilitatea evenimentului* A*, care semnifică faptul că la momentul deschiderii valva s-a defectat.*

Vom folosi formula (2.46)

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(v) f(v) dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} q(v) e^{-\frac{(v-m)^2}{2\sigma^2}} dv.$$

■

Repartiţia uniformă. Variabila aleatoare X se numeşte **uniformă** pe $[a, b]$ şi vom nota aceasta prin $X : U(a, b)$, dacă densitatea ei de probabilitate este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} & \text{dacă } x \in [a, b] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \tag{2.65}$$

Mai întâi observăm că această funcţie este o densitate de probabilitate. Este evident pozitivă şi dacă o integrăm pe $\mathbb{R}$ obţinem valoarea 1. (vezi figura (2.9)).
Se deduce cu uşurinţă că funcţia de repartiţie uniformă, reprezentată grafic în figura (2.10) este:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant a \\ \dfrac{x - a}{b - a} & \text{dacă } a < x \leqslant b \\ 1 & \text{dacă } x > b. \end{cases}$$

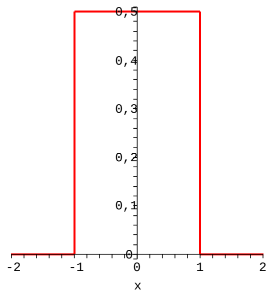


Figura 2.9: Densitatea repartiţiei uniforme

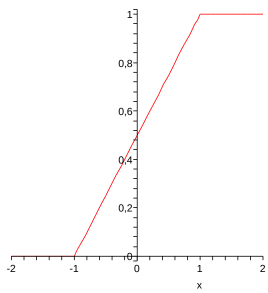


Figura 2.10: Funcţia de repartiţie uniformă

Exemplul 2.4.12 *Timpul de aşteptare într-o staţie de tramvai este o o variabilă aleatoare repartizată uniform în intervalul* $[0, 10]$ *minute. Cu ce probabilitate aşteptăm cel puţin 6 minute ?*

Putem presupune că în orice moment din intervalul de timp $[0, 6]$ poate să apară un tramvai, deci legea timpului de aşteptare, X, este uniformă şi are densitatea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{dacă } x \in [0, 10] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Probabilitatea este dată de

$$P\{X \geqslant 6\} = \int_6^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{4}{10}.$$

Valoarea medie este

$$M[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

dispersia

$$D^2[X] = \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

iar funcţia caracteristică este

$$\varphi(t) = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a} dx = \frac{e^{jbt} - e^{jat}}{jt(b-a)}.$$

■

Exemplul 2.4.13 *Fie X o variabilă distribuită uniform $U(-1, 1)$ şi $Y = e^X$. Să determinăm densitatea de probabilitate a variabilei Y, media şi dispersia ei.*

Aflăm funcţia de repartiţie . Pentru $x > 0$

$$F_Y(x) = P\{Y \leqslant x\} = P\{e^X \leqslant x\} = P\{X \leqslant \ln x\} = F_X(\ln x).$$

Prin derivare găsim $f_Y(x) = f_X(\ln x)\frac{1}{x}$, adică

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{dacă } x \in [e^{-1}, e] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Media este

$$M[Y] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^x \, dx = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$$

Să calculăm momentul iniţial de ordin 2.

$$m_2[Y] = \int_{e^{-1}}^{e} x^2 \frac{1}{2x} \, dx = \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2}).$$

Dispersia va fi atunci

$$D^2[Y] = m_2[Y] - (M[Y])^2 = \frac{1}{2}$$

■

Repartiţia exponenţială. O variabilă aleatoare are o distribuţie exponenţială, cu parametrul λ dacă densitatea sa de probabilitate este:

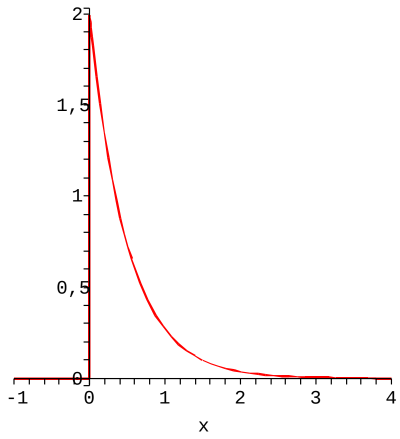


Figura 2.11: Repartiţia exponenţială

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \tag{2.66}$$

iar graficul este reprezentat în figura (2.12).
Pentru o astfel de variabilă X se determină cu uşurinţă valorile sale caracteristice:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad D^2[X] = \frac{1}{\lambda^2},$$

precum şi funcţia de repartiţie şi cea caracteristică:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ şi respectiv, } \varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - jt}.$$

Distribuţia exponenţială joacă un rol important în teoria fiabilităţii, în multe cazuri, intervalul de timp dintre două defecţiuni ale unui sistem fiind o astfel de variabilă aleatoare.

2.5 Fiabilitate

Teoria fiabilităţii are ca scop principal determinarea legilor de apariţie a defecţiunilor sistemelor, echipamentelor. In sensul cel mai larg, fiabilitatea unui sistem reprezintă proprietatea acestuia de a-şi îndeplini funcţiile specifice cu anumite performanţe şi fără defecţiuni, într-un anumit interval de timp şi în condiţii de exploatare date.

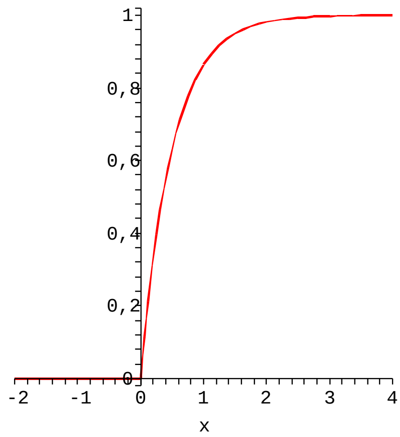


Figura 2.12: Funcţia de repartiţie exponenţială

Să considerăm momentul iniţial de timp, momentul în care un anumit element, sistem este pus în stare de funcţionare. Dacă notăm cu T variabila aleatoare ce reprezintă timpul de funcţionare până la prima defectare, definim **funcţia de fiabilitate** (funcţia de siguranţă) prin

$$R(t) = P\{T > t\} = 1 - F(t),\ t \geqslant 0 \tag{2.67}$$

Din proprietăţile generale ale funcţiilor de repartiţie le deducem, cu uşurinţă, pe cele ale funcţiei de fiabilitate:

- $R(0) = 1$,
- $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = 0$,
- $t_1 < t_2 \Rightarrow R(t_1) > R(t_2)$
- $f(t) = -R'(t)$
- $R(t) = \displaystyle\int_t^{\infty} f(s)ds$,

unde am notat f densitatea de probabilitate a variabilei T.

Să admitem că există o funcţie r cu proprietatea că $r(t) \cdot \Delta t$ reprezintă probabilitatea ca în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ să apară prima defecţiune (considerând că până la momentul t, dispozitivul a funcţionat). Această funcţie se numeşte **rată de defectare** şi este legată de funcţia de fiabilitate prin relaţia:

$$r(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \tag{2.68}$$

Intr-adevăr, din definiţia probabilităţii condiţionate avem:

$$r(t) \cdot \Delta t = P(\{t \leqslant T < t + \Delta t\} | \{T \geqslant t\}) = \frac{P\{t \leqslant T < t + \Delta t\}}{P\{T \geqslant t\}} =$$

$$= \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)} = -\frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{R(t)}.$$

Impărţim ultima relaţie prin Δt şi trecem la limită pentru $\Delta t \to 0$ găsim relaţia (2.68). Rezolvând acestă ecuaţie diferenţială, cu condiţia iniţială $R(0) = 1$ găsim soluţia:

$$R(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}. \tag{2.69}$$

Exemplul 2.5.1 *Dacă rata de defectare este constantă $r(t) = \lambda$ atunci funcţia de fiabilitate este $R(t) = e^{\lambda t}$ iar funcţia de repartiţie este $F(t) = 1 - e^{\lambda t}$, $t > 0$, adică durata de viaţă este o distribuţie exponenţială cu parametrul λ.*

■

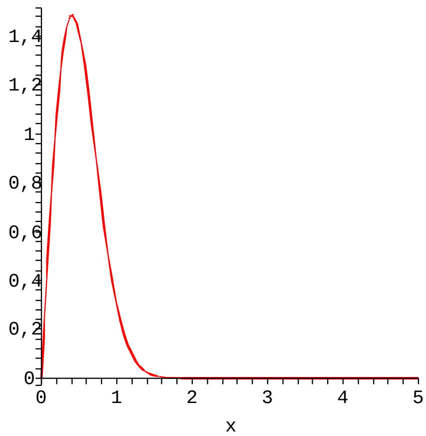


Figura 2.13: Repartiţia Weibull

Exemplul 2.5.2 *O lege de probabilitate care apare frecvent în teoria fiabilităţii este* **repartiţia Weibull**. *Densitatea ei de probabilitate este:*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^\alpha} & \text{dacă } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{dacă } t < 0, \end{cases} \tag{2.70}$$

$\lambda, \alpha \in \mathbb{R}_+$ şi este reprezentată în figura (2.13).
Funcţia de fiabilitate este:

$$R(t) = e^{-\lambda t^\alpha},$$

iar rata de defectare este:

$$r(t) = \lambda\alpha t^{\alpha-1}.$$

Dacă $\alpha = 1$, regăsim repartiţia exponenţială, iar pentru $\alpha = 2$ obţinem repartiţia **Rayleigh**.

Dacă rata de defectare este proporţională cu timpul $r(t) = \lambda t,\ \lambda > 0$, atunci $R(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t^2}$ şi deci suntem în cazul repartiţiei Weibull cu parametrii $\frac{\lambda}{2}$ şi $\alpha = 2$. ■

Exemplul 2.5.3 Legare în serie. *Să determinăm siguranţa sistemelor cu elementele legate în serie. Spunem că un dispozitiv are n componente legate în serie, dacă defectarea uneia, atrage nefuncţionarea întregului sistem.*

Presupunem că fiecare componentă $C_i, i = 1, \ldots n$, se poate defecta indiferent de celelalte, cu rata de defectare r_i şi funcţia de fiabilitate R_i. Dacă T, respectiv $T_i, i = 1, \ldots, n$ semnifică timpul de funcţionare până la prima defectare a sistemului, respectiv a componentei C_i, atunci evident

$$\{T \geqslant t\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{T_i \geqslant t\}$$

şi aplicând probabilitatea pentru evenimente independente găsim

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} r_i(s)ds} =$$

$$= e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} r_i(s)ds}.$$

Deci rata de defectare este

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t).$$

Observăm că $T = \min\{T_1, \ldots, T_n\}$.

■

Exemplul 2.5.4 Legare în paralel. *In cazul sistemelor legate în paralel , acesta poate funcţiona, chiar dacă una din componente se defectează. Să determinăm funcţia de fiabilitate.*

Sistemul nu funcţionează dacă fiecare din componente nu funcţionează; presupunem că acestea se pot defecta independent una de alta. Atunci obţinem

$$\{T < t\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{T_i < t\}$$

şi dacă aplicăm probabilitatea

$$1 - R(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)).$$

Observăm că $T = \max\{T_1, \ldots, T_n\}$. În acest caz nu putem găsi o expresie simplă a ratei de defectare a sistemului.

■

În practică aceste moduri de alcătuire apar combinat.

2.6 Probleme propuse

1. Arătaţi că următoarele funcţii sunt densităţi de probabilitate:

   a. **variabila aleatoare Gama**

   $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \;\; x \geqslant 0, \; \alpha > 0, \; \lambda > 0;$

   b. **variabila aleatoare Erlang**

   $f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, \;\; x > 0;$

c. **variabila aleatoare ”hi pătrat”**

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geqslant 0, \ \ n \in \mathbb{N};$$

d. **variabila aleatoare Rayleigh**

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \ r > 0, \ \sigma > 0;$$

e. **variabila aleatoare Cauchy**

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}, x \in \mathbb{R}, \ \alpha > 0;$$

f. **variabila aleatoare Laplace**

$$f(x) = \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x|}, \ x \in \mathbb{R}, \mu > 0;$$

g. **variabila aleatoare Weibull**

$$f(t) = \lambda\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}}, \ t \geqslant 0, \lambda > 0, \ \alpha > 0;$$

h. **variabila aleatoare Beta**

$$f(x) = \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{B(m,n)} \quad x \in [0,1], m > 0, \ n > 0;$$

i. **variabila aleatoare Student**

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

j. **variabila aleatoare Snedecor**

$$f(x) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, \quad x \geqslant 0.$$

2. Dacă efectuăm măsurători de precizie, iar rezultatul este cuprins între k şi $k+1$ unităţi, convenind să-l aproximăm cu $k + 1/2$, comitem o eroare care poate fi presupusă uniform distribuită pe intervalul $(-1/2, 1/2)$. Cu ce probabilitate facem o eroare mai mare ca 1/4 ?

3. Variabila aleatoare X este distribuită uniform pe (-1,1). Determinaţi densităţile de probabilitate, mediile şi dispersiile variabilelor:

   1. $Y = 2X + 1$

   2. $Z = 2X^2 + 1$.

4. Durata de funcţionare a unei baterii este o variabilă aleatoare, notată X, repartizată normal $N(m, \sigma^2)$, unde $m = 120$ zile reprezintă timpul mediu de funcţionare, iar $\sigma = 10$ zile reprezintă abaterea faţă de medie . Determinaţi

a. probabilitatea ca bateria să funcţioneze cel puţin 100 de zile;

b. probabilitatea ca bateria să funcţioneze între 100 şi 150 de zile;

c. intervalul de timp în care se poate presupune că bateria funcţionează aproape sigur.

5. Viteza unei particule după o direcţie este o variabilă aleatoare distribuită $V : N(0, \sigma^2)$. Determinaţi densitatea de probabilitate a energiei cinetice $K = \dfrac{mV^2}{2}$.

6. Determinaţi parametrii variabilei $X : N(m, \sigma^2)$, ştiind că în 15 % din cazuri X nu a depăşit valoarea 30, iar în 5 % din cazuri X a fost mai mică dacât 20.

7. Un canal de comunicaţie acceptă un voltaj pozitiv V la intrare şi la ieşire voltajul $Y = \alpha V + N$, unde $\alpha = 0,01$, iar N este o variabilă normală $N(0, 4)$. Ce valoare trebuie să aibă V astfel ca $P\{Y < 0\} = 10^{-6}$ (voltajul la ieşire să fie pozitiv aproape sigur).

8. Un semnal electric binar este transmis între A şi B, astfel: dacă vrem să comunicăm 1 emitem un semnal de intensitate 2 , dacă vrem să comunicăm 0 emitem un semnal de intensitate -2. Datorită perturbaţiilor, valoarea înregistrată în B este $R = X + N$, unde $X = \pm 2$, iar N este o variabilă aleatoare cu parametrii $(0, \sigma^2)$. Decodajul se face astfel: dacă $R \geqslant 0,5$, se interpretează 1 , dacă $R < 0,5$, se interpretează 0. Calculaţi probabilitatea de a face erori.

9. Fie X o variabilă aleatoare discretă care are distribuţia

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots n$$

şi Y o variabilă aleatoare continuă care are densitatea de probabilitate $f(x)$. Să determinăm densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X + Y$, dacă X, Y sunt independente.

10. O variabilă aleatoare continuă are densitatea de probabilitate $f_1(x)$ cu probabilitatea p_1 şi densitatea de probabilitate $f_2(x)$ cu probabilitatea p_2, cu $p_1 + p_2 = 1$. Găsiţi expresia densităţii de probabilitate şi a funcţiei de repartiţie a variabilei X.

11. O variabilă aleatoare $X : N(m, \sigma^2)$ poate avea parametrii $m = 2, \sigma = 2$ cu probabilitatea 0,4 sau $m = 2, \sigma = 1$ cu probabilitatea 0,6. Determinaţi densitatea de probabilitate.

12. Timpul de aşteptare a unui client la o coadă este 0, dacă sistemul este inactiv şi este distribuit exponenţial cu parametrul λ, în caz contrar. Probabilităţile de a găsi sistemul inactiv sau ocupat sunt $p, 1-p$. Găsiţi funcţia de repartiţie a timpului de aşteptare T.

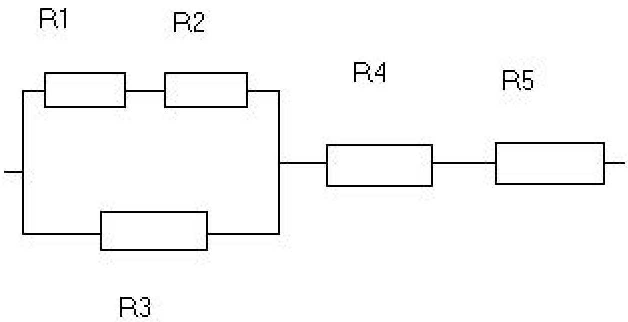
13. Un sistem este format din 4 componente ce funcţionează independent şi au densitatea timpului de funcţionare până la prima defectare de tip Weibull. Sistemul funcţionează în următoarele două situaţii

    - componenta 1 si oricare dintre 3 şi 4 funcţonează

    -componenta 2 şi oricare dintre 3 şi 4 funcţioneză

    Determinaţi funcţia de fiabilitate a sistemului.

14. Aceeaşi problemă pentru sistemul alăturat, ale cărui componente au rata de defectare constantă.



15. Fie T variabila aleatoare care dă timpul de funcţionare până la prima defectare. Să determinăm $F(x \mid \{T \geqslant t\})$ şi $f(x \mid \{T \geqslant t\})$ (dispozitivul să funcţioneze până la momentul x, dacă a funcţionat până la momentul t).

16. Se produc circuite integrate a căror durată de viaţă urmează o lege exponenţială:

    1. circuite în stare de funcţionare cu rata de defectare α

    2. circuite rebut cu rata de defectare 1000α.

    Probabilitatea de a alege un rebut este $p \in (0,1)$. Găsiţi probabilitatea ca alegând la întâmplare un circuit, acesta să funcţioneze după t secunde. Fiecare dispozitiv este testat t secunde, iar cele care nu se defectează sunt trimise la consumatori. Găsiţi timpul t, astfel ca în proporţie de 99 % dispozitivele să fie în stare de funcţionare.

17. Fie $\alpha, a > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi a şi α astfel ca funcţia

$$f_n(x) = ax^n e^{-\alpha^2 x^2}, \ \ x > 0$$

să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă aleatoare cu media m.

18. Se dau densităiţile de probabilitate:

a. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{în rest;} \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dacă } |x| < 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$

Să se calculeze pentru fiecare densitate valoarea medie şi dispersia.

19. Fie X o variabilă aleatoare a cărei densitate de probabilitate este:

$$f(x) = \begin{cases} c \ln\left(\dfrac{a}{x}\right) & \text{dacă } 0 < x < a \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Să se determine constanta c şi să se calculeze valoarea medie şi dispersia variabilei X.

20. Să se determine funcţia caracteristică a variabilei aleatoare X care are densitatea de probabilitate:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{|x|}{2}\right) & \text{dacă } |x| \leqslant 2 \\ 0 & \text{dacă } |x| > 2. \end{cases}$$

21. Să se afle densitatea de probabilitate corespunzătoare funcţiei caracteristice:

$$\varphi(t) = e^{|t|}.$$

22. Timpul mediu de răspuns al unui calculator este 15 secunde, abaterea medie pătratică de 3 secunde şi facem ipoteza că acesta este modelat de o variabilă aleatoare normal distribuită. Estimaţi probabilitatea ca timpul să se abată cu mai mult de 5 secunde faţă de medie. Dar dacă variabila este oarecare ?

23. O eroare de măsurare printr-o metodă este $T = 2X$, unde $X : N(0,5)$. Prin altă metodă, eroarea este $Z = U_1 + U_2$ unde $U_i : N(0,5), \ i = \overline{1,2}$ sunt independente. Care metodă este de preferat ? (Evaluaţi dispersiile).

24. Aflaţi modul şi mediana variabilei aleatoare X care are densitatea

$$f(x) = \frac{ak(x-x_0)^{a-1}}{(1+k(x-x_0)^a)^2}, \quad x \geqslant x_0,\ k>0,\ a>1.$$

25. Modulul vectorului viteză a unei particule este o variabilă aleatoare repartizată după legea Maxwell

$$f(v) = \frac{4h^2}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2v^2}, \ \ v>0.$$

Aflaţi media şi dispersia vitezei.

26. N mesaje sunt trimise printr-un canal de comunicaţie. Lungimile lor sunt aleatoare, dar au media m, iar dispersia σ^2. Găsiţi media timpului total T necesar transmiterii celor N mesaje; dacă acestea sunt transmise independent, aflaţi dispersia; aceeaşi problemă dacă mesajele nu sunt independente şi se cunosc $Cov(T_i, T_j),\ i,j = 1\ldots N$.

27. Un voltmetru înregistrează cea mai mare dintre două tensiuni, V_1, V_2. Variabilele aleatoare V_1, V_2 sunt independente şi au aceeaşi densitate $f(v)$. Găsiţi media variabilei aleatoare $V = \max\{V_1, V_2\}$.

28. Un mesaj este trimis printr-un canal de comunicaţie într-un cod binar şi acesta constă în n simboluri 0 sau 1. Fiecare este egal probabil şi independent de celelalte. Găsiţi media şi dispersia variabilei aleatoare X care dă numărul de schimbări de simboluri.

29. Repetăm transmiterea unui mesaj, în condiţii identice, până ce acesta este recepţionat corect. Probabilitatea de transmitere corectă este 0,8. Fie X numărul de repetări necesare. Găsiţi media lui X.

30. Variabilele X, Y sunt în relaţia $Y = 2 - 3X$. Calculaţi media, dispersia lui Y, corelaţia şi coeficientul de corelaţie, dacă $m_X = -1,\ D_X^2 = 4$.

31. Variabilele aleatoare X, Y, Z au mediile m_X, m_Y, m_Z şi matricea de covarianţă

$$\begin{pmatrix} D^2(X) & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(X,Y) & D^2(Y) & Cov(Y,Z) \\ Cov(X,Z) & Cov(Y,Z) & D^2(Z) \end{pmatrix}$$

Calculaţi media şi dispersia variabilei aleatoare $U = aX - bY + cZ - d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

32. X, Y sunt variabile aleatoare independente $X : N(1,4)$, $Y : U(0,2)$. Găsiţi $M(X+Y)$, $M(XY)$, $M(X^2)$, $M(X-Y^2)$, $D^2(X+Y)$ şi $D^2(X-Y)$.

33. Determinaţi, folosind metoda celor mai mici pătrate, legătura dintre variabilele X, Y, dacă se cunosc următoarele date

    $(3; 4,1), (4; 3,9), (5; 6,2), (1; 2,1), (2; 3,3), (6; 6,8), (7; 8,2)$.

34. Funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare este $\varphi(t) = e^{10tj-2t^2}$. Găsiţi media şi dispersia.

35. Un voltaj V este constant, dar necunoscut. Fiecare măsurare a lui, X_j , este suma dintre V şi un voltaj "zgomot" N_j cu media $m = 0$, $\sigma = 1$ microvolt. Presupunem N_j independente. Câte măsurători trebuie făcute astfel ca media aritmetică $\bar{X}$ să difere de media teoretică cu mai puţin de $\varepsilon = 1$, cu siguranţa 0,99 ?

36. La o casierie se fac plăţi pentru un anumit serviciu, cu media 80 $ şi abaterea medie pătratică 2 0$. Estimaţi probabilitatea ca primii 100 de clienţi să necesite mai mult de 8400 $.

    b. ca suma să fie între 7800 şi 8400 $.

    c. Câţi clienţi ar necesita în total mai mult de 10000 $, cu siguranţa 0,9 ?

37. Timpul mediu între două evenimente aleatoare ale unui experiment este distribuit exponenţial cu media m. Găsiţi probabilitatea ca evenimentul 1000 să se producă în intervalul $(1000 \pm 50)m$.

38. Într-un service există un stoc de 1600 m cablu de rezervă. Ştiind că zilnic se folosesc în medie 13,33 m, iar $\sigma = 1,2$, cu ce probabilitate această cantitate ajunge 4 luni?

39. Emisia aleatoare de particule este modelată de legea Poisson cu $\lambda = 30$ part./oră. Cu ce probabilitate în 10 minute sunt emise cel mult 20 de particule ?

40. Probabilitatea ca un articol să nu corespundă normelor este $p = 0,2$. Se face o selecţie de n= 400. Presupunând selecţia cu repunere (aceasta se poate presupune dacă volumul total este foarte mare), să se determine probabilitatea ca între 70 şi 100 articole să fie necorespunzătoare.

2.7 Soluţii

1. Se verifică cu usurinţă faptul că funcţiile date satisfac cele două condiţii $f \geqslant 0$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

   i. Prin substituţia $y = \frac{x}{2\sigma^2}$ integrala $\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ se reduce la $2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma(\frac{n}{2})$.

   j. Observăm că din paritatea funcţiei

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

   Facem schimbarea de variabilă $x = \sqrt{n}y$, după care găsim

$$\int_{0}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx = \sqrt{n}\int_{0}^{\infty}(1+y^2)^{-\frac{n+1}{2}}dy.$$

   În ultima integrală substituţia $\frac{y^2}{1+y^2} = t$, ne duce la funcţia Beta. Într-adevăr, $dy = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{2}}dt$, şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{2\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}\sqrt{n}\int_{0}^{1}(1-t)^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{2}}dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}B(\frac{n}{2},1) = 1.$$

2. $P\{|X| > 1/4\} = 1 - \int_{-1/4}^{1/4} dx = 0,5.$

3. 1. Aflăm funcţia de repartiţie a variabilei Y, notată $F_Y(x) =$.

$$P\{Y \leqslant x\} = P\{2X+1 \leqslant x\} = P\left\{X \leqslant \frac{x-1}{2}\right\} = F_X\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

   Prin derivare găsim $f_Y(x) = \frac{1}{2}f_X\left(\frac{x-1}{2}\right)$, adică

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{dacă } -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Media este $M[Y] = 1$ iar dispersia $D^2[Y] = 4/3$.

2. Analog $F_Z(x) = P\{Z \leqslant x\} =$

$$P\{2X^2 + 1 \leqslant x\} = P\left\{ -\left(\frac{x-1}{2}\right)^{1/2} \leqslant X \leqslant \left(\frac{x-1}{2}\right)^{1/2} \right\} =$$

$$= F_X\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)$$

Dacă $x \geqslant 1$. Prin derivare găsim

$$f_Z(x) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{x-1}}\left(f_X(\sqrt{\frac{x-1}{2}}) + f_X(-\sqrt{\frac{x-1}{2}})\right),$$

adică

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{2}{x-1}} & \text{dacă } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

4. Folosind faptul că F este continuă, au loc:

a. $P\{X \geqslant 100\} = 1 - P\{X < 100\} = 1 - F(100) =$
$1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{100-120}{10}\right)\right) = \frac{1}{2} + \Phi(2) = 0,97725;$

b. $P\{100 \leqslant X \leqslant 150\} = \Phi\left(\frac{150-120}{10}\right) - \Phi\left(\frac{100-120}{10}\right) = \Phi(3) +$
$\Phi(2) = 0,9759;$

c. Aplicînd regula celor 3σ, găsim intervalul căutat de forma $|X - m| < 3\sigma$, deci bateria funcţionează aproape sigur între 90 şi 150 zile.

5. $F_K(x) = P\left\{\frac{mV^2}{2} \leqslant x\right\} = P\left\{-\sqrt{\frac{x}{m}} \leqslant V \leqslant \sqrt{\frac{x}{m}}\right\} = F_V\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right) -$
$F_V\left(-\sqrt{\frac{x}{m}}\right)$ pentru $x \geqslant 0$. Prin derivare obţinem densitatea care este un caz particular al repartiţiei ”hi pătrat”.

6. Punem condiţiile $P\{X < 30\} = 0,15,\ \ P\{X < 20\} = 0,05$ care conduc la ecuaţii în m şi σ.

7. Punem condiţia ca $P\{Y < 0\} = 10^{-6}$ şi avem

$$P\{Y < 0\} = P\{\alpha V + N < 0\} = P\{N < -\alpha V\} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\alpha V}{\sigma}\right).$$

   De aici găsim că $V = 950,6$.

8. Probabilitatea de a face erori este dată de $P\{2 + N < 0,5\} + P\{-2 + N \geqslant 0,5\}$.

9. Considerăm sistemul complet de evenimente $A_i = \{X = x_i\},\ i = 1, \ldots n$ şi să exprimăm funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare Z.

$$F_Z(x) = P\{X + Y \leqslant x\} = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(\{X + Y \leqslant x\} \cap A_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P\{Y + x_i \leqslant x\}P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i P\{Y \leqslant x - x_i\}.$$

   Prin derivare găsim

$$f_Z(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_Y(x - x_i).$$

10. Considerăm sistemul complet de evenimente $A_i, i = 1, 2$, unde evenimentul A_i reprezintă faptul că X are densitatea de probabilitate f_i. Atunci funcţia de repartiţie este dată de

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P(A_1)P(\{X \leqslant x\}|A_1) + P(A_2)P(\{X \leqslant x\}|A_2) =$$

$$= p_1F_1(x) + p_2F_2(x).$$

   Funcţia de densitate este atunci

$$f(x) = p_1f_1(x) + p_2f_2(x).$$

11. Folosim problema anterioară. Avem

$$f(x) = \frac{0,4}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{8}} + \frac{0,6}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

12.

$$F(x) = pP(\{T \leqslant x | \text{ sistem inactiv}\}) + (1-p)P(\{T \leqslant x | \text{ sistem activ }\})$$

Apoi

$$P(\{T \leqslant x | \text{ sistem inactiv}\}) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ p + (1-p)(1 - e^{-\lambda x}) & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

13. Să determinăm funcţia de fiabilitate a sistemului. Dispozitivul funcţionează la momentul t, dacă

$$\{T > t\} = (\{T_1 > t\} \cap \{T_3 > t\}) \cup (\{T_1 > t\} \cap \{T_4 > t\}) \cup$$

$$\cup (\{T_2 > t\} \cap \{T_4 > t\}) \cup (\{T_2 > t\} \cap \{T_3 > t\}).$$

Calculăm acum probabilitatea acestei reuniuni, folosind independenţa

$$\begin{gathered} R(t) = R_1(t)R_3(t) + R_1R_4(t) + R_2(t)R_4(t) + R_2(t)R_3(t) - \\ R_1(t)R_3(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t) - R_1(t)R_2(t)R_4(t) - \\ R_2(t)R_3(t)R_4(t) - 2R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) + \\ 4R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t)R_4(t) = \\ 4R_1^2(t) - 4R_1^3(t) + R_1^4(t). \end{gathered}$$

Urmează să înlocuim $R_i(t) = e^{-\lambda t^\alpha},\ i = \overline{1,4}$.

14.

$$R(t) = (R_1(t)R_2(t) + R_3(t) - R_1(t)R_2(t)R_3(t))\, R_4(t)R_5(t),$$

unde $R_i(t) = e^{-\lambda t},\ i = \overline{1,5}$.

15. Observăm că $P\{T \geqslant t\} = 1 - F(t)$, Găsim

$$F(x \mid \{T \geqslant t\}) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(t)}{1 - F(t)} & \text{dacă } x \geqslant t \\ \\ 0 & \text{dacă } x < t. \end{cases}$$

$$f(x \mid \{T \geqslant t\}) = \frac{f(x)}{1 - F(t)} = \frac{f(x)}{\displaystyle\int_t^{+\infty} f(x)dx}, \quad x \geqslant t.$$

16. Fie C ”dispozitivul funţionează după t secunde”, B ”dispozitivul este de tipul 1” şi R ”dispozitivul este de tipul 2”. Din formula probabilităţii totale avem

$$P(C) = P(B)P(C|B) + P(R)P(C|R) = (1-p)e^{-\alpha t} + pe^{-1000\alpha t}.$$

Punem condi ţia ca $P(B|C) \geqslant 0,99$

$$P(B|C) = \frac{P(B)P(C|B)}{P(B)P(C|B) + P(R)P(C|R)}$$

şi găsim $t \geqslant \dfrac{1}{999\alpha} \ln \dfrac{(1-p)99}{p}$.

17. Punem condiţiile

$$\int_0^{+\infty} ax^n e^{-\alpha^2 x^2} dx = 1, \quad \int_0^{+\infty} ax^{n+1} e^{-\alpha^2 x^2} dx = m$$

şi găsim

$$a = \frac{2\alpha^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}, \quad \alpha = \frac{1}{m} \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

18. a. $2/3,\ 1/18$; b. $0,\ 1/2$.

19. Condiţia $\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx = 1$ conduce la $c = a^{-1}$ iar prin calcul direct găsim $M[X] = a/2,\ D^2[X] = a^2/4$.

20.

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) e^{jtx} dx = \frac{1 - \cos 2t}{2t^2} = \frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

21. Din formula de inversiune avem:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)e^{-jtx}\,dt = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\ x \in \mathbb{R}.$$

22. Vom folosi inegalitatea lui Cebâşev. Avem

$$P\{|X-15| \geqslant 5\} \leqslant \frac{9}{25} = 0,36.$$

23. Alegem metoda cu dispersie minimă.

$$D^2[T] = 4D^2[X] = 20,\ D^2[Z] = D^2[U_1] + D^2[U_2] = 10.$$

24. Modul variabilei X este abscisa punctului de maxim a funcţiei f şi acesta se obţine ca soluţie a ecuaţiei $f'(x) = 0$, adică:

$$x_{max} = x_0 + \left(\frac{a-1}{(a+1)^k}\right)^{1/a}.$$

Mediana este soluţia ecuaţiei $F(x) = \frac{1}{2}$ adică:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Se obţine $x_{med} = x_0 + k^{-1/a}$.

25.

$$M[V] = \frac{4h^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} v^3 e^{-h^2v^2}\,dv.$$

Substituţia $h^2v^2 = t$ urmată de o integrare prin părţi conduce la $M[V] = \frac{2}{\sqrt{\pi}h^2}$. Momentul iniţial de ordin 2 este:

$$M[V^2] = \frac{4h^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} v^4 e^{-h^2v^2}\,dv.$$

Utilizând aceeaşi substituţie ca mai sus obţinem

$$M[V^2] = \frac{2}{\sqrt{\pi}h^3}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2h^3}.$$

Apoi $D^2[V] = M[V^2] - (M[V])^2$.

26. $M(T) = Nm,\ D^2(T) = N\sigma^2.$

27. $m = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 dv_1 \int_{-\infty}^{v_1} f(v_2)dv_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} v_2 f(v_2)dv_2 \int_{-\infty}^{v_2} f(v_1)dx_1.$

28. Sunt posibile $n-1$ schimbări; media este $(n-1)p$.

29. Media variabilei geometrice.

30. $M[Y] = M[2-3X] = 2-3(-1) = 5;\ D^2[Y] = (-3)^2 4 = 36$. Din $M[X^2] = D^2[X] + M^2[X]$, deducem $M[X^2] = 5$ iar apoi $Cov[X,Y] = M[X(2-3X]) + 1 \times 5 = -12; \rho[X,Y] = \dfrac{-12}{D[X]D[Y]} = -1.$

31. $M[U] = a\ m_x - b\ m_y + c\ m_z - d$, $D^2[U] = a^2\ D^2[X] + b^2\ D^2[Y] + c^2\ D^2[Z] - 2\ a\ b\ Cov[X,Y] + 2\ a\ c\ Cov[X,Z] - 2\ b\ c\ Cov[Y,Z]$.

32. $M[X+Y] = 2,\ M[XY] = M[X]M[Y] = 1,\ M[X^2] = 5,\ M[X-Y^2] = -\dfrac{1}{3},\ D^2[(X+Y)] = D^2[(X-Y)] = \dfrac{13}{3}.$

33.

x_i	3	4	5	1	2	6	7
y_i	4,1	3,9	6,2	2,1	3,3	6,8	8,2

Alegând legătura de forma $Y = aX + b$, parametrii a, b se determină din condiţia ca funcţia $Q(a,b) = \sum_{i=1}^{7}(y_i - ax_i - b)^2$ să admită un minim. Obţinem:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2};\ \ b = \bar{y} - a\bar{x},$$

unde $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}$ şi $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} y_i}{7}$.

34. $m = \dfrac{\varphi'(0)}{j} = 10,\ M[X^2] = \dfrac{\varphi''(0)}{j^2}$ iar dispersia $D^2 = M[X^2] - m^2 = 4.$

35. Fiecare măsurătoare X_j are v şi dispersia 1, astfel încât folosind legea numerelor mari obţinem:

$$1-\frac{1}{n\varepsilon^2}=1-\frac{1}{n}\geqslant 0,99.$$

Aceasta implică $n = 100$. Astfel dacă repetăm măsurătorarea de 100 de ori şi calculăm media în mod normal în 99% din situaţii media obţinută va diferi cu cel mult 1 microvolt de valoarea exactă.

36. Fie X_i plata aleatoare pentru clientul i.

a. $P\{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i > 8400\} = P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i - 100\times 80}{\sqrt{100\times 400}} > \frac{8400-8000}{10\times 20}\right\} =$

$$= 1 - F(2) = 1-(1/2+\Phi(2)) = 1/2-\Phi(2).$$

b. $P\left\{7800 < \sum\limits_{i=1}^{100} X_i < 8400\right\} = \Phi(2)+\Phi(1).$

c. Determinăm n din condiţia

$$1-F\left(\frac{10000-n\times 80}{\sqrt{n\times 400}}\right)=0,1.$$

37. Fie X_i timpul dintre evenimente, atunci $X = \sum X_i$ are media $n\times m$ şi dispersia $n\times\sigma^2$. Avem

$$P\{950m\leqslant X\leqslant 1050m\}=$$

$$P\left\{\frac{950m-1000m}{m\sqrt{1000}}\leqslant\frac{X-M(X)}{D(X)}\leqslant\frac{1050m-1000m}{m\sqrt{1000}}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$$

38. Notăm cu X_i variabila aleatoare care ia ca valori consumul zilei $i, i = \overline{1,120}$. Avem

$$M[X_i]=13,33,\quad D[X_i]=1,2.$$

În 120 de zile se consumă $X = \sum_{i-1}^{120} X_i$. Ne aflăm în cazul general în care nu se cunoaşte repartiţia variabilei aleatoare X_i. Să determinăm probabilitatea $P\{X < 1660\}$.

$$M[X] = nm = 120 \times 13,33 = 1599,6, \quad D[X] = \sqrt{n\sigma^2} = \sqrt{n}\sigma = 13,1,$$

$$P\{X < 1660\} = P\left\{\frac{X - 1599,6}{13,1} < \frac{1660 - 1599,6}{13,1}\right\} =$$

$$0,5 + \Phi(4,6) = 0,999.$$

39. Notăm $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$, unde X_i sunt variabile aleatoare repartizate Poisson şi independente. Din condiţiile

$$\lambda = M[X] = \sum_{i=1}^{10} M[X_i] = nM[X_i]$$

şi deci $M[X_i] = \dfrac{\lambda}{n}$ şi

$$\lambda = D^2[X] = \sum_{i=1}^{10} D^2[X_i] = nD^2[X_i],$$

adică $D^2[X_i] = \dfrac{\lambda}{n}$, unde λ este parametrul repartiţiei Poisson ce trebuie determinat din condiţia $\lambda = 30\dfrac{1}{6} = 5$ particule/10 minute.

$$P\{X \leqslant 10\}) = P\left\{\frac{X - n\frac{\lambda}{n}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \leqslant \frac{10 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right\} =$$
$$= 0,5 + \Phi\left(\frac{10 - 5}{\sqrt{5}}\right) = 0,98713.$$

40. Aplicăm Moivre-Laplace cu $m = 400 \times 0,2$, $\sigma = \sqrt{400 \times 0,2 \times 0,8}$.

Capitolul 3

Variabile aleatoare multidimensionale

3.1 Variabile aleatoare bidimensionale

Variabilă aleatoare bidimensională este o funcţie

$$(X, Y) : E \to \mathbb{R}^2$$

unde X, Y sunt variabile aleatoare pe un câmp de probabilitate $(E, \mathcal{K}, P)$.

Variabile discrete

Repartiţia unei variabile discrete este tabelul

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
X/Y & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\
\hline
x_1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\
x_2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_m & p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \\
\hline
\end{array} \tag{3.1}$$

unde

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \;\; i = 1, \cdots, m, \;\; j = 1, \cdots, n. \tag{3.2}$$

O variabilă aleatoare mai poate fi scrisă sub forma

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{x-x_i} \delta_{y-y_j} \tag{3.3}$$

unde δ reprezintă distribuţia Dirac. Prin definiţie distribuţia Dirac este definită prin

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x),$$

pentru orice funcţie test (derivabilă de o infinitate de ori şi cu suport compact).

Probabilităţi marginale sunt date de

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \tag{3.4}$$

Variabile marginale sunt variabilele X şi Y cu repartiţiile

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_{i\cdot} \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ p_{\cdot j} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Variabilele X, Y sunt **independente** dacă

$$p_{ij} = p_{\cdot j} \times p_{i\cdot} \tag{3.6}$$

Exemplul 3.1.1 ***Variabila binomială bidimensională***. *Într-un experiment evenimentul A se poate produce cu probabilitatea p_1, B cu probabilitatea p_2 iar $A \cap B$ cu probabilitatea p_{11}. Să determinăm probabilitatea ca în n experimente A să se producă de k ori, iar B de l ori ($k + l \leqslant n$).*

Fie $q_i = 1 - p_i,\ i = 1, 2$. Se obţine variabila bidimensională

	B	$\overline{B}$	
A	p_{11}	p_{10}	p_1
$\overline{A}$	p_{01}	p_{00}	q_1
	p_2	q_2	

Repetând experimentul de n ori, evenimentul $A \cap B$ se poate produce de i ori, $1 \leqslant i \leqslant \min(k, l)$, iar $\overline{A} \cap \overline{B}$ de $n - (k + l - i)$ ori. Pentru i fixat, ne plasăm în cazul schemei lui Bernoulli polinomială şi dacă i variază, obţinem

$$\sum_{i=1}^{\min(k,l)} \frac{n!}{i!(k-i)!(l-i)!(n-k-l+i)!} p_{11}^{i} p_{10}^{k-i} p_{01}^{l-i} p_{00}^{n+i-k-l}$$

■

Exemplul 3.1.2 *Într-un depozit se aduc articole produse la 3 firme, în număr de 2000, 1800 şi 1200 respectiv. Ştiind că cele trei firme produc 0,2%, 1% respectiv 0,5% rebut determinaţi repartiţia variabile aleatoare bidimensionale (X, Y) unde X reprezintă firma, iar Y calitatea de a fi articol corespunzator, respectiv rebut. Să determinăm variabilele marginale şi să studiem independenţa lor.*

Notăm cu X numărul firmei; X ia valorile 1, 2,3. Variabila Y ia valoarea 0, dacă articolul este rebut şi 1 dacă este corespunzător. Repartiţia variabilei bidimensionale este

X/Y	0	1	
1	0,0008	0,3992	0,4
2	0,0036	0,3564	0,36
3	0,0012	0,2388	0,24
	0,0056	0,9944	1

Variabilele marginale X şi Y sunt

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2000/5000 & 1800/5000 & 1200/5000 \end{pmatrix}$$

şi

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 28/5000 & 4792/5000 \end{pmatrix}$$

şi nu sunt independente, deoarece nu are loc condiţia (3.6). Acest lucru poate fi constatat din faptul că proprietatea de a fi rebut de exemplu, depinde de firma de la care s-a ales produsul.

■

Exemplul 3.1.3 *Variabilele aleatoare X şi Y sunt independente şi au distribuţiile*

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Care este distribuţia variabilei aleatoare (X, Y) ?

Variabila bidimensionala are ca valori produsele valorilor celor două variabile, iar datorită independenţei probabilităţile se înmulţesc, deci se obţine repartiţia

$$\begin{pmatrix} 0,3 \times 0,4 & 0,3 \times 0,6 \\ 0,1 \times 0,4 & 0,1 \times 0,6 \\ 0,6 \times 0.4 & 0,6 \times 0,6 \end{pmatrix}.$$

■

Exemplul 3.1.4 *O variabilă aleatoare are densitatea*

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{3}\delta_x\delta_{y-1} + \frac{1}{3}\delta_{x-1}\delta_y + \frac{1}{3}\delta_{x-1}\delta_{y-1}$$

1. Calculaţi $F_{XY}(0,5,\ 1,5)$.
2. Sunt X *şi* Y *independente ?*
3. Calculaţi $M[X],\ M[Y],\ M[XY]$.

Forma sub care este dată $f_{XY}(x,y)$ semnifică faptul că este 0 cu excepţia punctelor $(0,1), (1,0), (1,1)$, iar în aceste puncte funcţia are un salt la infnit. Variabila are repartiţia

X/Y	0	1	
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

iar variabilele marginale sunt

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Se observă că X şi Y nu sunt independente. Avem

$$M[X] = M[Y] = \frac{2}{3}, \quad M[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = \frac{1}{3}.$$

Valoarea funcţiei de repartiţie este

$$F(0,5,\ 1,5) = P\{X \leqslant 0,5, Y \leqslant 1,5\} = \frac{1}{3}.$$

■

Exemplul 3.1.5 *Fie X respectiv Y numere aleatoare de fotoelectroni care se înregistrează la două fotodetectoare. Arătaţi că probabilităţile de a obţine k foto-electroni de la primul fotodetector, respectiv m de la al doilea, sunt date de*

$$P(X=k, Y=m) = (1-p_1)(1-p_2)p_1^k p_2^m,$$

unde $k, m \in \mathbb{N}, p_1, p_2 \in (0,1)$.

Modelarea se face cu ajutorul seriei geometrice şi anume

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(1-p_1)(1-p_2)p_1^k p_2^m = (1-p_1)\frac{1}{1-p_1}(1-p_2)\frac{1}{1-p_2} = 1.$$

Variabilele marginale sunt definite de probabilităţile

$$P\{X=k\} = \sum_{m=0}^{\infty}(1-p_1)(1-p_2)p_1^k p_2^m = (1-p_1)p_1^k$$

$$P\{X=m\} = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p_1)(1-p_2)p_1^k p_2^m = (1-p_2)p_2^m$$

care se observă a fi variabilele geometrice unidimensionale.
Observăm că variabilele sunt independente. Pentru ultimul calculul

$$P\{X+Y<p\} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{m=0}^{p-k}(1-p_1)(1-p_2)p_1^k p_2^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}(1-p_1)p_1^k(1-p_2^{p-k+1}) = 1-p_1^{p+1}-(1-p_1)p_2^{p+1}\sum_{k=0}^{p}(\frac{p_1}{p_2})^k =$$

$$= 1-p_1^{p+1}-(1-p_1)p_2^{p+1}\left(\frac{1-(\frac{p_1}{p_2})^{p+1}}{1-(\frac{p_1}{p_2})}\right) =$$

$$= 1-\left(\frac{1-p_1}{p_2-p_1}\right)p_2^{p+2}+\left(\frac{1-p_2}{p_2-p_1}\right)p_1^{p+2}.$$

definesc o variabilă bidimensională. Determinaţi variabilele marginale şi calculaţi în ipoteza $p_1 \neq p_2$,

$$P\{X+Y \leqslant p\}, \;\; p \in \mathbb{N}.$$

■

Exemplul 3.1.6 *În cazul problemei de mai sus, aflaţi repartiţia variabile* (X, Y), *condiţionată de faptul că* $\{X + Y \leqslant p\}$.

Aplicăm definiţia probabilităţilor condiţionate şi obţinem următoarea formulă.

$$P\{X = k, Y = m\,|X + Y \leqslant p\} =$$
$$\begin{cases} \dfrac{(1-p_1)(1-p_2)p_1^k p_2^m}{1-\left(\frac{1-p_1}{p_2-p_1}\right)p_2^{p+2}+\left(\frac{1-p_2}{p_2-p_1}\right)p_1^{p+2}} & k+m \leqslant p,\ \ k \geqslant 0,\ \ m \geqslant 0 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

■

Variabile aleatoare continue

Funcţia de repartiţie este

$$F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} \tag{3.7}$$

iar **densitatea de probabilitate** este definită $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, cu proprietatea

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv. \tag{3.8}$$

Are loc

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \tag{3.9}$$

eventual în sensul teoriei distribuţiilor. Densitatea de probabilitate este caracterizată de condiţia

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1. \tag{3.10}$$

Vom mai nota densitatea de probabilitate $f(x, y) = f_{XY}(x, y)$.

Funcţiile de repartiţie marginală sunt date de

$$F_Y(x) = P\{X < \infty, Y \leqslant y\} = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)dudv \tag{3.11}$$

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x, Y < \infty\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)dudv. \tag{3.12}$$

Densităţile marginale sunt date de

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv = F'_X(x) \tag{3.13}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)du = F'_Y(y). \tag{3.14}$$

X, Y sunt **independente** dacă

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y). \tag{3.15}$$

Condiţia (3.15) este echivalentă cu

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y). \tag{3.16}$$

Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ are loc următoarea formulă

$$P\{(X,Y) \in D\} = \int\int_D f(x,y)dxdy. \tag{3.17}$$

Exemplul 3.1.7 *Determinaţi A astfel ca funcţia*

$$f(x,y) = \begin{cases} A(x+y) & 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \textit{în rest} \end{cases}$$

să fie o densitate de probabilitate bidimensională (X,Y). Determinaţi variabilele marginale şi studiaţi independenţa lor. Calculaţi $P\{|X-Y|>1\}$.

Pentru a fi densitate trebuie să avem $A > 0$ şi din condiţia

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$$

găsim $A = \frac{1}{8}$.
Variabilele marginale sunt

$$f_X(x) = \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)dy = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1) & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y)dx = \begin{cases} \frac{1}{4}(y+1) & 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

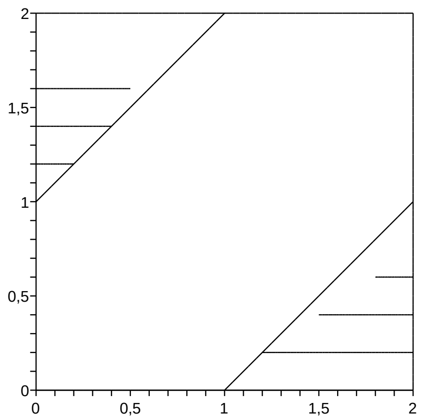


Figura 3.1: Domeniul D

Probabilitatea $P\{|X - Y| > 1\}$ este dată de integrala lui $f(x, y)$ pe domeniul $D = \{|x - y| > 1\}$, care reprezintă interioarele celor două triunghiuri din figura (3.1).

$$P\{|X - Y| > 1\} = 2 \int_0^2 \int_0^{x-1} f(x, y) dy dx = \frac{1}{4}.$$

Observăm că $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, deci variabilele nu sunt independente.

■

3.2 Densităţi condiţionate

Dacă variabila aleatoare (X, Y) are densitatea f_{XY}, densitatea de probabilitate condiţionată de faptul că (X, Y) ia valori în mulţimea $D \subset \mathbb{R}^2$ este

$$f_{XY}(x, y \mid (X, Y) \in D) = \begin{cases} 0 & (x, y) \notin D \\ \dfrac{f_{XY}(x, y)}{\int\int_D f_{XY}(x, y) dx dy} & (x, y) \in D \end{cases} \tag{3.18}$$

Densităţile marginale condiţionate sunt date de

$$f_X(x \mid (X, Y) \in D)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y \mid (X, Y) \in D) dy \tag{3.19}$$

$$f_Y(y \mid (X,Y) \in D)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y \mid (X,Y) \in D) dx \tag{3.20}$$

Exemplul 3.2.1 *Fie variabila bidimensională (X,Y) cu repartiţia*

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Să determinăm repartiţia condiţionată

$$f_{XY}(x, y \mid X^2 + Y^2 < b^2).$$

Evenimentul care condiţionează are probabilitatea

$$P\{X^2 + Y^2 < b^2\} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\int_{x^2+y^2<b^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy.$$

Prin trecere la coordonate polare se obţine

$$P\{X^2 + Y^2 < b^2\} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^b r dr \int_0^{2\pi} e^{-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}} d\theta = 1 - e^{-\dfrac{b^2}{2\sigma^2}}$$

Deci densitatea căutată este dacă folosim formula (3.18)

$$f_{X,Y}(x, y \mid X^2 + Y^2 < b^2) = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 \geqslant b^2 \\ \dfrac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \left(1 - e^{-\frac{b^2}{2\sigma^2}}\right), & x^2 + y^2 < b^2 \end{cases}$$

■

Densităţi marginale condiţionate

$$f_X(x \mid \{Y = y\}) = f_X(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x', y) dx'} \tag{3.21}$$

$$f_Y(y \mid \{X = x\}) = f_Y(y \mid x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y') dy'} \tag{3.22}$$

Repartiţiile marginale condiţionate

$$F_X(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x' \mid y)dx' \tag{3.23}$$

$$F_Y(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y' \mid x)dy' \tag{3.24}$$

Formula lui Bayes

$$f_Y(y \mid x) = \frac{f_X(x \mid y) f_Y(y)}{f_X(x)} \tag{3.25}$$

Exemplul 3.2.2 *Variabila aleatoare* (X, Y) *are densitatea*

$$f_{XY} = 6(1 - x - y), \;\; (x, y) \in D$$

unde D *este interiorul triunghiului din figura (3.2). Determinaţi funcţia de repartiţie a variabilei, variabilele marginale, densităţile condiţionate* $f_Y(x|y),\; f_X(y|x)$ *şi funcţia* $F_Y(y|x)$.

Funcţia de repartiţie este pentru $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < x + y < 1 \end{cases}$

$$F_{XY}(x, y) = 6\int_0^x dx' \int_0^y (1 - x' - y')dy'.$$

Dacă $\begin{cases} 0 < y < 1 \\ 1 - y \leqslant x < 1 \end{cases}$ funcţia este

$$F_{XY}(x, y) = 6\int_0^{1-x} dy' \int_0^x (1 - x' - y')dx' + 6\int_{1-x}^{y} dy' \int_0^{1-y'} (1 - x' - y')dx'.$$

Dacă $\begin{cases} x > 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ atunci

$$F_{XY}(x, y) = 6\int_0^y dy' \int_0^{1-y'} (1 - x' - y')dx'$$

iar pentru $\begin{cases} y > 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$ avem

$$F_{XY}(x, y) = 6\int_0^x dx' \int_0^{1-x'} (1 - x' - y')dy'.$$

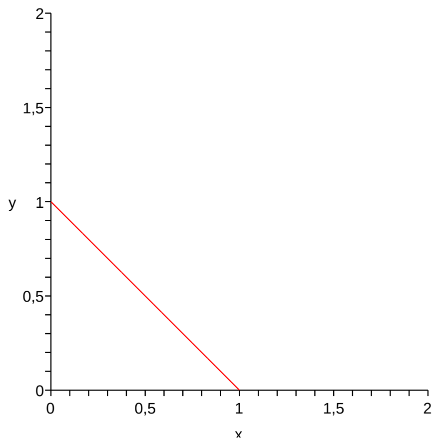


Figura 3.2: Domeniul D

Dacă $x > 1, y > 1$ atunci $F_{XY}(x,y) = 1$
Variabilele marginale sunt

$$f_X(x) = \begin{cases} 6\displaystyle\int_0^{1-x}(1-x-y)dy = 3(1-x)^2 & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & x < 0, x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3(1-y)^2 & 0 \leqslant y < 1 \\ 0 & y < 0, y \geqslant 1 \end{cases} .$$

Se observă ca variabilele marginale nu sunt independente.
Variabilele marginale condiţionate sunt

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2(1-x-y)}{(1-x)^2} & 0 < y < 1-x \\ 0 & y < 0, y > 1-x \end{cases}$$

$$f_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2(1-x-y)}{(1-y)^2} & 0 < x < 1-y \\ 0 & x < 0, x < 1-y \end{cases} .$$

Funcţia de repartiţie condiţionată $F_Y(y|x)$ este

$$F_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^2}\displaystyle\int_0^y (1-x-y')dy' & 0 < y < 1-x \\ 0 & y < 0 \\ 1 & y > 1-x \end{cases}$$

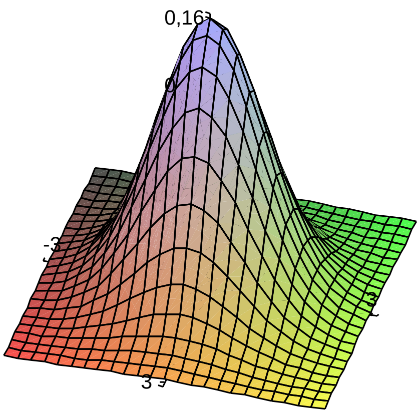


Figura 3.3: Variabila normala bidimensională

■

Exemplul 3.2.3 ***Variabila normală bidimensională*** *Fie funcţia*

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}$$

$$e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)((y-m_y))}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)},$$

(figura (3.3)), unde r este coeficientul de corelaţie al variabilelor X, Y. Să determinăm densităţile variabilelor marginale şi densităţile condiţionate .

Prin transformări simple se poate presupune că $m_X = m_Y = 0$ şi $\sigma_X = \sigma_Y = 1$, iar densitatea este de forma

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}}$$

şi scriem exponentul de forma

$$x^2 - 2rxy + y^2 = (y - rx)^2 + (1 - r^2)x^2.$$

Dacă aplicăm formulele (3.13) şi (3.14) obţinem

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(y-rx)^2 + (1-r^2)x^2}{2(1-r^2)}} dy = \sqrt{2\pi} e^{-\dfrac{x^2}{2}}.$$

Densitatea condiţionată este, dacă folosim (3.22)

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r^2)}} e^{-\dfrac{(y-rx)^2}{2(1-r^2)}}.$$

Observăm că dacă $r = 0$, atunci $f_Y(y|x) = f_Y(y)$ şi variabilele marginale sunt independente.

■

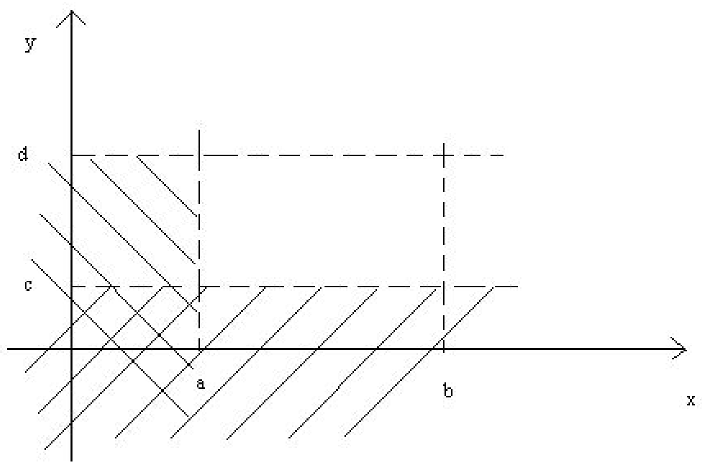


Figura 3.4: Funcţia de repartiţie bidimensională

Exemplul 3.2.4 *Arătaţi că dacă (X, Y) este o variabilă aleatoare cu funcţia de repartiţie F, atunci*

$$P(\{a_1 < X_1 <\leqslant b_1, a_2 < X_2 \leqslant b_2\}) =$$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2).$$

Folosim figura (3.4) şi exprimăm probabilitatea cerută cu ajutorul funcţiei de repartiţie. Observăm că au loc

$$P(\{a_1 < X_1 \leqslant b_1, a_2 < X_2 \leqslant b_2\}) = P(\{X_1 \leqslant b_1, X_2 \leqslant b_2\}) -$$

$$-P(\{X_1 \leqslant a_1, X_2 \leqslant b_2\}) - P(\{X_1 \leqslant b_1, X_2 \leqslant a_2\}) + P(\{X_1 \leqslant a_1, X_2 \leqslant a_2\}) =$$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2).$$

■

Exemplul 3.2.5 *Fie funcţia*

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \textit{dacă } x_1 \leqslant 0 \textit{ sau } x_1 + x_2 \leqslant 1 \textit{ sau } x_2 \leqslant 0 \\ 1 & , \textit{ în rest}. \end{cases}$$

Arătaţi că aceasta satisface proprietăţile:

1. F este nedescrescătoare în fiecare argument;

2. F este continuă la stânga în fiecare argument;

3. $F(+\infty, +\infty) = 1$;

4. $F(-\infty, x_2) = F(x_1, +\infty) = 0$.

Luând un domeniu de forma $D = [1/2, 1] \times [1/2, 1]$, deduceţi că F nu poate fi o funcţie de repartiţie.

Acest exemplu arată că proprietăţile enunţate nu mai caracterizează o funcţie de repartiţie, aşa cum se întâmplă în cazul unidimensional. E suficient să găsim un dreptunghi, pentru care, din exemplul precedent probabilitatea ca variabila să ia valori în acest domeniu este $F(1,1) - F(1, \frac{1}{2}) - F(\frac{1}{2}, 1) + F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dar cum numărul precedent este negativ, nu poate fi probabilitatea unui eveniment.

■

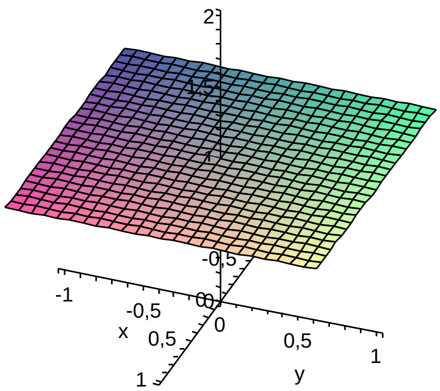


Figura 3.5: Variabila uniformă bidimensională

Exemplul 3.2.6 *Arătaţi că funcţia*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{dacă } (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

este o densitate de probabilitate. Determinaţi densităţile marginale. Sunt variabilele X, Y independente ? (figura(3.5)).

Este uşor de văzut că f este o densitate de probabilitate, deoarece este o funcţie pozitivă şi integrala pe $\mathbb{R}^2$ este 1. Densităţile marginale sunt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv = \int_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)}dv = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \forall x \in [a,b] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

şi analog,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c} & \forall x \in [c,d], \\ \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Deci variabilele aleatoare marginale X şi Y cu densităţile marginale f_X, respectiv f_Y sunt independente.

■

Exemplul 3.2.7 *Variabila aleatoare* (X, Y) *are densitatea de probabilitate* f_{XY}. *Exprimaţi probabilităţile următoarelor evenimente:*

$$\{X > Y\},\ \{X > |Y|\},\ \{|X| > Y\},\ \{Y - X > 1\}.$$

Deoarece probabilitatea ca o variabilă să ia valori într-un domeniu este integrala densităţii de probabilitate pe acest domeniu, vom integra densitatea de probabilitate pe domeniile din figura (3.6).

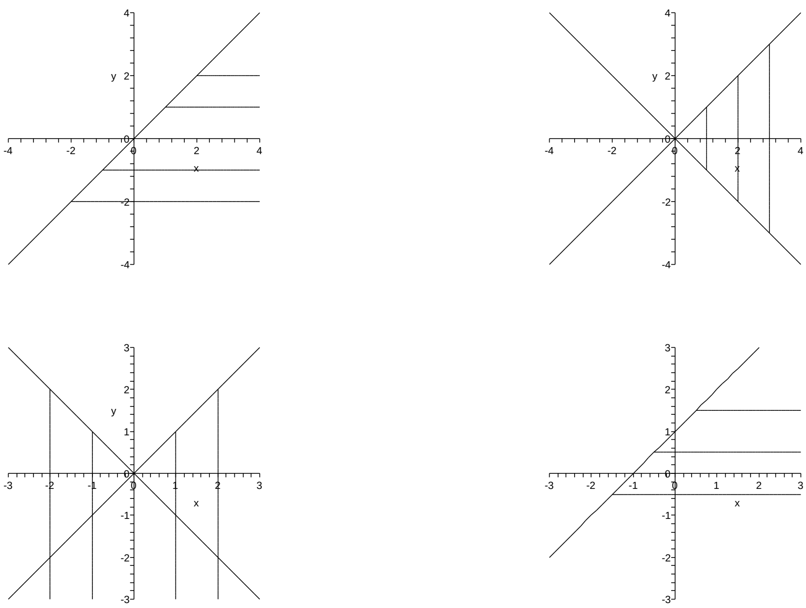


Figura 3.6:

$1. P(\{X > Y\}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{y}^{+\infty} f(x, y)dx;$

$2.\ P(\{X > |Y|\}) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} dx \int_{-x}^{x} f(x, y)dy;$

$3.\ P(\{|X| > Y\}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} dx \int_{-\infty}^{-x} f(x, y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{x} f(x, y)dy;$

4. $P(\{Y - X > 1\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x+1}^{+\infty} f(x,y)dxdy.$

Exemplul 3.2.8 Repartiţia normală n-dimensională. *Fie funcţia definită de*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-1/2(X-M)^t A(X-M)}, \tag{3.26}$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots n}$ *este o matrice simetrică, deci* $A = A^t$ *şi care are proprietatea că forma pătratică*

$$(X - M)^t A(X - M) = \sum_i \sum_j a_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)$$

este pozitiv definită. f *este o densitate de probabilitate.* X *şi* M *reprezintă:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

Presupunem pentru început că $m_1 = \ldots = m_n = 0$. Reamintim că în acest caz există o matrice ortogonală H (cu proprietatea $HH^t = I_n$, unde I_n este matricea unitate), pentru care forma pătratică are forma canonică

$$X^t AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

unde λ_i sunt valorile proprii ale lui A, care în cazul nostru sunt strict pozitive. După cum ştim $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$. Facem schimbarea de variabile $X = HY$ şi observăm că determinantul funcţional

$$\left| \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} \right| = \det H = 1$$

deoarece H este o matrice ortogonală. Avem atunci

$$\int \ldots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int \ldots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2} \det H dy_1 \ldots dy_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} dy_i.$$

Facem în ultima integrală substituţia $y_i = \dfrac{z_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ şi găsim

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2} dy_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{z_i^2}{2}} dz_i = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Efectuând calculele obţinem

$$\prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

Dacă revenim la cazul general, prin substituţia $X - M = Y$, situaţia se reduce la satisfacerea condiţiei $m_1 = \ldots = m_n = 0$.

■

Exemplul 3.2.9 *Fie funcţia*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Calculaţi $P\{(X, Y) \in [a, b] \times [c, d]$ *şi* $P\{(X, Y) \in D_k\}$ *unde* D_k *este domeniul delimitat de* $\dfrac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \dfrac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = k^2$ *(elipsa de egală probabilitate) figura* (3.7)*.*

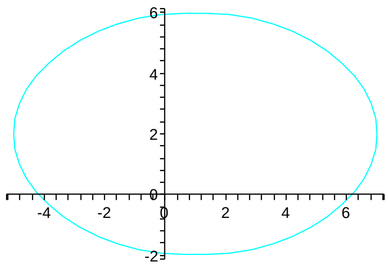


Figura 3.7:

Dacă $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, atunci

$$P(\{(X, Y) \in D\}) =$$

$$\left(\Phi(\frac{b - m_x}{\sigma_x}) - \Phi(\frac{a - m_x}{\sigma_x})\right)\left(\Phi(\frac{d - m_y}{\sigma_y}) - \Phi(\frac{c - m_y}{\sigma_y})\right).$$

Aceasta deoarece variabilele marginale sunt independente iar integrala pe un dreptunghi este un produs din probalităţile ca variabilele marginale să ia valori într-un segment.

Să considerăm un domeniu D_k delimitat de *elipsa de egală probabilitate*, adică elipsa în ale cărei puncte densitatea de probabilitate este constanta $k > 0$. Elipsa are ecuaţia $\dfrac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} + \dfrac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} = k^2$. Observăm că semiaxele elipsei sunt $a = k\sigma_x,\ b = k\sigma_y$. Atunci are loc

$$P(\{(X, Y) \in D_k\}) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$$

Aceasta rezultă imediat dacă facem în integrala dublă schimbarea de variabile de forma

$$\begin{cases} x - m_x = \rho\sigma_x \cos\theta \\ y - m_y = \rho\sigma_y \sin\theta \end{cases} \quad 0 < \rho \leqslant k,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

După efectuarea calculelor obţinem

$$\int\int_{D_k} f(x, y)dxdy = \frac{\sigma_x\sigma_y}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho.$$

■

Exemplul 3.2.10 *Arătaţi că funcţia*

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z - m_z)^2}{\sigma_z^2}\right)}.$$

este o densitate de probabilitate, iar variabilele marginale X, Y, Z sunt independente. Deduceţi probabilitatea ca variabila să ia valori în elipsoidul de egală probabilitate figura (3.8).

Exprimând integralele care dau probabilitatea cerută avem, dacă facem schimbarea de variabile $P\{(X, Y, Z) \in D_K\} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(1 - e^{-\frac{k^2}{2}}\right)$.

■

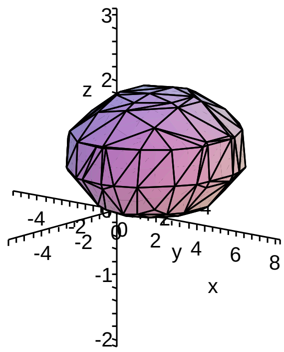


Figura 3.8:

3.3 Transformări de variabile aleatoare

Dacă variabila (U, V) se obţine din (X, Y) printr-o transformare

$$T : \Delta \to D,\ \ \Delta,\ D \subset \mathbb{R}^2$$

prin

$$T(u, v) = (x, y)$$

unde

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

iar funcţiile φ, ψ sunt de clasă $C^1(\Delta)$ şi au proprietatea

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \neq 0, \quad (u, v) \in \Delta.$$

Densităţile sunt legate prin formula

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|. \tag{3.27}$$

Exemplul 3.3.1 *Arătaţi ca dacă X şi Y sunt variabile independente, cu densităţile f_X, f_Y atunci suma şi diferenţa variabilelor au densităţile*

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\infty}^{\infty} f_X(y) f_Y(x-y)dy \tag{3.28}$$

$$f_{X-Y}(x) = \int_{\infty}^{\infty} f_X(y) f_Y(y-x)dy. \tag{3.29}$$

Pentru prima formulă, alegem transformarea

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x \end{cases}$$

cu inversa

$$\begin{cases} x = v \\ y = u - v \end{cases}$$

şi iacobianul 1. Afirmaţia rezultă dacă înlocuim în (3.27). Pentru cea de a doua formulă alegem transformarea

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x \end{cases}$$

cu inversa

$$\begin{cases} x = v \\ y = v - u. \end{cases}$$

■

Exemplul 3.3.2 *Un dispozitiv are două componente ce funcţionează independent şi au ca durate de viaţă variabilele X şi Y cu densităţile*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geqslant 1 \\ 0 & \textit{în rest} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & y \geqslant 1 \\ 0 & \textit{în rest} \end{cases}$$

O măsură a calităţii funcţionării este dată de

$$U(x,y) = \sqrt{XY}.$$

Să determinăm densitatea de probabilitate a calităţii.

Considerăm variabila aleatoare bidimensională (X, Y) care are ca densitate funcţia $f_{XY} = f_X(x)f_Y(y)$, deoarece variabilele sunt independente, deci

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2y^2}, & y \geqslant 1, x \geqslant 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Domeniul pe care f_{XY} nu se anulează este $D = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 | x \geqslant 1, y \geqslant 1\}$. Considerăm $\Delta = \{(u,v) \subset R^2 | v \geqslant 1, u^2 \geqslant v\}$, domenii reprezentate în figura (3.9) şi transformarea $U(x,y) = (u,v)$ unde

$$U(x,y) = \sqrt{xy}$$

care admite inversa

$$T(u,v) = (v, \frac{u^2}{v})$$

cu iacobianul

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{2u}{v}.$$

Folosind (3.27) avem

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{v^2}\frac{1}{\frac{u^4}{v^2}}\frac{2u}{v} = \frac{2}{u^3v}.$$

Densitatea calităţii este densitatea marginală

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)dv = \int_1^{u^2} \frac{2}{u^3v} = \frac{4\ln u}{u^3}.$$

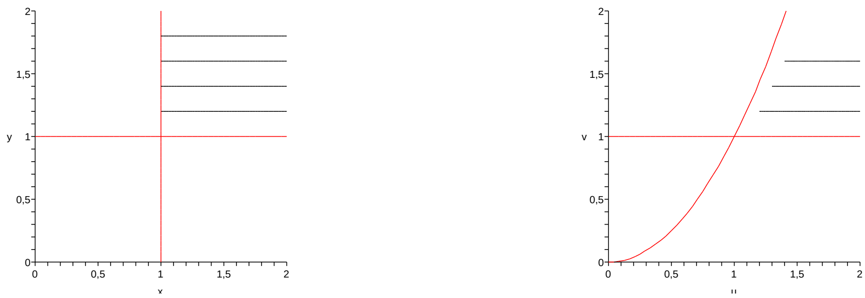


Figura 3.9: Domeniile D şi Δ

■

Corelaţia unei variabile bidimensionale

Dacă variabila aleatoare (X, Y) are densitatea f_{XY} atunci **corelaţia** este

$$R_{XY} = M[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x,y)dxdy. \tag{3.30}$$

Covarianţa este dată de formula

$$Cov[X,Y] = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = R_{XY} - M[X]M[Y]. \tag{3.31}$$

Exemplul 3.3.3 *Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare bidimensionale normale este*

$$f(x,y) = \frac{1}{1,6\pi}e^{-\frac{1}{1.28}\left((x-2)^2 - 1,2(x-2)(y+3) + (y+3)^2\right)}.$$

Calculaţi corelaţia variabilelor marginale.

Dacă ţinem seama de expresia variabilei bidimensionale normale descrisă în exemplul (3.2.3) deducem că $Cov[X,Y] = 0,6$.

■

Exemplul 3.3.4 *Într-un canal de comunicaţie intrarea este o variabilă X, care poate lua valorile $+1$ volt , -1 volt cu aceeaşi probabilitate. Ieşirea $Y = X + N$ unde N este "zgomotul" ce poate fi considerat o variabilă aleatoare repartizată uniform pe intervalul $(-2, 2)$. Să determinăm probabilitatea $P(\{X = 1, Y < 0\})$.*

Folosind formula probabilităţilor condiţionate,avem

$$P(\{X = 1, Y < y\}) = P(\{Y < y\}|\{X = 1\})P(\{X = 1\}) =$$

$$= F_Y(y|1)P(\{X = 1\}).$$

Funcţia de repartiţie a lui Y condiţionată de $\{X = 1\}$ este

$$F_Y(y|1) = P(\{N + 1 < y\}) = P(\{N < y - 1\}) = F_N(y - 1),$$

unde F_N este funcţia de repartiţie a variabilei uniforme, care are expresia

$$F_N(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -2 \\ \dfrac{x+2}{4} & -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 & 2 < x. \end{cases}$$

Deci $F_Y(y|1) = P(\{Y < y|X = 1\}) = \dfrac{y+1}{4}$, $-1 \leqslant y \leqslant 3$, iar probabilitatea căutată este astfel $P(\{X = 1\}|\{Y < 0)\}) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

■

Exemplul 3.3.5 *Variabila (X, Y) are distribuţie constantă în pătratul de latură a. Găsiţi $f(x, y), F(x, y), f_X, f_Y$. Consideraţi mai întâi pătratul cu laturile paralele cu axele, apoi cu diagonalele date de axe (vezi figura (3.10)).*

Figura 3.10:

Ne vom ocupa de primul caz. Acesta este un caz particular al variabilei uniforme pe un domeniu.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} & (x, y) \in D \\ \\ 0 & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Folosind definiţia funcţie de repartiţie bidimensională deducem următoarea expresie

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x\leqslant 0 \quad \text{sau } y\leqslant 0,\\[2mm] \dfrac{xy}{a^2} & 0\leqslant x\leqslant a, \quad \text{şi } 0\leqslant y\leqslant a,\\[2mm] \dfrac{y}{a} & x>a \quad \text{şi } 0<y\leqslant a,\\[2mm] \dfrac{x}{a} & 0<x\leqslant a \quad \text{şi } y>a,\\[2mm] 1 & x>0 \quad \text{şi } y>a;\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a} & x\in(0,a)\\[2mm] 0 & x\notin(0,a)\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{a} & y\in(0,a)\\[2mm] 0 & y\notin(0,a).\end{cases}$$

■

Exemplul 3.3.6 *Fie variabila aleatoare (X,Y) cu densitatea*

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 2e^{-x}e^{-y}, & 0\leqslant y\leqslant x<+\infty,\\ 0, & \textit{în rest.}\end{cases}$$

Determinaţi densităţile de probabilitate condiţionată.

Pentru început aflăm densităţile marginale

$$f_X(x)=\int_0^x 2e^{-x}e^{-y}dy=2e^{-x}(1-e^{-x}),\ \ 0\leqslant x<+\infty$$

şi

$$f_Y(y)=\int_y^{+\infty} 2e^{-x}e^{-y}dx=2e^{-2y},\ \ 0\leqslant y<+\infty.$$

Folosind formulele precedente, avem

$$f_X(x|y)=\frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-2y}}=e^{-(x-y)},\ \ y\leqslant x$$

şi

$$f_Y(y|x)=\frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-x}(1-e^{-x})}=\frac{e^{-y}}{1-e^{-x}},\ \ 0\leqslant y\leqslant x.$$

■

Exemplul 3.3.7 *Densitatea de probabilitate a variabilei* (X, Y) *reprezintă grafic un cilindru circular drept de înălţime* h. *Aflaţi* $f_X,\ f_Y,\ f_X(x|y),\ f_Y(y|x)$. *Calculaţi* $Cov(X, Y)$ *(figura (3.11)).*

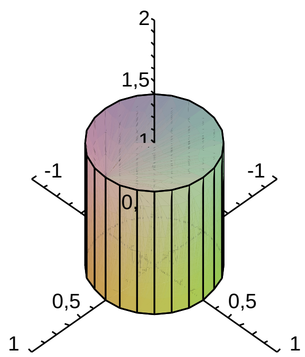


Figura 3.11:

Dacă cilindrul are raza $r > 0$ şi înăţimea $h > 0$, atunci pentru a fi o densitate de probabilitate, trebuie ca $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$. Deci

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} & (x, y) \in D \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} .$$

Densităţile marginale sunt

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2}, \quad \text{dacă } |x| \leqslant r$$

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{r^2 - y^2}}{\pi r^2}, \text{dacă } |y| \leqslant r.$$

Densităţile condiţionate sunt

$$f_X(x|y) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}}, \quad |y| \leqslant r, |x| \leqslant \sqrt{r^2 - y^2}.$$

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad |x| \leqslant r, |y| \leqslant \sqrt{r^2 - x^2}.$$

■

Exemplul 3.3.8 *Variabilele X, Y au distribuţii exponenţiale cu parametrii λ, μ şi sunt independente. Determinaţi f_{XY}, F_{XY}.*

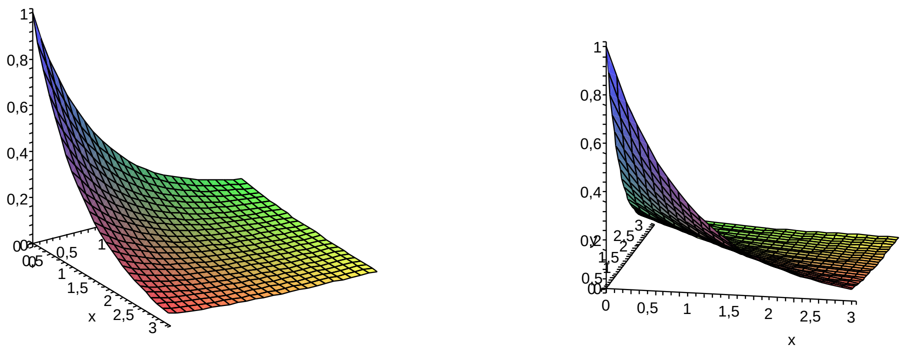


Figura 3.12: Densitatea exponenţială bidimensională

Din condiţia de independenţă, densitatea bidimensională este dată de funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \quad \text{sau } y \leqslant 0 \\ \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)} & x > 0 \quad \text{şi } y > 0; \end{cases}$$

Folosind funcţia de repartiţie exponenţială şi condiţia de independenţă obţinem următoarea expresie pentru funcţia de repartiţie:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \quad \text{sau } y \leqslant 0 \\ (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\mu y}) & x > 0 \quad \text{şi } y > 0. \end{cases}$$

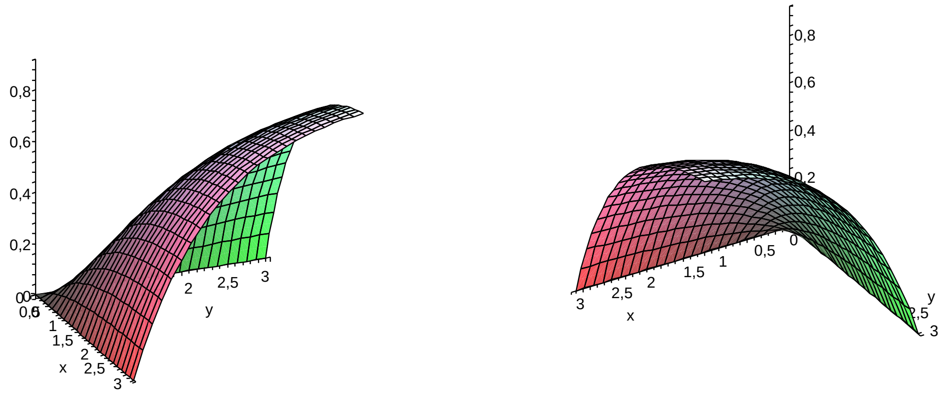


Figura 3.13: Funcţia de repartiţie exponenţială bidimensională

■

Exemplul 3.3.9 *Determinaţi repartiţia distanţei R a unui "punct aleator" (X, Y) la origine (repartiţia Rayleigh).*

În densitatea variabilei normale luăm $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ şi $m_x = m_y = 0$ şi facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad r > 0, \;\; \theta \in [0, 2\pi).$$

Densitatea de probabilitate a variabilei bidimensionale (R, Θ) este

$$f_{R\Theta}(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}},$$

iar densitatea marginală a variabilei R este

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

■

Exemplul 3.3.10 *Erorile de măsurare pentru două mărimi sunt X, Y independente şi repartizate uniform pe $[0, 1]$. Determinaţi densităţile marginale ale sumei şi diferenţei erorilor.*

Fie $U = X + Y, V = X - Y$ Inversa transformării este

$$x = \phi_1(u, v) = \frac{1}{2}(u + v)$$
$$y = \phi_2(u, v) = \frac{1}{2}(u - v)$$

iar iacobianul $J(u, v) = -\frac{1}{2}$; Din ipoteza de independenţă rezultă

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Deci $f_{UV}(u, v) = 1| - 1/2|$, dacă $(u, v) \in \Delta$ şi 0 în rest. Densitatea marginală este dată de

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u, v)dv.$$

■

Exemplul 3.3.11 *Determinaţi suma de variabile aleatoare independente repartizate uniform pe intervalul (a, b). (repartiţia Simpson)*

Densitatea de probabilitate are valoarea $\dfrac{1}{b-a}$ pe intervalul $[a, b]$ şi 0 în rest.

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(x - y)dy = \frac{1}{b-a}\int_{x-a}^{x-b} f(x - y)dy.$$

In ultima integrală facem schimbarea de variabilă $x - y = t$, şi obţinem

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{b-a}\int_{x-b}^{x-a} f(t)dt.$$

Comparând $x - a$ şi $x - b$ cu a şi b obţinem

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & x < 2a \\ \dfrac{x-2a}{(b-a)^2} & 2a \geqslant x < a + b \\ \dfrac{2b-x}{(b-a)^2} & a + b \leqslant x < 2b \\ 0 & x \geqslant 2b. \end{cases}$$

■

Exemplul 3.3.12 *Aceeaşi caracteristică numerică măsurată la două loturi diferite este distribuită normal cu $m = 30,\ \sigma = 2$. Care este procentul articolelor ce provin de la ambele loturi, cu o valoare inferioară lui 50 ?*

Problema revine la a considera suma celor două variabile, care este tot o lege normală $X+Y : N(60,4)$. Procentul căutat este de fapt următoarea probabilitate $P\{X+Y<50\}$, care este $F(50) = 0,5 + \Phi(\frac{50-60}{2}) = 0,5 - \Phi(5)$, iar din proprietăţile funcţiei Laplace rezultă că este o mărime neglijabilă.

■

Exemplul 3.3.13 *Variabilele $X,\ Y$ sunt independente şi au densităţile de probabilitate*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Arătaţi că $U,\ V$ date prin $\begin{cases} U = \sqrt{X}\cos Y \\ V = \sqrt{X}\sin Y \end{cases}$ *sunt independente.*

Folosind condiţia de independenţă deducem că densitatea de probabilitate transformată este $f_{UV}(u,v) = \frac{1}{\pi}\lambda e^{\lambda(u^2+v^2)}$. Densităţile marginale sunt $f_U(u) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{\lambda u^2}$ şi $f_V(v) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{\lambda v^2}$ de unde rezultă independenţa.

■

Exemplul 3.3.14 *Arătaţi că repartiţiile produsului şi câtului de variabile independente, $X,\ Y$ sunt date de formulele*

$$f_{X\times Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_Y(\frac{u}{v}) \frac{1}{|v|} dv \tag{3.32}$$

$$f_{\frac{X}{Y}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(uv) f_Y(v) |v| dv. \tag{3.33}$$

Presupunem că variabilele X şi Y au densităţile de preobabilitate f_X respectiv f_Y. Pentru produs facem schimbarea şi folosim (3.27)

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x \end{cases}$$

cu inversa

$$\begin{cases} x = v \\ y = \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

şi obţinem densitatea marginală

$$f_{X\times Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_Y(\frac{u}{v}) \frac{1}{|v|} dv.$$

Pentru cât facem transformarea

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{y} \\ v = y \end{cases}$$

cu inversa

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases} .$$

Obţinem

$$f_{\frac{X}{Y}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(uv) f_Y(v) |v| dv.$$

■

Exemplul 3.3.15 *Determinaţi densitatea câtului de variabile aleatoare independente cu repartiţie exponenţială.*

Înlocuim în formula de calcul a densităţii unui cât si găsim

$$F_{\frac{X}{Y}}(x) = \frac{\lambda\mu}{(\lambda x + \mu)^2}, \quad x > 0.$$

■

Exemplul 3.3.16 *Fie X, Y distribuite Cauchy independente. Determinaţi distribuţia sumei.*

Folosim faptul că variabilele sunt independente. Calculăm produsul funcţiilor caracteristice. $\varphi_{X+Y}(t) = e{-}\alpha|t|e^{-\alpha|t|} = e^{-(\alpha+\beta)|t|}$. Constatăm că funcţia caracteristică corespunde unei variabile Cauchy, având ca parametru suma parametrilor.

■

Exemplul 3.3.17 *Variabilele X şi Y sunt independente şi repartizate $N(0, \sigma^2)$. Arătaţi că variabila aleatoare $Z = a\dfrac{X}{Y}$, $a \in \mathbb{R}$ urmează lege Cauchy, adică are densitatea*

$$f_Z(z) = \frac{a}{\pi(z^2 + a^2)}.$$

Densităţile variabilelor sunt

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma^2}}.$$

Determinăm mai întâdensitatea câtului $\dfrac{X}{Y}$, folosind (3.33).

$$f_{\frac{X}{Y}}(u) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{u^2v^2 + v^2}{2\sigma^2}} dv = \frac{1}{\pi\sigma^2}.$$

Iar pentru variabila din enunţ determinăm funcţia de repartiţie.

$$F_{a\frac{X}{Y}}(u) = P\left\{a\frac{X}{Y} \leqslant u\right\} = F_{\frac{X}{Y}}\left(\frac{u}{a}\right).$$

Prin derivare

$$f_{a\frac{X}{Y}}(u) = \frac{a}{\pi(u^2 + a^2)}.$$

■

Exemplul 3.3.18 *Fie X şi Y variabile aleatoare independente repartizate $N(0,\sigma^2)$ şi $\chi^2(n,\sigma)$ respectiv. Arătaţi că variabila aleatoare*

$$\frac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$$

este repartizată Student cu n grade de libertate.

Variabila aleatoare bidimensionlă (X,Y) are densitatea

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}2^{\frac{n+1}{2}}\sigma^{n+1}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x^2+y}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<\infty,\ \ 0\leqslant y<\infty.$$

Facem schimbarea

$$\begin{cases} u(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{y}{n}}} \\ \\ v(x,y)=y \end{cases}.$$

Atunci densitatea de probabilitate a variabilei (U,V) devine

$$g(u,v)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}2^{\frac{n+1}{2}}\sigma^{n+1}\Gamma(\frac{n}{2})}v^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{(\frac{u^2}{n}+1)v}{2\sigma^2}}.$$

Densitatea marginală a lui U este

$$\int_0^\infty g(u,v)dv=\frac{1}{\sqrt{\pi n}2^{\dfrac{n+1}{2}}\sigma^{n+1}\Gamma(\dfrac{n}{2})}\int_0^\infty v^{\dfrac{n-1}{2}}e^{-\frac{(\frac{u^2}{n}+1)v}{2\sigma^2}}dv=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}2^{\dfrac{n+1}{2}}\sigma^{n+1}\Gamma(\dfrac{n}{2})}\frac{\Gamma(\dfrac{n+1}{2})}{\left(\dfrac{1+\dfrac{u^2}{n}}{2\sigma^2}\right)^{\dfrac{n+1}{2}}}=\frac{\Gamma(\dfrac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\dfrac{n}{2})}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\dfrac{n+1}{2}},$$

aceasta datorită schimbării de variabilă $\dfrac{(\frac{u^2}{n}+1)v}{2\sigma^2} = t.$

■

Exemplul 3.3.19 *Variabila aleatoare are densitatea constantă în pătratul* D : $|x \pm y| = 1$. *Găsiţi* $f_{XY}, f_X, f_Y, f_X(x|y), f_Y(y|x)$. *Sunt variabilele marginale* X, Y *independente ? Dar corelate ? Determinaţi covarianţa variabilelor.*

Folosim desenul din dreapta, figura (3.10). Densităţile marginale sunt

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & -1 < x \leqslant 0 \\ -x+1 & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+1 & -1 < y \leqslant 0 \\ -y+1 & 0 < y \leqslant 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Deci variabilele nu sunt independente, deoarece $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.
Densităţile condiţionate sunt

$$f_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(y+1)} & -1 < y < 0, -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2(-y+1)} & 0 < y < 1, -1 < x < 1 \\ 0 & -1 < y < 1, x \notin (-1,1) \end{cases}$$

$$f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(x+1)} & -1 < x < 0, -1 < y < 1 \\ \dfrac{1}{2(-x+1)} & 0 < x < 1, -1 < y < 1 \\ 0 & -1 < x < 1, y \notin (-1,1) \end{cases}.$$

Calculăm corelaţia şi avem

$$R_{XY} = MXY = \frac{1}{2}\int\int_D xy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{x+1} xydy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{-x+1} xydy = 0.$$

Deorece $M[X] = M[Y] = \dfrac{1}{3}$ rezultă

$$Cov[X,Y] = M[XY] - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9}.$$

■

Exemplul 3.3.20 *O variabilă aleatoare (X, Y) este uniform distribuită într-un pătrat de latură 1, cu laturile paralele cu axele de coordonate . Găsiţi media şi dispersia variabilei XY.*

Pentru că X şi Y sunt independente $M[XY] = M(X)M(Y) = \dfrac{1}{4}$. $D^2[XY] = \dfrac{1}{144}$.

■

Exemplul 3.3.21 *Variabila aleatoare (X, Y) este uniform distribuită în interiorul unui cerc de rază $r = 1$. Găsiţi media şi dispersia variabilei $Z = XY$.*

$$M[XY] = \frac{1}{\pi}\int\int_D xydxdy = 0.\ D^2[XY] = \frac{1}{\pi}\int\int_D x^2y^2dxdy = \frac{1}{8}.$$

■

Exemplul 3.3.22 *Arătaţi că dacă X şi Y sunt variabile aleatoare continue,care admit medie, atunci are loc*

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y].$$

Presupunem că cele două variabile au densităţile f_X şi f_Y. Atunci media sumei este

$$M[X + Y] = \int_{\infty}^{\infty} zf_{X+Y}(z)dz = \int_{\infty}^{\infty} z\int_{\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z - x)dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $z - x = y$ şi obţinem

$$M[X + Y] = \int_{\infty}^{\infty} dy\int_{\infty}^{\infty} (x + y)f_{XY}(x, y)dx =$$
$$= \int_{\infty}^{\infty} x\int_{\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy + \int_{\infty}^{\infty} y\int_{\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx =$$
$$= \int_{\infty}^{\infty} xf_X(x)dx + \int_{\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = M[X] + M[Y].$$

■

Exemplul 3.3.23 *Arătaţi că dacă variabilele marginale ale variabilei bidimensionale (X, Y) sunt independente, atunci $R_{XY} = M[X]M[Y]$.*

Are loc

$$R_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = M[X]M[Y].$$

■

Exemplul 3.3.24 *Fie variabilele aleatoare X şi Y care au $\rho[X, Y] = 0,5$ şi*

$$M[X] = 1, \;\; D^2[X] = 2$$

$$M[Y] = 3, \;\; D^2[Y] = 4.$$

Determinaţi corelaţia variabilelor.

Avem $R_{XY} = Cov[X, Y] + M[X]M[Y]$ şi din formula coeficientului de corelaţie

$$R_{XY} = \rho D[X]D[Y] + M[X]M[Y] = 0,5\sqrt{2}2 + (1)(3) = 4,414.$$

■

Exemplul 3.3.25 *Variabilele X şi Y au dispersiile 7,05 şi 5,36, iar coeficientul de corelaţie $\rho[X, Y] = -0.48$. Se fac transformările*

$$U = 2X + Y$$

$$V = X + 2Y.$$

Să se determine $Cov[U, V]$ şi coeficientul de corelaţie $\rho[U, V]$.

Calculăm covarianţa variabilelor U şi V.

$$Cov[U, V] = M[(U - M[U])(V - M[V]).$$

Au loc

$$M[U] = 2M[X] + M[Y]$$
$$M[Y] = M[X] + 2M[Y].$$

Atunci

$$Cov[U,V] = M[(2X + Y - 2M[X] - M[Y])(X + 2Y - M[X] - 2M[Y])] =$$
$$= 2M[(X - M[X])^2] + 5M[(X - M[X])(Y - M[Y]) + 2M[(Y - M[Y])^2.$$

Ultima relaţie poate fi scrisă

$$Cov[U,V] = 2D^2[X] + 5Cov[X,Y] + 2D^2[Y].$$

Facem înlocuirile

$$Cov[U,V] = 2(7,05) - 5(0,48)\sqrt{(97,05)(5,36)} + 2(5,36) = 10,07.$$

Folosind metode similare se poate calcula

$$D^2[U] = 21,76, \quad D^2[V] = 16,69.$$

Coeficientul de corelaţie este atunci

$$\rho[U,V] = \frac{10,07}{\sqrt{21,76}\sqrt{16,69}}.$$

■

Capitolul 4

Procese stochastice

4.1 Lanţuri Markov

Fie $\{E, K, P\}$ un câmp borelian de probabilitate. Familia de variabile aleatoare $X(t) : E \to \mathbb{R}$, unde $t \in T \subset \mathbb{R}$, se numeşte **proces stochastic**. Dacă $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\},\ n \in \mathbb{N}$ procesul se numeşte **lanţ**. Mulţimea valorilor unui proces, notată S se numeşte **mulţimea stărilor**.

Presupunem că S este o mulţime finită şi $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\},\ n \in \mathbb{N}$. Notăm

$$X(n) = X_{t_n}. \tag{4.1}$$

Probabilităţile

$$p_i = P\{X_0 = i\}, \quad \forall i \in S \tag{4.2}$$

se numesc **probabilităţi iniţiale** ale lanţului şi satisfac

$$\sum_{i \in S} p_i = 1. \tag{4.3}$$

Lanţul $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ se numeşte **lanţ Markov** dacă are loc

$$P(\{X_{n+1} = i_{n+1}\}|\{X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0\}) = P(\{X_{n+1} = i_{n+1}\}|\{X_n = i_n\}). \tag{4.4}$$

cunoscută sub numele de **proprietatea Markov** (lanţul păstrează asupra trecutului amintirea cea mai recentă). Condiţia (4.4) este echivalentă cu

$$P(\{X_{t_{n+1}} = i_{n+1}\}|\{X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_0} = i_0\}) = P(\{X_{t_{n+1}} = i_{n+1}\}|\{X_{t_n} = i_n\}). \tag{4.5}$$

$$\forall \ t_0 < t_1 < \dots t_n < t_{n+1} \in T,$$

(schimbarea stărilor nu se face la momente echidistante de timp.)

Dacă $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ este un lanţ Markov, are loc următoarea formulă de calcul:

$$P\{X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\} = p_{i_0} \prod_{t=1}^{n} P(\{X_t = i_t\}|\{X_{t-1} = i_{t-1}\}). \tag{4.6}$$

Probabilităţile date de formula

$$p(t, i_{t-1}, i_t) = P(\{X_t = i_t\}|\{X_{t-1} = i_{t-1}\}), \ \ t = 1, \dots n,$$

se numesc **probabilităţi de trecere**.
Un lanţ Markov se numeşte **omogen** dacă $p(t, i_{t-1}, i_t)$ nu depinde explicit de t, deci are loc

$$p(t, i_{t-1}, i_t) = p(i_{t-1}, i_t)$$

Vom nota aceste probabilităţi cu p_{i_{t-1},i_t}. Pentru un lanţ Markov omogen, relaţia (4.6) devine

$$P\{X_t = i_t, \dots X_0 = i_0\} = p_{i_0} \prod_{t=1}^{n} p_{i_{t-1},i_t}. \tag{4.7}$$

In cazul unui lanţ Markov omogen, vom introduce notaţia

$$p_{ij} = P(\{X_{t+1} = j\}|\{X_t = i\}), \ \ i, j \in S. \tag{4.8}$$

Matricea $P = (p_{i,j})$ se numeşte **matrice de trecere**.
Matricea de trecere a unui lanţ Markov omogen satisface relaţiile :

$$\begin{cases} p_{ij} \geqslant 0, & \forall i, j \in S \\ \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, & \forall i \in S \end{cases} . \tag{4.9}$$

O matrice ce satisface aceste două proprietăţi se numeşte **stochastică** . Produsul a două matrice stochastice este o matrice stochastică.

Exemplul 4.1.1 *Două urne au următoarea componenţă :*

U_a *are 4 bile albe şi 6 bile negre*

U_n *are 5 bile albe şi 5 bile negre*

Alegem la întâmplare o urnă şi din ea o bilă, pe care o punem înapoi în urnă; dacă bila este albă extragem următoarea bilă din U_a*, iar dacă e neagră din* U_n *şi continuăm procedeul.*

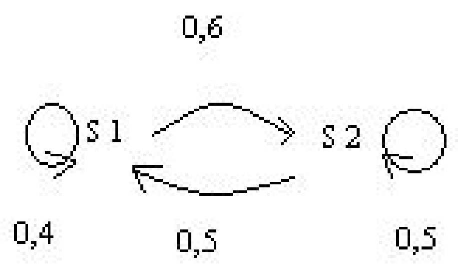


Figura 4.1:

Este un exemplu de lanţ Markov omogen, cu probabilităţile iniţiale $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, deoarece alegerea urnelor este egal probabilă; definim stările

S_1 se extrage o bilă din urna U_a

S_2 se extrage o bilă din urna U_n

şi ilustrăm prin următoarea diagramă:

Matricea de trecere este

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

■

Exemplul 4.1.2 *Intr-o urnă sunt* a *bile albe şi* b *bile negre. Se efectuează un şir infinit de extrageri astfel încât după fiecare extragere se pun înapoi două bile de aceeaşi culoare cu cea extrasă. Fie* X_k *numărul de bile la momentul* k.

Definim probabilităţile de trecere

$$P(\{X_{k+1}=j\}|\{X_k=i\})=\begin{cases}1-\dfrac{i}{a+b+k}, & \text{dacă } j=i,\\[2ex] \dfrac{i}{a+b+k}, & \text{dacă } j=i+1,\\[2ex] 0, & \text{dacă } j\neq i, i+1.\end{cases}$$

Numărul de bile din urnă la momentul $k+1$ depinde numai de numărul de bile din urnă aflate la momentul k, nefiind necesar întreg istoricul. Probabilităţile de trecere depind efectiv de momentul în care s-a desfăşurat extracţia, deci e un lanţ Markov neomogen.

■

Probabilităţile

$$P(\{X_{n+m}=j\}|\{X_m=i\}),\ \ n\in\mathbb{N} \tag{4.10}$$

pe care le numim **probabilităţi de trecere după** n **paşi**. Definim prin recurenţă $p_{ij}^{(n)}$, după formulele

$$\begin{cases} p_{ij}^{(1)} & = p_{ij}\\ p_{ij}^{(n+1)} & = \sum\limits_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(1)} \quad n\in\mathbb{N}^*.\end{cases} \tag{4.11}$$

Sub formă matriceală, relaţiile (4.11) devin:

$$P^{(n)} = P\times\ldots\times P = P^n. \tag{4.12}$$

Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ are loc

$$p_{ij}^{(n)} = P(\{X_{n+m}=j\}|\{X_m=i\}),\ \ m\in\mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Într-un lanţ Markov omogen probabilitatea ca la momentul $n\in\mathbb{N}$ sistemul să se afle în starea $i,\ i\in S$, probabilitate pe care o vom nota $p_i(n)$, este dată de formula

$$p_i(n) = \sum_{j\in S} p_j(n-1)p_{ji}. \tag{4.14}$$

Exemplul 4.1.3 *Un calculator poate fi privit ca un sistem S care se poate afla într-una din următoarele stări:*

S_1 calculatorul funcţionează normal;

S_2 calculatorul prezintă unele dereglări, dar poate executa programe;

S_3 calculatorul prezintă unele dereglări şi rezolvă un număr limitat de probleme;

S_4 calculatorul nu funcţionează.

La momentul iniţial calculatorul funcţionează, deci se află în starea S_1 cu probabilitatea 1 şi se poate presupune că el trece în celelalte stări cu probabilităţile indicate de următoarea schemă

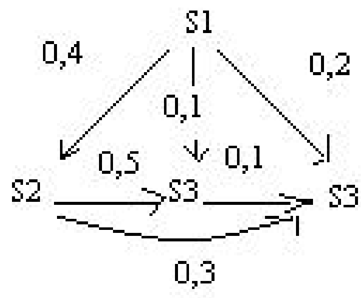


Figura 4.2:

Deci matricea de trecere este

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să determinăm probabilităţile stărilor la momentul $n = 2$. Deoarece la momentul iniţial calculatorul funcţionează, probabilităţile iniţiale sunt

$$p_1 = 1, \quad p_2 = p_3 = p_4 = 0.$$

Folosind (4.14) găsim

$$p_1(1) = 0,3; \quad p_2(1) = 0,4; \quad p_3(1) = 0,1; \quad p_4(1) = 0,2$$

şi

$$p_1(2) = 0,09; \quad p_2(2) = 0,2; \quad p_3(2) = 0,27; \quad p_4(2) = 0,44.$$

■

Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ are loc

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \tag{4.15}$$

Relaţia (4.15) se numeşte relaţia **Chapman-Kolmogorov**. Matriceal ea se scrie

$$P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}.$$

Exemplul 4.1.4 *Dacă avem un lanţ Markov omogen cu matricea de trecere P, să determinăm*

$$P(\{X_{10} = l, X_8 = k, X_5 = j\} | \{X_1 = i\}).$$

Folosind formula probabilităţii unei intersecţii şi proprietatea Markov, avem

$$\frac{P\{X_{10} = l, X_8 = k, X_5 = j, X_1 = i\}}{P(\{X_1 = i\})} =$$

$$= p_{ij}^{(4)} p_{jk}^{(3)} p_{kl}^{(2)}.$$

Deoarece numărătorul devine
$P\{X_{10} = l, X_8 = k, X_5 = j, X_1 = i\} = P\{X_1 = i\} \times$
$P(\{X_5 = j\} | \{X_1 = i\}) P(\{X_8 = k\} | \{X_5 = j\}) P(\{X_{10} = l\} | \{X_8 = k\})$. ■

Exemplul 4.1.5 ***Mers la întâmplare pe segmentul*** $[0, l]$.

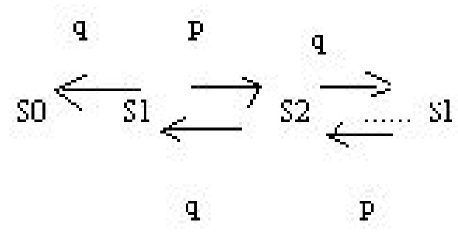


Figura 4.3: Bariere absorbante

a. ***Cu bariere absorbante***. *O particulă se deplasează pe o axă orientată ocupând doar punctele de abscisă* $0, 1, \ldots l$. *La fiecare moment particula rămâne* *imobilă dacă se află într-unul din punctele 0 sau l şi face un pas la dreapta cu probabilitatea p sau la stânga cu probabilitatea q (vezi figura (4.3)). Matricea de trecere este*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. ***Cu bariere reflectante***. *Dacă particula ajunge în 0 sau l, este "reflectată" în 1, respectiv $l-1$ (vezi figura (4.4)). Matricea de trecere este*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

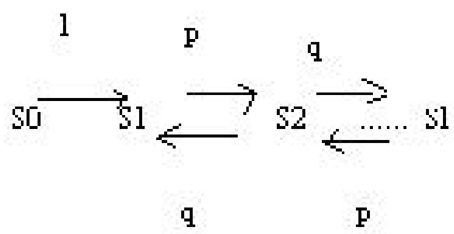


Figura 4.4: Bariere reflectante

■

Exemplul 4.1.6 ***Un model din teoria aşteptării*** **.**
O "staţie" de deservire poate servi clienţii la momentele $0, 1, 2, \dots$. Numărul de clienţi care sosesc în intervalul $(n, n+1)$ este o variabilă aleatoare notată X_n. Presupunem că X_n sunt variabile aleatoare independente şi identic repartizate

$$X_n : \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}_{k=0,\cdots\infty}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

şi că există un loc de aşteptare pentru cel mult m clienţi, număr în care se include şi clientul care este servit. Clienţii care ajung în staţie şi găsesc m clienţi, pleacă fără a fi serviţi.
Fie Y_n numărul de clienţi prezenţi la momentul n, în care se include şi clientul care este servit. Să determinăm matricea de trecere pentru procesul Y_n.

Y_n este un lanţ Markov cu stările $0, 1, \dots m$. Y_{n+1} este egal cu numărul clienţilor la momentul n, mai puţin cel servit la momentul n (dacă există) plus numărul clienţilor care sosesc în intervalul $(n, n+1)$, dacă rezultatul nu depăşeşte m şi este egal cu m în caz contrar. Deci

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n - 1 + X_n, & \text{dacă} \quad 1 \leqslant Y_n \leqslant m, \quad 0 \leqslant X_n \leqslant m+1-Y_n, \\ X_n, & \text{dacă} \quad Y_n = 0, \quad 0 \leqslant X_n \leqslant m-1, \\ m, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Deoarece Y_{n+1} depinde doar de Y_n, iar variabilele aleatoare X_n şi Y_n sunt independente, rezultă că Y_n este un lanţ Markov. Să determinăm matricea de trecere. Notăm cu $\overline{p_m} = p_m + p_{m-1} + \dots$

$$p_{0j} = P(\{Y_{n+1} = j\} | \{Y_n = 0)\}$$

$$= \begin{cases} P(\{X_n = j\}) = p_j, & \text{dacă} \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1, \\ P(\{X_n \geqslant m\}) = \overline{p_m}, & \text{dacă} \quad j = m; \end{cases}$$

$$p_{ij} = P(\{Y_{n+1} = j\} | \{Y_n = i\}) =$$

$$= \begin{cases} P(\{X_n = j+1-i\}) = p_{j-i+1}, & \text{dacă} \quad i-1 \leqslant j \leqslant m-1, \\ P(\{X_n \geqslant m+1-i\}) = \overline{p_{m+1-i}}, & \text{dacă} \quad j = m, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Rezultă matricea

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & \overline{p_m} \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & \overline{p_m} \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & p_{m-2} & \overline{p_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_1 & \overline{p_2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_0 & \overline{p_1} \end{pmatrix}.$$

■

Exemplul 4.1.7 ***Un model din teoria stocurilor.***
O marfă este stocată pentru a putea satisface cererile întâmplătoare. Completarea eventuală a stocului se face la momentele $0, 1, 2, \ldots$*, iar cererea în intervalul* $(n, n+1)$ *este o variabilă aleatoare* X_n*, cu repartiţia*

$$X_n : \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}_{k=0,\cdots,\infty}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Presupunem că X_n *sunt independente. Dacă la un moment oarecare* $n \geqslant 0$ *cantitatea de marfă stocată nu este mai mare decât* m *unităţi, atunci se procură instantaneu o cantitate de marfă care ridică stocul la* M *unităţi,* $M \in \mathbb{N}$*. Dacă însă cantitatea de marfă depăşeşte* m *unităţi, atunci nu se întreprinde nimic. Fie* Y_n *stocul imediat înainte de reîmprospătarea eventuală de la momentul* n*. Observăm că*

$$Y_{n+1} = \begin{cases} \max\{Y_n - X_n, 0\}, & \textit{dacă} \quad m < Y_n \leqslant M, \\ \max\{M - X_n, 0\}, & \textit{dacă} \quad Y_n \leqslant m. \end{cases}$$

Se arată că Y_n este un lanţ Markov cu matricea de trecere

$$\begin{pmatrix} \overline{p_M} & p_{M-1} & \cdots & p_{M-m} & p_{M-m-1} & p_{M-m-2} & \cdots & p_0 \\ \overline{p_M} & p_{M-1} & \cdots & p_{M-m} & p_{M-m-1} & p_{M-m-2} & \cdots & p_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{p_M} & p_{M-1} & \cdots & p_{M-m} & p_{M-m-1} & p_{M-m-2} & \cdots & p_0 \\ \overline{p_{m+1}} & p_m & \cdots & p_1 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{p_{m+2}} & p_{m+1} & \cdots & p_2 & p_1 & p_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{p_M} & p_{M-1} & \cdots & p_{M-m} & p_{M-m-1} & p_{M-m-2} & \cdots & p_0 \end{pmatrix}.$$

Matricea are primele m linii identice. S-a folosit notaţia $\overline{p_l} = p_l + p_{l+1} + \ldots$, dacă $m < l \leqslant M$.

■

Dacă pentru orice $i, j \in S$ şirul $p_{ij}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ este convergent independent de i, lanţul X_n se numeşte *ergodic*.

Teoremă de ergodicitate Fie (X_n), $n \in \mathbb{N}$, un lanţ Markov cu matricea de trecere $P = (p_{ij})$, $i, j \in S$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. există $s \in \mathbb{N}^*$ şi o stare $j_0 \in S$ astfel încât $p_{ij_0}^{(s)} > 0 \ \ \forall i \in S$;
2. există $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j^{\infty}$, $j \in S$, $\forall i \in S$.

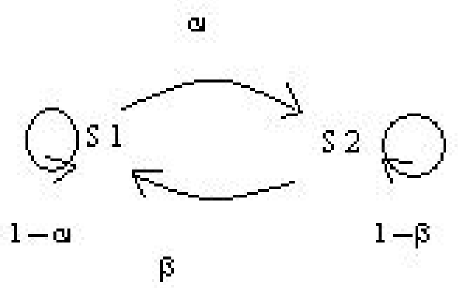


Figura 4.5:

Exemplul 4.1.8 *Fie un lanţ Markov cu două stări şi diagrama asociată în figura (*4.5*).*

Să studiem comportarea la limită a matricei de trecere.

Obsevăm că matricea de trecere este de forma

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Putem scrie

$$P = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Se constată uşor că

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1-\alpha-\beta)^n}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere după n paşi tinde pentru $n \to +\infty$ la

$$\frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

■

Dacă cele două stări sunt luate iniţial cu probabilităţile $p_0, 1-p_0$, se constată că pentru $n \to +\infty$ probabilităţile de stare sunt $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}, \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Deci după un număr foarte mare de paşi probabilităţile nu depind de starea iniţială.

Dacă analizăm mersul la întâmplare cu bariere absorbante, pentru $l = 2$, găsim

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar $P^n = P, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Observăm că nu este în deplinită condiţia de ergodicitate; se poate totuşi aprecia că la un număr foarte mare de paşi particula rămâne imobilă, fiind absorbită de bariere.

Exemplul 4.1.9 *Un calculator este inspectat la momentele t_1, t_2, t_3, t_4 şi se poate afla în una din următoarele stări:*

s_1 *funcţionează normal;*

s_2 *are un număr neglijabil de erori, care nu impiedică calculatorul să funcţioneze;*

s_3 *are erori considerabile, dar rezolvă limitat probleme;*

s_4 *nu funcţionează. La momentul iniţial calculatorul este în starea s_1 iar*

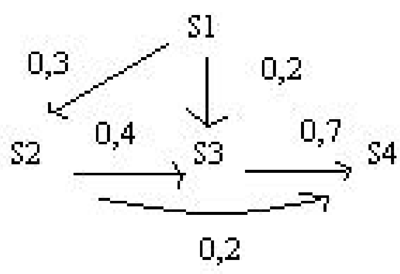


Figura 4.6:

matricea de tranziţie este

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Asociaţi diagrama şi aflaţi probabilităţile de stare după fiecare din cele trei inspecţii.

Probabilităţile de stare iniţială sunt $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, deoarece iniţial calculatorul funcţionează. Apoi

$$p_1(1) = 0,5,\ p_2(1) = 0,3,\ p_3(1) = 0,2,\ p_4(1) = 0$$

$$p_1(2) = 0,25,\ p_2(2) = 0,27,\ p_3(2) = 0,28,\ p_4(2) = 0,2$$

$$p_1(3) = 0,125,\ p_2(3) = 0,183,\ p_3(3) = 0,242,\ p_4(3) = 0,450.$$

Diagrama este următoare

■

Exemplul 4.1.10 *În ziua 0 există 2 becuri noi de rezervă. Probabilitatea de a schimba un bec este p, iar probabilitatea de a nu schimba este $q = 1 - p$. Fie Y_n numărul de becuri necesar la sfârşitul zilei n. Determinaţi matricea de tranziţie după un pas şi după n paşi, probabilităţile de stare la momentul n şi comportarea lor la limită.*

Stările procesului sunt 2,1,0, iar diagrama corespunzătoare este dată în figura (4.7).

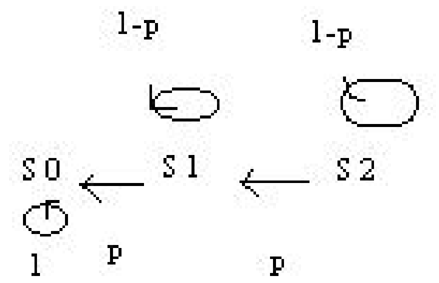


Figura 4.7:

Matricea de tranziţie cu un pas poate fi uşor determinată:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

iar probabilităţile de stare la momentul iniţial sunt 0, 0, 1. După n paşi
$p_{22}(n) = P(\{$ nici un bec nou nu e necesar în n zile$\}) = q^n$;
$p_{21}(n) = P(\{$ un bec nou este necesar în n zile$\}) = C_n^1 pq^{n-1}$;
$p_{20}(n) = 1 - p_{22}(n) - p_{21}(n)$;
Matricea de tranziţie după n paşi este

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-q^n & q^n & 0 \\ 1-q^n-npq^{n-1} & npq^{n-1} & q^n \end{pmatrix}.$$

Trecînd la limită pe fiecare element al matricei găsim matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probabilităţile de stare la momentul n sunt date de produsul

$$(0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-q^n & q^n & 0 \\ 1-q^n-npq^{n-1} & npq^{n-1} & q^n \end{pmatrix}$$

iar la limită se obţine $(1\ \ 0\ \ 0)$. Interpretarea evidentă este că după un număr foarte mare de paşi procesul devine "staţionar" şi rămân 0 becuri de rezervă.

■

4.2 Procese Poisson

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, notăm cu $X(t)$ numărul de produceri ale evenimentului în intervalul $(0, t)$ (variabila aleatoare $X(t)$ ia valori în $\mathbb{N}$). Facem următoarele presupuneri:

1. $X(0) = 0$ (observaţiile încep la momentul iniţial $t = 0$)

2. pentru orice momente de timp $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, variabilele aleatoare $X(t_2) - X(t_1)$ şi $X(t_4) - X(t_3)$ sunt independente (proces cu creşteri independente);

3. repartiţia variabilei aleatoare $X(t+s) - X(t),\ \ t > 0,\ s > 0$, depinde doar de s, lungimea intervalului şi nu de t;

4. probabilitatea ca un singur eveniment să se producă în intervalul $(t, t+\Delta t)$, pentru Δt suficient de mic este aproximativ proporţională cu lungimea intervalului, deci de forma $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Probabilitatea ca mai mult de un eveniment să se producă în intervalul $(t, t + \Delta t)$ este $o(\Delta t)$.(Prin $o(\Delta t)$s-a notat o cantitate ce depinde doar de Δt ce satisface $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.) Notăm

$$p_k(t) = P\{X(t) = k\}. \tag{4.16}$$

Condiţiile 1,2,3 şi 4 conduc la ecuaţiile diferenţiale ale procesului:

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t),\ \ k = 0, 1, \cdots. \tag{4.17}$$

cu soluţia

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ \ k = 0, 1, 2.\ldots.$$

Matricea de trecere cu un pas.

Probabilităţile de trecere sunt:

$$p_{ij}(t) = P\{j-i \text{ evenimente au loc în } t \text{ secunde}\} = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t},\ j \geqslant i.$$

Matricea P este

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!} & \dots \\ 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Intervalul aleator dintre două evenimente succesive într-un proces Poisson.

Dacă în cadrul unui proces Poisson un eveniment se produce la momentul t, iar următorul la momentul $t+\tau$, τ este o variabilă aleatoare repartizată exponenţial cu densitatea

$$f_\tau = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \tau} & \tau > 0 \\ 0 & \tau \leqslant 0 \end{cases}$$

Exemplul 4.2.1 *Impulsurile care se recepţionează la o staţie se primesc cu rata de 15 pe minut. Să determinăm probabilitatea ca într-un minut să se recepţioneze 5 impulsuri astfel: 3 impulsuri să ajungă în primele 10 secunde şi 2 impulsuri în ultimile 15 secunde.*

Obţinem $\lambda = \dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$ şi

$$P\{X(10)=3, X(60)-X(45)=2\} =$$

$$= P\{X(10)=3\}P\{X(60)-X(45)=2\} =$$

$$= P\{X(10)=3\}P\{X(60-45)=2\} = \frac{\frac{10}{4}^3 e^{-\frac{10}{4}}}{3!}\frac{\frac{15}{4}^2 e^{-\frac{15}{4}}}{2!}.$$

■

Momentul de producere al unui eveniment într-un proces Poisson.

Într-un proces Poisson s-a produs exact un eveniment în intervalul $(0, t)$, iar momentul de producere este repartizat după o lege uniformă cu densitatea

$$g(s) = \frac{1}{t} \quad , 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Exemplul 4.2.2 *Doi clienţi ajung la o staţie într-o perioadă de două minute. Să determinăm probabilitatea ca ambii să ajungă în primul minut.*

Timpii fiind repartizaţi uniform şi independent, rezultă că probabilitatea este $\frac{1}{4}$. ■

Timpul la care s-a produs evenimentul n într-un proces Poisson.

Apariţia unui ”client” la o ”staţie de deservire” este supus legii Poisson cu parametrul λ. Dacă staţia se închide după apariţia clientului n, densitatea de probabilitate pentru timpul T în care staţia rămâne deschisă este repartizată Erlang, adică are repartiţia Erlang

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ \qquad 0, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

Exemplul 4.2.3 ***Semnalul telegrafic aleator***. *Fie $T(t)$ un proces care ia stările ± 1 cu aceeaşi probabilitate la momentul iniţial. $T(t)$ îşi schimbă polaritatea odată cu sosirea unui semnal dintr-un proces Poisson cu parametrul α. Reprezentăm o traiectorie în Figura (4.8).*

Să calculăm probabilităţile evenimentelor $\{T(t) = \pm 1\}$.

Ne ocupăm pentru început de evenimentul $\{T(t) = 1\}$. Folosind formula probabilităţii totale avem

$$P\{T(t) = 1\} = P(\{T(t) = 1\} | \{T(0) = 1\}) P(\{T(0) = 1\}) +$$
$$+ P(\{T(t) = 1\} | \{T(0) = -1\}) P(\{T(0) = -1\}).$$

Calculăm probabilităţile condiţionate. Notăm cu $A = \{$ în intervalul $(0, t)$ se produce un număr par de schimbări $\}$ şi cu $B = \{$ în intervalul $(0, t)$ se produce un număr impar de schimbări $\}$

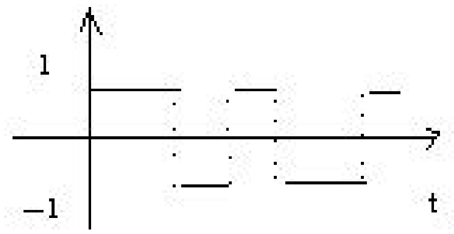


Figura 4.8:

$$P(\{T(t)=1\}|\{T(0)=1\}) = P(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{2j}}{(2j)!} e^{\lambda t} = \frac{e^{-\lambda t}}{2}(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}) =$$

$$= \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda t}).$$

$$P(\{T(t)=1\}|\{T(0)=-1\}) = P(B) = \frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda t}).$$

Deoarece $P(\{T(0)=1\}) = P(\{T(0)=-1\}) = \frac{1}{2}$, rezultă după înlocuiri că evenimentele $\{T(t)=\pm 1\}$ au probabilitatea $\frac{1}{2}$.

■

Procese de naştere-moarte.

Un ”fir de aşteptare” este format din n ”clienţi” şi o persoană care serveşte. Spunem că sistemul se află în starea S_n dacă sunt n ”clienţi” la coadă, inclusiv cel servit (dacă există). Din starea S_n sunt posibile doar două tranziţii:

- la starea S_{n-1} dacă un client a fost servit şi părăseşte coada;

- la starea S_{n+1} dacă un client este încă servit în timp ce un nou client se aşează la coadă.

Considerăm procesul care descrie comportarea cozii în timp. Facem următoarele ipoteze:

1. Dacă sistemul este în starea S_n, poate realiza tranziţii la S_{n-1} sau la S_{n+1}, $n \geqslant 1$ (de la S_0 este posibilă doar S_1).

2. Probabilitatea unei tranziţii $S_n \to S_{n+1}$ într-un interval scurt Δt este $\alpha_n \Delta t$ parametrul α_n se numeşte parametru de ”naştere”şi facem ipoteza că depinde de starea S_n.

3. Probabilitatea unei tranziţii $S_n \to S_{n-1}$ într-un interval de lungime Δt este $\beta_n \Delta t$ parametru β_n se numeşte parametru de ”moarte”.
Notăm $P_n(t) = P(\{\ X(t)$ se află în starea $S_n\ \})$. $P_n(t)$ satisface ecuaţiile diferenţiale:

$$\begin{array}{c} P'_n(t) = -(\alpha_n + \beta_n)P_n(t) + \alpha_{n-1}P_{n-1}(t) + \beta_{n+1}P_{n+1}(t), \quad n \geqslant 1 \\ P'_0(t) = -\alpha_0 P_0(t) + \beta_1 P_1(t) \end{array} \tag{4.18}$$

Aceste ecuaţii diferenţiale în cazul în care $P_n(t)$ nu depinde de t devin

$$\begin{cases} (\alpha_n + \beta_n)P_n = \alpha_{n-1}P_{n-1} + \beta_{n+1}P_{n+1}, \ \ n \geqslant 1, \\ \alpha_0 P_0 = \beta_1 P_1, \end{cases}$$

şi au soluţia

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\alpha_0}{\beta_1} P_0 \\ P_2 &= \frac{\alpha_0\ \alpha_1}{\beta_1\ \beta_2} P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= \frac{\alpha_0\ \alpha_1 \dots\ \alpha_{n-1}}{\beta_1\ \beta_2 \dots\ \beta_n} P_0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Deoarece sistemul trebuie să se afle într-o stare, suma probabilităţilor precedente trebuie să fie 1, deci

$$P_0 \left(1 + \frac{\alpha_0}{\beta_1} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\beta_1 \beta_2} + \dots \right) = 1.$$

Exemplul 4.2.4 *Intr-o ”staţie” sosesc ”clienţi” după legea Poisson cu parametrul λ, iar timpul de servire este o lege exponenţială cu parametrul pozitiv μ, $0 < \lambda < \mu$. Dacă este aglomeraţie se formează o coadă, iar starea sistemului la momentul $X(t)$ este un proces de naştere -moarte cu parametrii $\alpha_n = \lambda$ şi $\beta_n = \mu$.*

Particularizând ecuaţiile precedente şi notând $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ găsim

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 \\ P_2 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 = \rho^2 P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0 \end{aligned} .$$

Punem condiţia

$$P_0(1+\rho+\rho^2+\ldots) = P_0\frac{1}{1-\rho} = 1, \quad \rho < 1.$$

De aici rezultă $P_0 = 1-\rho$. Deducem $P_n = (1-\rho)\rho^n$, pentru $n = 0, 1, \ldots$, care este repartiţia geometrică. Să particularizăm această situaţie. Pentru a evita aglomeraţia dintr-o staţie de deservire, clienţii aşezaţi la coadă ar trebui să nu depăşească numărul 5, cu probabilitatea 0,99. Sosirile au loc după o lege Poisson cu parametrul $\lambda = 1,5$ clienţi pe minut. Dacă deservirea se face după o lege exponenţială, cât de repede trebuiesc aceştia serviţi ? Să determinăm deci μ.
Probabilitatea ca cel puţin 5 clienţi să fie la coadă este

$$p = \sum_{n=5}^{\infty}(1-\rho)\rho^n = \rho^5; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Pentru ca această probabilitate să fie 1-0,99 =0,01, punem condiţia

$$\rho^5 \leqslant 0,1$$

de unde găsim $\mu > 9,12$. Deci ar trebui serviţi cel puţin 10 clienţi în medie pe minut pentru a evita aglomeraţia.

■

4.3 Procese stochastice staţionare

Fie $\{X(t)\}, \ \ t \geqslant 0$, un proces stochastic.
Funcţia de repartiţie $n-$**dimensională** este dată prin formula

$$F(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n) = P\{X(t_1) < x_1,\ldots,X(t_n) < x_n\} \tag{4.20}$$

pentru orice $t_1,\ldots,t_n, \ \ n \in N$

Presupunem că funcţia de repartiţie n-dimensională satisface următoarele două condiţii:

-condiţia de **simetrie**

$$F(x_{i_1},\ldots,x_{i_n},t_{i_1},\ldots,t_{i_n}) = F(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n), \tag{4.21}$$

pentru orice permutare $i_1,\ldots,i_n$ a mulţimii $1,\ldots,n$,

-condiţia de **compatibilitate**: dacă $m < n$

$$F(x_1, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_m) =$$

$$= F(x_1, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty, t_1, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n), m + 1 \leqslant j \leqslant n. \quad (4.22)$$

Densitatea de probabilitate care se va nota $f(x_1, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Dacă procesul este cu valori discrete, analogul îl constituie

$$p(x_1, \ldots, x_m, t_1, t_2, \ldots, t_m) = P\{X_1(t_1) = x_1, X_2(t_2) = x_2, \ldots, X_n(t_n) = x_n\}$$

Exemplul 4.3.1 *Fie X_n un lanţ de variabile aleatoare identic, independent repartizate, cu $p = \frac{1}{2}$, atunci*

$$P(\{X_1(t_1) = x_1, X_2(t_2) = x_2, \ldots, X_n(t_n) = x_n\}) = 2^{-n}.$$

■

Valori caracteristice ale unui proces.

Fie $X(t)$ un proces aleator.
Media $m_X(t)$ este definită prin

$$m_X(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, t) dx, \quad (4.23)$$

unde $f(x, t)$ este densitatea de probabilitate a variabilei $X(t)$.
Autocorelaţia $R_X(t_1, t_2)$ este definită prin

$$R_X(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (4.24)$$

unde $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2)$ este densitatea de probabilitate de dimensiune doi a procesului.
Folosind media condiţionată are loc

$$M[X(t_1)X(t_2)] = M[X(t_1)M[X(t_2) \mid X(t_1)]] = M[X(t_2)M[X(t_1) \mid X(t_2)]] \quad (4.25)$$

Autocovarianţa $Cov_X(t_1, t_2)$ este definită drept covarianţa variabilelor $X(t_1)$ şi $X(t_2)$,

$$Cov_X(t_1,t_2) = M[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))].$$

Legătura dintre cele două funcţii este imediată şi constă în

$$Cov_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2). \tag{4.26}$$

Dispersia (varianţa) lui $X(t)$ este dată de formula

$$D^2[X(t)] = M[(X(t) - m_X(t))^2] = Cov_X(t,t). \tag{4.27}$$

Coeficientul de corelaţie este definit de

$$\rho_X(t_1,t_2) = \frac{Cov_X(t_1,t_2)}{\sqrt{Cov_X(t_1,t_1)}\sqrt{Cov_X(t_2,t_2)}}.$$

Exemplul 4.3.2 *Fie $X(t) = A\cos 2\pi t$, unde A este o variabilă aleatoare. Să determinăm valorile caracteristice.*

$$m_X(t) = M[A\cos 2\pi t] = M[A]\cos 2\pi t;$$
$$R_X(t_1,t_2) = M[A\cos 2\pi t_1 A\cos 2\pi t_2] = M[A^2]\cos 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2;$$
$$Cov_X(t_1,t_2) =$$
$$= R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = (M[A^2] - M^2[A])\cos 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2 =$$
$$= D^2[A]\cos 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2.$$

■

Procese multiple.

Două procese $X(t),\ Y(t)$ se numesc **independente** dacă $\forall\ k,j$ şi orice alegere $t_1,\dots,t_k$ şi $t'_1,\dots t'_j$, variabilele aleatoare multidimensionale $(X(t_1),\dots,X(t_k))$ şi $(Y(t'_1),\dots Y(t'_j))$ sunt independente.
Corelaţia încrucişată $R_{XY}(t_1,t_2)$ este definită prin

$$R_{XY}(t_1,t_2) = M[X(t_1)Y(t_2)]. \tag{4.28}$$

Procesele $X(t)$ şi $Y(t)$ se numesc **ortogonale** dacă

$$R_{XY}(t_1,t_2) = 0,\ \ \forall t_1,t_2. \tag{4.29}$$

Covarianţa încrucişată $Cov_{XY}(t_1, t_2)$ este definită prin

$$Cov_{XY}(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m_X(t_1))(Y(t_2) - m_Y(t_2))] =$$
$$= R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2). \tag{4.30}$$

Procesele se numesc **necorelate** dacă

$$Cov_{XY}(t_1, t_2) = 0, \ \forall t_1, t_2. \tag{4.31}$$

Exemplul 4.3.3 *Fie* $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$ *şi* $Y(t) = \sin(\omega t + \Theta)$ *unde* Θ *este o variabilă aleatoare repartizată uniform pe* $[-\pi, +\pi]$. *Să determinăm covarianţa încrucişată.*

Arătăm că media procesului $X(t)$ este 0.

$$m_X(t) = M[\cos(\omega t + \theta)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + x)dx = 0.$$

Analog rezultă că media procesului $Y(t)$ este 0.

$$R_{XY}(t_1, t_2) = M[\cos(\omega t_1 + \Theta)\sin(\omega t_2 + \Theta)] =$$

$$= M[-\frac{1}{2}\sin(\omega(t_1 - t_2)) + \frac{1}{2}\sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta)] = -\frac{1}{2}\sin(\omega(t_1 - t_2))$$

deoarece $M[\sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta)] = 0.$

■

Procesul $X(t)$ se numeşte **staţionar în sens restrâns** dacă $\forall t_1, \ldots, t_n$
$\in \mathbb{R}_+, n \in N, \ \ u \in \mathbb{R}_+$ are loc

$$F(x_1, \ldots x_n, t_1 + u, \ldots, t_n + u) = F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n). \tag{4.32}$$

Dacă $X(t)$ are dispersie finită şi $X(t)$ este staţionar în sens restrâns găsim:

1. $M[X(t + u)] = M[X(t)] = M[X(0 + t)] = M[X(0)] = m$;
2. $D^2[X(t + u)] = D^2[X(t)] = D^2[X(0)] = \sigma^2$;
3. $M[(X(t + u)X(t))] = M[(X(u)X(0))]$.

O consecinţă în cazul proceselor staţionare este că putem presupune $m = 0$ şi $\sigma = 1$.

Procesul $X(t)$ este **staţionar în sens larg** dacă au loc condiţiile 1-3.

Funcţie de corelaţie a unui proces staţionar în sens larg este coeficientul de corelaţie al variabilelor aleatoare $X(t)$ şi $X(t + u)$.

$$R(u) = \frac{M[X(t+u) - M[X(t+u)]]M[X(t) - M[X(t)]]}{\sqrt{D^2[X(t)]D^2[X(t+u)]}}. \tag{4.33}$$

Funcţia de corelaţie depinde doar de u şi are expresia

$$R(u) = M[(X(u)X(0))]. \tag{4.34}$$

Un proces staţionar se numeşte **continuu** dacă are loc

$$M(X(t+u) - X(t))^2 \to 0, \text{ pentru } u \to 0.$$

Dacă $X(t)$ este un proces continuu, atunci au loc:
1. $P\{\ |X(t+u) - X(t)\ | \geqslant \varepsilon\} \to 0,$ dacă $u \to 0;$
2. $\lim\limits_{u \to 0} R(u) = 1;$
3. $R(u)$ este continuă.

Exemplul 4.3.4 *Considerăm procesul de forma*

$$Z(t) = X(t)\cos\lambda t + Y(t)\sin\lambda t,\ \lambda \in R,$$

unde $X(t), Y(t)$ *sunt procese necorelate, deci* $M[XY] = M[X]M[Y]$ *ce satisfac*

$$M[X] = M[Y] = 0, \quad D^2[X] = D^2[Y] = 1.$$

Să arătăm că $Z(t)$ *este un proces staţionar.*

Pentru aceasta să calculăm funcţia de corelaţie

$$R(u) = M[X(t+u)X(t)] =$$

$$= M[X\cos\lambda(t+u) + Y\sin\lambda(t+u))(X\cos\lambda t + Y\sin\lambda t)] =$$

$$= M[(X^2\cos\lambda t\cos\lambda(t+u) + XY(\sin\lambda(t+u)\cos\lambda t + \cos\lambda(t+u)\sin\lambda t)+$$

$$+Y^2\sin\lambda t\sin\lambda(t+u)] = \cos\lambda(t+u)\cos\lambda t + \sin\lambda t\sin\lambda(t+u) = \cos\lambda u.$$

Alegem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\lambda \\ \frac{1}{2}, & -\lambda < x \leqslant \lambda \\ 1, & x > \lambda \end{cases}.$$

Avem atunci

$$\cos\lambda u = \int_{-\infty}^{\infty} \cos uxdF(x) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \cos uxdF(x),$$

de unde în virtutea teoremei rezultă că procesul este staţionar.

■

Exemplul 4.3.5 *Considerăm procesul*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k Z_k(t),$$

unde $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$*, iar* $Z_k(t) = X_k(t)\cos\lambda_k t + Y_k \sin\lambda_k t,\ \lambda_k \in R.\ X_k(t),\ Y_k(t)$ *sunt procese ce satisfac*

$$M[X_k] = M[Y_k] = 0, \quad D^2[X_k] = D^2[Y_k] = 1, \ \ k = \overline{1,n}$$

$$M[X_iX_j] = M[Y_iY_j] = 0, \ \ i \neq j, \ \ M[X_iY_j] = 0, \ \ i,j = \overline{1,n}.$$

Calculând funcţia de corelaţie, găsim

$$R(u) = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \cos\lambda_k u,$$

de unde rezultă că procesul este staţionar, asociat funcţiei de repartiţie F *care are salturi de mărimea* $\frac{1}{2}b_k^2$ *în punctele* $\pm\lambda_k$.

In literatura de specialitate F se numeşte **spectru**; dacă F este funcţie de salturi, procesul se numeşte **spectru discret**.

■

4.4 Probleme propuse

1. Fie I_n procesul Bernoulli identic şi independent repartizat. Calculaţi

$$P\{I_1 = 1, I_2 = 0, I_3 = 0, I_4 = 1\}.$$

2. Fie $D_n = 2I_n - 1$ unde I_n este procesul din problema precedentă. Calculaţi media şi dispersia.

3. Fie X un număr ales la întîmplare din $[0,1]$ şi fie dezvoltarea lui în baza 2, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 2^{-n}$, $b_n \in \{0,1\}$. Definim $X_n = b_n$, $n \in N$. Calculaţi $P\{X_1 = 0\}$ şi $P\{X_1 = 0, X_2 = 1\}$.

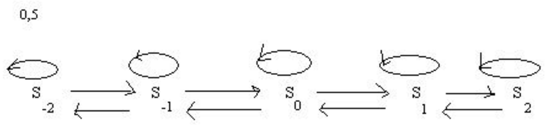


Figura 4.9: Mers aleator pe o dreapta

4. O particulă se deplasează aleator, sărind câte o unitate la dreapta cu probabilitatea 0,3 la stânga cu probabilitatea 0,2 şi rămâne pe loc cu probabilitatea 0,5. Găsiţi probabilitatea ca după patru paşi particula să nu fie mai depărtată cu o unitate faţă de origine. Iniţial particula se află în origine.

5. Arătaţi că un proces Poisson este un proces Markov, adică pentru $t_1 < t_2 < t_3$ are loc

$$P\{X(t_3) = k_3 \mid X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\} = P\{X(t_3) = k_3 \mid X(t_1) = k_1\}.$$

6. Dacă X este un proces Poisson, calculaţi următoarele probabilităţi:

$$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\},$$
$$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, X(t_3) = k_3\}.$$

7. Calculaţi autocorelaţia şi autocovarianţa unui proces Poisson.

8. Deduceţi folosind axiomatica unui proces Poisson, că probabilităţile de trecere (4.16) satisfac ecuaţia diferenţială (4.17).

9. Determinaţi expresia probabilităţilor de trecere (4.16) ale unui proces Poisson.

10. Deduceţi că intervalul de timp aleator dintre doua evenimente Poisson este repartizat exponenţial.

11. Să determinăm densitatea de probabilitate a momentului de producere a unui eveniment în cadrul unui proces Poisson.

12. La o staţie sosesc clienţi după o lege Poisson. Presupunem că aceasta se închide după apariţia clientului n să determinăm repartiţia timpului T, cât staţia rămâne deschisă.

13. Cu ce probabilitate al cincilea client al unui proces Poisson cu parametru $\lambda = 2$ este deservit în primele 20 de minute de la deschiderea staţiei ?

14. Considerăm următorul proces Markov: mulţimea stărilor are 3 elemente şi dacă la un moment dat este luată o anumită stare, la momentul următor se trece în oricare din celelalte două cu aceeaşi probabilitate. Să se studieze ergodicitatea.

15. Numărul de semnale emise de un radar este un proces Poisson cu parametrul λ. Dacă n semnale au fost observate în intervalul $(0, t)$ să determinăm probabilitatea evenimentului $\{k$ particule au fost emise în $(0, \tau)\}$ cu $\tau < t$.

16. Numărul de clienţi care ajung la o staţie într-un interval de timp este o variabilă Poisson cu parametru β, iar numărul de clienţi deserviţi este o variabilă Poisson cu parametru α. Să se determine repartiţia variabilei aleatoare N care dă numărul de clienţi care ajung în timpul deservirii unui client.

17. Arătaţi că în cazul unui proces Poisson de naştere- moarte probabilităţile $P'_n(t)$ satisfac ecuaţiile diferenţiale:

$$P'_n(t) = -(\alpha_n + \beta_n)P_n(t) + \alpha_{n-1}P_{n-1}(t) + \beta_{n+1}P_{n+1}(t), \quad n \geqslant 1,$$
$$P'_0(t) = -\alpha_0 P_0(t) + \beta_1 P_1(t).$$

18. Fie $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$ unde Θ este repartizată uniform pe $(-\pi, +\pi)$. Să determinăm media, autocorelaţia şi autovarianţa.

19. Fie X_n un lanţ de variabile normale independente, identic repartizate, cu media m şi dispersia σ^2. Determinaţi matricea de covarianţă la momentele $t_1, \ldots, t_k$ şi densitatea de probabilitate.

20. Un proces $Y(t)$ constă dintr-un semnal dorit $X(t)$ la care se adaugă zgomotul $N(t)$, deci $Y(t) = X(t) + N(t)$. Găsiţi corelaţia încrucişată dintre cele două procese, presupunînd că $X(t), N(t)$ sunt independente.

4.5 Soluţii

1. $p^2(1-p)^2$.

2. $m_X(n) = M[2I_n - 1] = 2M[I_n] - 1 = 2p - 1$ $D^2[D_n] = D^2[2I_n - 1] = 2^2 D^2[I_n] = 4p(1-p)$. Procesul reprezintă de fapt schimbarea poziţiei unei particule care se mişcă în linie dreaptă făcînd salturi de ± 1 la fiecare unitate de timp.

3. $X_1 = 0$, dacă $0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}$, deci cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Iar $P\{X_1 = 0, X_2 = 1\}$ este $\frac{1}{4}$, deoarece $\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}$.

4. Însumăm probabilităţile, ca la momentul 4, particula să se afle în stările S_{-1}, S_0, sau S_1 şi găsim 0,693.

5. Arătăm că pentru $t_1 < t_2 < t_3$ şi $k_1 < k_2 < k_3$ are loc

   $$P\{X(t_3) = k_3 \mid X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\} = P\{X(t_3) = k_3 \mid X(t_2) = k_2\}$$

   ceea ce semnifică faptul că procesul Poisson este un proces Markov. Primul membru este

   $$\frac{P\{X(t_3) = k_3, X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\}}{P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2}$$

   Calculăm expresia de la numărator

   $$P\{X(t_3) = k_3, X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\}$$

$$= P\{X(t_1) = k_1\}P\{X(t_2 - t_1) = k_2 - k_1\}P\{X(t_3 - t_2) = k_3 - k_2\}$$

iar cea de la numitor

$$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\} = P\{X(t_1) = k_1\}P\{X(t_2 - t_1) = k_2 - k_1\}.$$

Deci

$$P\{X(t_3) = k_3, X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\} = P\{X(t_3 - t_2) = k_3 - k_2\}.$$

Membrul al doilea este

$$P\{X(t_3) = k_3 \mid X(t_2) = k_2\} = \frac{P\{X(t_3) = k_3,\ X(t_2) = k_2\}}{P\{X(t_2) = k_2\}} =$$

$$P\{X(t_3 - t_2) = k_3 - k_2\}.$$

6. Folosind axiomele unui proces Poisson avem pentru $t_1 < t_2$ şi $k_1 < k_2$

$$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2\} = P\{X(t_1) = k_1\}P\{X(t_2 - t_1) = k_2 - k_1\} =$$

$$= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1} e^{-\lambda t_2}}{k_1!(k_2 - k_1)!}.$$

Dacă $k_2 < k_1$ atunci probabilitatea este 0.

Pentru a doua obţinem

$$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, X(t_3) = k_3\} =$$

$$= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}(\lambda(t_3 - t_2))^{k_3 - k_2} e^{-\lambda t_3}}{k_1!(k_2 - k_1)!(k_3 - k_2)!}.$$

7. De la variabila Poisson avem

$$M[X(t)] = \lambda t.$$

Pentru calculul autocovarianţei

$$R(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)]$$

folosim (4.25) şi avem

$$M[X(t_1)X(t_2)] = M[X(t_1)M[X(t_2)|X(t_1) = k_1]] =$$

$$= M[X(t_1)(k_1 + \lambda(t_2 - t_1)] =$$

$$= M[X^2(t_1) + \lambda(t_2 - t_1)X(t_1)] = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2.$$

Mai sus am folosit faptul că $M[X^2(t_1)] = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2$. Iar autocovarianţa este

$$Cov(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - M[X(t_1)]M[X(t_2)] = \lambda t_1.$$

Luând şi $t_2 < t_1$ deducem

$$Cov(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2).$$

8. Fie Δt suficient de mic; la momentul $t + \Delta t,\ X(t)$ ia valoarea k în următoarele două moduri:

   a. $X(t) = k$ şi nici un eveniment nu se produce în intervalul $(t, t + \Delta t)$;

   b. $X(t) = k - 1$ şi un eveniment se produce în $(t, t + \Delta t)$.

   Din condiţiile din definiţia unui proces Poisson variabilele aleatoare $X(t + \Delta t) - X(t)$ şi $X(t)$ sunt independente, iar probabilitatea evenimentului dat de a. este $p_k(t)(1-\lambda\Delta t)$, iar cea a evenimentului dat de b. este $p_{k-1}(t)\lambda\Delta t$ şi cum evenimentele de la a şi b sunt independente

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_{k-1}(t)\lambda\Delta t.$$

   Relaţia se scrie sub forma echivalentă

$$\frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

   Când $\Delta t \to 0$, găsim ecuaţia diferenţială (4.17).

9.
$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$$

   cu soluţia evidentă $p_0(t) = Ae^{-\lambda t}$. Din ipoteza 1 avem condiţia iniţială $X(0) = 0$, care determină în mod unic soluţia

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

   Pentru $k = 1$, ecuaţia (4.17) devine

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t},$$

care este o ecuaţie liniară cu soluţia

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Procedând recursiv în acest mod, găsim

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2.\dots$$

Constatăm că pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ este o variabilă aleatoare repartizată Poisson cu parametru λt.

10. Funcţia de repartiţie

$$F_\tau(x) = P\{\tau \leqslant x\} = 1 - P\{\tau > x\} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$\{\tau > x\}$ exprimă faptul că nici un eveniment nu are loc în intervalul $(t, t + x)$. Deci funcţia de repartiţie este $1 - \lambda e^{-\lambda x}, \ \ x \geqslant 0$, iar prin derivare găsim $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$, care este repartiţia exponenţială.

11. Să determinăm funcţia de repartiţie.

$$F_S(s) = P(\{X(s) = 1\} | \{X(t) = 1\}) = \frac{P(\{X(s) = 1, X(t) = 1\})}{P(\{X(t) = 1\})} =$$

$$\frac{P(\{X(s) = 1, X(t) - X(s) = 0\})}{P\{X(t) = 1\}} = \frac{P(\{X(s) = 1, X(t - s) = 0\}}{P\{X(t) = 1\})} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda s} \lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)} = \frac{s}{t}.$$

Densitatea de probabilitate este atunci

$$g(s) = \frac{1}{t} \quad, 0 \leqslant s \leqslant t,$$

care este densitatea de probabilitate a repartiţiei uniforme; deci producerea în intervalul $(0, t)$ a unui singur eveniment se face după legea uniformă.

12. Fie T_i timpul dintre sosirea clientului $i-1$ şi a clientului i (T_1 este timpul de la deschidere până la sosirea primului client). Să determinăm repartiţia variabilei $T = T_1 + \ldots + T_n$. Observăm că $\{T < t\}$ semnifică faptul că staţia s-a închis până la momentul t, deci au apărut cel puţin n clienţi, iar probabilitatea este dată de legea Poisson cu parametrul λt

$$P\{T < t\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Prin derivare găsim

$$f_T(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\lambda k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} - \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} \right) e^{-\lambda t} = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

care este o densitate de probabilitate pentru variabila Erlang.

13. Folosim problema precedentă şi avem faptul că variabila aleatore T care dă timpul la care este deservit cel de al cincilea client este repartizat Erlang. Adică

$$f_T(t) = \frac{2(2t)^4}{4!} e^{-2t}$$

şi probabilitatea este

$$\int_0^5 \frac{2(2t)^4}{4!} e^{-2t} dt.$$

14. Matricea de trecere este evident

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

satisface condiţia 1 din teorema precedentă, pe care o vom numi condiţie de ergodicitate. Fiind matrice simetrică ea admite valorile proprii reale $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$ şi forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Fie S matricea ortogonală de schimbare de bază, care are forma

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ridicând la puterea n matricea $P = SDS^t$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Mai sus s-a folosit faptul că D^n are pe diagonală puterea a n -a a elementelor de pe diagonala lui D. Deci după un număr foarte mare de paşi se poate presupune că fiecare stare este luată cu aceleaşi şanse.

15. Au loc

$$P\{k \text{ semnale emise în } (0,\tau) \mid n \text{ semnale emise în } (0,t)\} =$$
$$= \frac{P\{k \text{ semnale emise în } (0,\tau) \text{ şi } n-k \text{ semnale emise în } (\tau,t)\}}{P\{n \text{ semnale emise în } (0,t)\}} =$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k}{k!}\,\frac{e^{-\lambda(t-\tau)}(\lambda(t-\tau))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = C_n^k\left(\frac{\tau}{t}\right)^k\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-k}.$$

Se observă că se obţine variabila binomială.

16. Folosim formula probabilităţii totale în cazul continuu şi notăm cu T timpul de deservire a unui client, care este o variabilă exponenţială cu parametrul α.

$$P\{N = k\} = \int_{-\infty}^{\infty} P(\{N = k\} \mid t) f_T(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(\beta t)^k}{k!} e^{-\beta t} \alpha e^{-\alpha t} dt = \frac{\alpha \beta^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k e^{-(\alpha+\beta)t} dt =$$

$$= \frac{\alpha \beta^k}{k!} \int_0^{\infty} (\frac{x}{\alpha+\beta})^k e^{-x} \frac{dx}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha \beta^k}{k!(\alpha+\beta)^{k+1}} \Gamma(k+1) =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^k$$

care este o variabilă geometrică.

17. La momentul t, dacă sistemul precedent se află în starea S_n, vom nota $X(t) = n$. Se obţine astfel un proces Markov. Probabilitatea ca în intervalul $(t, t + \Delta t)$ să aibă loc mai mult de o tranziţie este 0. Sistemul se află în starea S_n la momentul $t + \Delta t$ în următoarele situaţii:

a. La momentul t se află în starea S_n şi nici o tranziţie nu are loc în intervalul $(t, t+\Delta t)$ cu probabilitatea $(1-\alpha_n \Delta t)(1-\beta_n \Delta t)$, care poate fi aproximată cu $1 - \alpha_n \Delta t - \beta_n \Delta t$.

b. Fiind în starea S_{n-1} la momentul t are loc o tranziţie la starea S_n în intervalul $(t, t + \Delta t)$ cu probabilitatea $\alpha_{n-1} \Delta t$.

c. La momentul t sistemul se află în starea S_{n+1} şi o tranziţie la starea S_n are loc în $(t, t + \Delta t)$ cu probabilitatea $\beta_{n+1} \Delta t$.

Notăm $P_n(t) = P(\{\ X(t)$ se află în starea $S_n\ \})$ şi facem ipoteza că că $P_n(t)$ este o funcţie derivabilă cu derivată continuă. Atunci pentru $n \geqslant 1$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\alpha_n \Delta t - \beta_n \Delta t) + \alpha_{n-1} \Delta t P_{n-1}(t) + \beta_{n+1} \Delta t P_{n+1}(t),$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \alpha_0 \Delta t) + \beta_1 \Delta t P_1(t).$$

Impărţind prin Δt

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=$$
$$=-(\alpha_n+\beta_n)P_n(t)+\alpha_{n-1}P_{n-1}(t)+\beta_{n+1}P_{n+1}(t),\ \ n\geqslant 1,$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0}{\Delta t}\Delta t=-\alpha_0P_0(t)+\beta_1P_1(t).$$

Dacă $\Delta t\to 0$, obţinem

$$P_n'(t)=-(\alpha_n+\beta_n)P_n(t)+\alpha_{n-1}P_{n-1}(t)+\beta_{n+1}P_{n+1}(t),\quad n\geqslant 1,$$
$$P_0'(t)=-\alpha_0P_0(t)+\beta_1P_1(t).$$

18. $m_X(t)=M[\cos(\omega t+\Theta)]=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{+\pi}\cos(\omega t+x)dx=0$;
$Cov_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)=M[\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)]=$
$\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{+\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(\omega(t_1-t_2))+\cos(\omega(t_1+t_2)+2x)\right)dx=\frac{1}{2}\cos(\omega(t_1-t_2))$.

19. $C_X(t_i,t_j)=\sigma^2\delta_{ij}$ unde $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$$f(x_1,\dots,x_k,X_1,\dots,X_k)=f_X(x_1)f_X(x_2)\dots f_X(x_k)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{k/2}}e^{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

20. Folosind independenţa variabilelor $X(t)$ şi $N(t)$, găsim

$$R_{XY}(t_1,t_2)=M[X(t_1)Y(t_2)]=M\left[X(t_1)(X(t_2)+N(t_2))\right]=$$
$$=M[X(t_1)X(t_2)]+M[X(t_1)N(t_2)]=$$
$$=R_{XY}(t_1,t_2)+M[X(t_1)]M[N(t_2)]=R_{XY}(t_1,t_2)+m_X(t_1)m_N(t_2).$$

Capitolul 5

Statistica matematica

5.1 Variabile de selecţie

Colectivitate statistică este o multime de obiecte (indivizi) la care se studiază o caracteristică ce poate fi evaluată numeric. Această mărime supusă întâmplarii este o variabila aleatoare notată X pe care o vom numi *variabila teoretică*.

Selecţia (eşantion, sondaj) este o colectivitate parţială. Numărul de elemente ale selecţiei se numeşte *volumul selecţiei*.
Selecţia *repetată* (cu repunere) presupune repunerea fiecărui individ in colectivitate, înainte de extragerea următorului; selecţia *nerepetată* in caz contrar.

Mulţimea datelor de selecţie

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

formează o *serie statistică*. Acestor date li se asociază variabilele aleatoare, notate X_i, cu aceaşi repartiţie dată de variabila aleatoare teoretică. Dacă selecţia este repetată atunci variabilele asociate sunt independente. Rezultatele experientelor sunt considerate ca repetate, deci variabilele X_i sunt independente şi presupuse cu aceeaşi repartiţie.
Fie k numărul datelor distincte ale selecţiei. Notăm cu n_i *frecvenţa absolută* a datei .

$$x_i, \;\; i = 1, k \;\; (n = \sum_{i=1}^{k} n_i).$$

Numărul

$$f_i = \frac{n_i}{n}, \;\; (\sum_{i=1}^{k} f_i = 1)$$

se numeşte *frecvenţă relativă*.

Variabilă aleatore de selecţie are repartiţia

$$X_s : \begin{pmatrix} x_i \\ f_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots k. \tag{5.1}$$

Aceasta se mai numeşte variabilă simplă. Dacă volumul selecţiei este mare se aleg k intervale

$$(l_0, l_1], \;\; (l_1, l_2], \;\; \cdots, \;\; (l_{k-1}, l_k]$$

în care se repartizează datele. Se alege de obicei

$$x_i = \frac{l_i + l_{i-1}}{2}, \;\; i = 1, \cdots, k \tag{5.2}$$

iar frecvenţa relativă este numărul de date cuprinse în interval.

Funcţia frecvenţelor cumulate ataşată repartiţiei (5.1) are expresia analitică

$$F_s(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \ldots & \\ \sum_{j=1}^{i} f_j, & x_{i-1} \leqslant x < x_i \quad, i = 1, 2, \ldots k. \\ \ldots & \\ 1, & x \geqslant x_k \end{cases} \tag{5.3}$$

Funcţia frecvenţelor cumulate ataşată repartiţiei (5.1) unde valorile variabilei sunt date de (5.2) este

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < l_0 \\ \ldots & \\ \sum_{j=1}^{i} f_j + \frac{x - l_i}{l_{i+1} - l_i} f_{i+1}, & l_i \leqslant x < l_{i+1} \quad, \quad i = 1, 2, \ldots k - 1. \\ \ldots & \\ 1, & x \geqslant l_k \end{cases} \tag{5.4}$$

Valorile caracteristice se grupează în

Parametrii tendinţei centrale: media, momentul centrat de ordin r, mediana, moda

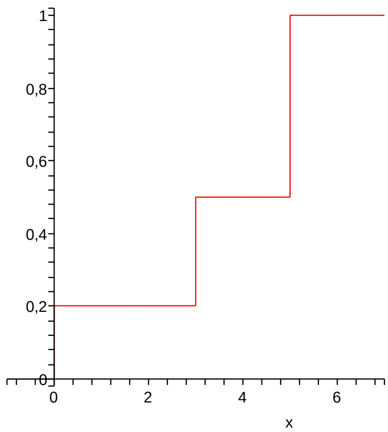


Figura 5.1: Funcţia frecvenţelor cumulate

Parametrii variabilităţii: momentul centrat de selecţie de ordin r, dispersia de selecţie, dispersia modificată, asimetria, excesul.

Momentul iniţial de selecţie de ordinul r

$$m_r = M[X_s^r] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^r \tag{5.5}$$

Media de selecţie este

$$\overline{x} = m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \tag{5.6}$$

Mediana împarte volumul de selecţie în două parţi egale. Se obişnuieşte

$$m_e = \begin{cases} x_{k+1} & n = 2k+1 \\ x_k \text{ sau } x_{k+1} & n = 2k \end{cases} . \tag{5.7}$$

Moda este valoarea cu frecvenţă maximă.

Momentul centrat de selecţie de ordin r este

$$\mu_r = M[(X_s - M[X_s])^r] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^r = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^r \qquad (5.8)$$

Dispersia de selecţie este

$$s^2 = \mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2 \qquad (5.9)$$

Dispersia modificată este

$$(s^*)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 \qquad (5.10)$$

Între cele două dispersii are loc

$$(n-1)(s^*)^2 = ns^2. \qquad (5.11)$$

Excesul este dat de formula

$$E = \frac{\mu_4}{s^4} - 3. \qquad (5.12)$$

- Dacă $E > 0$ poligonul frecvenţelor este mai ascuţit decât cel corespunzător repartiţiei normale.
- Dacă $E < 0$, curba este mai turtită decât cea normală.
- Dacă $E = 0$ curba poate fi considerată normaă.

Asimetria este dată de

$$A = \frac{\mu_3}{s^3}. \qquad (5.13)$$

- Dacă $A > 0$ repartiţia are asimetrie pozitivă.
- Dacă $A < 0$ repartiţia are asimetrie negativă.

Reprezentări grafice.

- Reprezentarea în **batoane**: Dacă variabila este dată sub forma (5.1) atunci aceasta se reprezintă grafic ca în desenul de mai jos, unde verticalele reprezintă frecvenţele absolute sau relative. Un exemplu este dat de figura (5.2).
- **Histograma** se foloseşte atunci când valorile se grupează în date. Un exemplu este dat în figura (5.3).

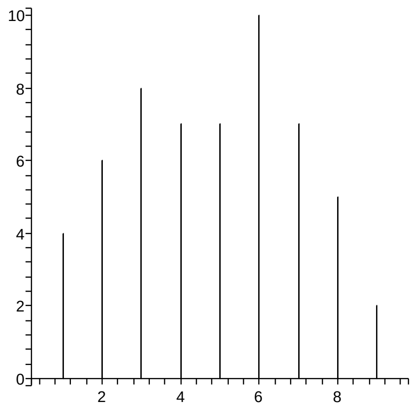


Figura 5.2: Reprezentare in batoane

Exemplul 5.1.1 *La un examen 200 de studenţi au obţinut următoarele note:*

Nota	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Număr de studentţi	*1*	*7*	*15*	*18*	*24*	*50*	*35*	*30*	*17*	*3*

Determinaţi variabila aleatoare de selecţie cu reprezentare grafică în batoane, funcţia de repartiţie de selecţie cu reprezentare grafică, asimetria şi excesul.

Variabila aleatoare asociată este

$$X_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/200 & 7/200 & 15/200 & 18/200 & 24/200 & 50/200 \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 35/200 & 30/200 & 17/200 & 3/200 \end{matrix}\Bigg)$$

Graficul este dat în figura (5.4).

Valorile caracteristice sunt $\overline{x} = 6,1,\ \ s^2 = 2,91,\ \ \mu_3 = -2,23,\ \ \mu_4 = 33,75,\ \ E = 0,98,\ \ A = 0,4$. Determinăm expresia analitică a funcţiei de repartiţie.

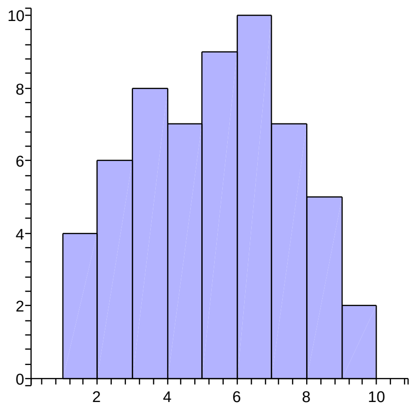


Figura 5.3: Histograma

$$F_s(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/200 & 1 \leqslant x2 \\ 8/200 & 2 \leqslant x < 3 \\ 23/200 & 3 \leqslant x < 4 \\ 41/200 & 4 \leqslant x < 5 \\ 65/200 & 5 \leqslant x < 6 \\ 115/200 & 6 \leqslant x < 7 \\ 150/200 & 7 \leqslant x < 8 \\ 180/200 & 8 \leqslant x < 9 \\ 197/200 & 0 \leqslant x < 10 \\ 1 & x \geqslant 10 \end{cases}$$

şi graficul este dat de figura (5.5).

■

Exemplul 5.1.2 *O caracteristică numerică este măsurată printr-o metoda de precizie. Abaterile de la valoarea nominală sunt*

$$-1,75/1,1/1,3/-0,2/-1,7/-0,75/0,77/0,9/-0,8/-0,9/$$

$$0/0,3/-0,3/-0,4/0,4/-0,3/0,1/0,75/0,8/1,2$$

$$1,7/0,9/1/-0,6/-1,4/-1/1,6/1,8/0,25/0,3/.$$

Formaţi variabila de selecţie prin împărţirea datelor în 5 clase

$$(-2,5;\ -1,5],\ \ (-1,5;\ -0,5],\ \ (-0,5;\ 0,5],\ \ (0,5;1,5],\ \ (1,5;\ 2,5].$$

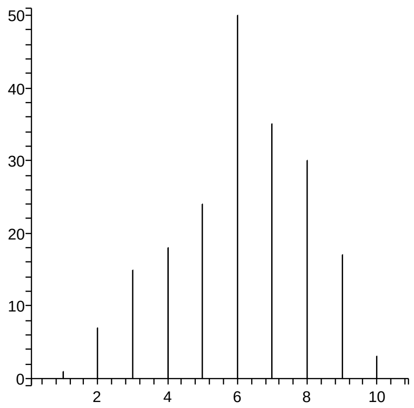


Figura 5.4: Reprezentare în batoane

şi reprezentaţi histograma. Calculaţi media, mediana, dispersia de selecţie, momentele centrate de ordin 3 si 4, asimetria şi excesul. Reprezentaţi funcţia frecvenţelor cumulate.

Variabila de selecţie este

$$X_s = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2/30 & 7/30 & 10/30 & 8/30 & 3/30 \end{pmatrix}$$

Obţinem următoarele valori $\overline{x} = 0,1, \;\; s^2 = 1,02, \quad \mu_3 = -0,39, \;\; \mu_4 = 2,31$
Pentru funcţia frecvenţelor cumulate folosim formula (5.4), care aproximează mai bine repartiţia teoretică şi al cărei grafic este dat de (5.6) iar histograma este dată de figura (5.7).

$$F_s(x) = \begin{cases} 0 & x < -2,5 \\ (x+2,5)2/30 & -2,5 \leqslant x < -1,5 \\ 2/30 + (x+1.5)7/30 & -1,5 \leqslant x < -0,5 \\ 9/30 + (x+0,5)10/30 & -0,5 \leqslant x < 0,5 \\ 19/30 + (x-0,5)8/30 & 0,5 \leqslant x < 1,5 \\ 27/30 + (x-1,5)3/30 & 1,5 \leqslant x < 2,5 \\ 1 & x \geqslant 2,5 \end{cases}$$

■

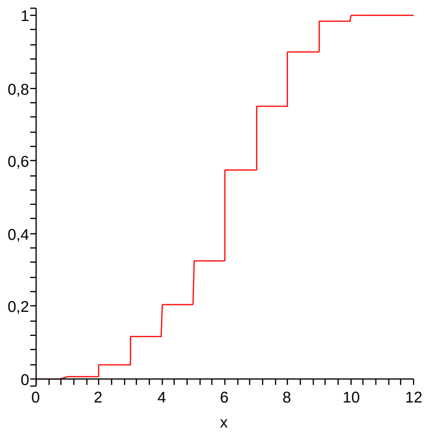


Figura 5.5: Funcţia frecvenţelor cumulate

5.2 Teoria estimaţiei

Fie $x_1, x_2, \cdots, x_n$ o selecţie repetată; o funcţie $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ se numeşte **funcţie de selecţie** sau **statistică**.
Presupunem că variabila aleatoare teoretică are repartiţie cunoscută, dar depinde de un parametru necunoscut, pe care îl notăm θ.

Aproximarea

$$\theta = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{5.14}$$

se numeşte **estimare punctuală**.
Estimarea este **absolut corectă** dacă au loc condiţiile

$$M(\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \theta \tag{5.15}$$

$$D^2(\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.16}$$

Dacă estimarea satisface condiţia (5.15) se mai numeşte estimare nedeplasată.

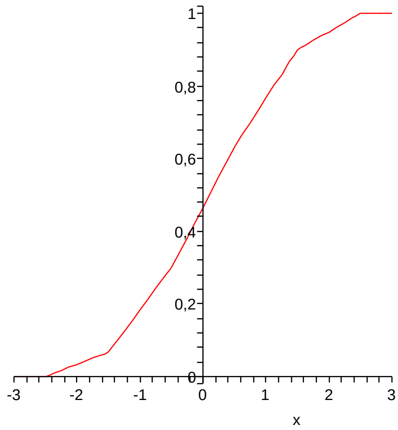


Figura 5.6: Funcţia frecvenţelor cumulate

METODA MOMENTELOR.

Dacă variabila aleatoare are densitatea de probabilitate

$$f(x, \theta_1, \cdots, \theta_s)$$

cu $\theta_1, \cdots, \theta_s$ parametrii necunoscuţi, facem selecţia repetată $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Fie X_s variabila de selecţie. Soluţia sistemului

$$M[X^r] = M[X_s^r], \;\; r = 1, \cdots, s \tag{5.17}$$

este o estimare absolut corectă a parametrilor.

Exemplul 5.2.1 *Estimaţi parametrii variabilei uniform distribuite pe intervalul* (a, b) *folosind statistica 3,1; 0,2; 1,6; 5,2; 2,1.*

Ştim că media teoretică a variabilei X este

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

iar momentul iniţial de ordin 2

$$M(X^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Momentele de selecţie sunt $M[X_s] = 2,44$ şi $M[X_s^2] = 8,73$. Formăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 2,44 \\ \dfrac{a^2 + ab + b^2}{3} = 8,73 \end{cases}$$

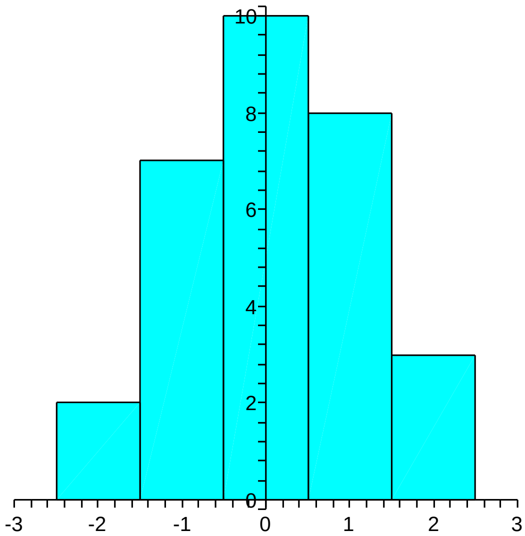


Figura 5.7: Histograma

care are soluţia $a = 0,44$ şi $b = 5.33$.

■

METODA VEROSIMILITAŢII MAXIME

Dacă variabila aleatoare are densitatea de probabilitate $f(x, \theta_1, \cdots, \theta_s)$, cu θ_i parametri necunoscuţi, facem selecţia repetată $x_1, x_2, \cdots, x_n$ şi fie X_s variabila de selecţie.

Funcţia de verosimilitate este dată de

$$V(x_1, \cdots, x_n, \theta_1, \cdots, \theta_s) = f(x_1, \theta_1, \cdots, \theta_s). \cdots f(x_n, \theta_1, \cdots, \theta_s)). \quad (5.18)$$

O estimare este dată de soluţia care maximizează sistemul, adică soluţia sistemului

$$\frac{\partial \ln V(x_1, \cdots, x_n, \theta_1, \cdots, \theta_s)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, s \quad (5.19)$$

pentru care matricea

$$\left(\frac{\partial \ln V(x_1, \cdots, x_n, \theta_1, \cdots, \theta_s)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right), \quad i, j = 1, \cdots, s$$

este negativ definită.

Exemplul 5.2.2 *Să estimăm m, dacă variabila aleatoare X este repartizată normal $N(m, \sigma^2)$.*

Funcţia de verosimilitate este, dacă presupunem σ cunoscut

$$V(m, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\ln V = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 - n \ln(\sqrt{2\pi}\sigma)$$

Prin anularea derivatei logaritmului, în raport cu m obţinem $m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

■

Într-o selecţie repetată media de selecţie $\overline{x}$ şi dispersia modificată sunt estimări absolut corecte ale mediei si dispersiei teoretice.

INTERVALE DE ÎNCREDERE

Variabila teoretică este presupusă cunoscută, dar expresia ei depinde de parametrul θ necunoscut. Dată statistica $x_1, x_2, \cdots, x_n$ considerăm două funcţii de selecţie $\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ şi $\varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ce satisfac condiţia

$$\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Dacă

$$P\left(\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) < \theta < \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right) = \delta, \quad \delta \in (0, 1)$$

spunem că intervalul

$$(\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

este **interval de incredere** pentru θ cu **nivelul de încredere** δ.

Intervale de încredere pentru medie.

1. Variabila teoretica este distribuită $N(m, \sigma^2)$, iar σ este cunoscut. Vom folosi faptul că variabila $\dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ urmează lege $N(0, 1)$. Punem condiţia

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < t_\delta\right) = \delta.$$

Condiţia revine la

$$2\Phi(t_\delta) = \delta. \tag{5.20}$$

Din tabelele funcţie Laplace determinăm t_δ, iar intervalul de încredere este

$$\overline{X} - t_\delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + t_\delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{5.21}$$

2. Variabila X este oarecare, dar $n > 30$. Din teorema limită centrală, intervalul se determină cu aceleaşi condiţii (5.20) şi (5.21).

3. Variabila teoretica este distribuită $N(m, \sigma^2)$, iar σ este necunoscut. Atunci variabila

$$\frac{\overline{X} - m}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}$$

urmează lege Student cu $n-1$ grade de libertate. Punem condiţia

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - m}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}\right| < t_\delta\right) = \delta.$$

Cu t_δ determinat din tabelele legii Student, obţinem intervalul

$$\overline{X} - t_\delta \frac{s^*}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + t_\delta \frac{s^*}{\sqrt{n}}. \tag{5.22}$$

INTERVAL DE ÎNCREDERE PENTRU MEDIA TEORETICĂ

1. Date de intrare $x_i,\ i = 1, \cdots, n,\ \ \delta,\ \ p_i$**,** σ **(dacă se cunoaşte)**

2. Calculăm media de selecţie $\overline{X}$**; dacă nu se cunoaşte dispersia, calculăm dispersia de selecţie** s^2 **sau dispersia modificată** $(s^*)^2$**.**

3. Din tabelele funcţiei Laplace Φ **sau din tabelele funcţiei Student cu** $n-1$ **grade de libertate aflăm pentru nivelul** δ **valoarea** t_δ**.**

4. **Forma intervalului de încredere este**

$$\overline{X} - t_\delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + t_\delta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exemplul 5.2.3 *Se măsoară capacitatea a 20 de condensatori şi se obţin datele, măsurate în picofarazi:*

4,4/ 4,31/ 4,4/ 4,4/ 4,65/ 4,56/ 4,71/ 4,54/ 4,36/ 4,56/

4,31/ 4,42/ 4,6/ 4,35/ 4,5/ 4,4/ 4,43/ 4,48/ 4,42/ 4,45.

Presupunând că X, capacitatea este repartizată normal $N(m, 0, 09)$ să determinăm un interval de încredere pentru medie cu nivelul 0,99.

Calculăm $\overline{x} = 4,4625,\ (s^*)^2 = 0,01221$. Din condiţia $2\Phi(t_\delta) = 0,99$ obţinem $t_\delta = 1,96$ şi intervalul de încredere $4,331 < m < 4,5940$.

■

Intervale de incredere pentru dispersie Dacă variabila teoretică este normal distribuită atunci variabila

$$\frac{ns^2}{\sigma^2}$$

urmează lege χ^2 cu $n-1$ grade de libertate. Determinăm χ_1^2 şi χ_2^2 astfel ca

$$P(\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2) = \delta.$$

Punem condiţiile

$$\begin{cases} P(\dfrac{ns^2}{\sigma^2} > \chi_1^2) = \dfrac{1+\delta}{2} \\ P(\dfrac{ns^2}{\sigma^2} > \chi_2^2) = \dfrac{1-\delta}{2} \end{cases} \tag{5.23}$$

Intervalul de încredere are forma

$$\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}. \tag{5.24}$$

INTERVAL DE ÎNCREDERE PENTRU DISPERSIA TEORETICĂ

1. Date de intrare $x_i,\ i = 1, \cdots, n,\ \delta,\ p_i$.

2. Calculăm dispersia, calculăm dispersia de selecţie s^2 sau dispersia modificată $(s^*)^2$.

3. Determinăm χ_1^2 şi χ_2^2 din tabelele legii χ^2 cu n-1 grade de libertate.

4. Intervalul este de forma

$$\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}.$$

sau

$$\frac{(n-1)(s^*)^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)(s^*)^2}{\chi_1^2}.$$

5.3 Teste de concordanţă

Variabila teoretică X cu repartiţie cunoscută are funcţia de repartiţie notată F. Facem o selecţie repetată $x_1, \cdots, x_n$ şi fie F_s funcţia de repartiţie de selecţie. Verificăm ipoteza

$$(H_0): \quad F = F_s \tag{5.25}$$

cu **pragul de semnificaţie** $\alpha \in (0,1)$. α reprezintă probabilitatea de a respinge o ipoteză adevărată (eroare I). Numărul $\delta = 1 - \alpha$ se numeşte *nivel de încredere*. **Puterea unui test** $\beta \in (0,1)$ este probabilitatea de a accepta o ipoteză falsă (eroare II).

	H_0 adevărată	H_1 adevărată
H_0 acceptată		eroare II
H_1 acceptată	eroare I	

Testul χ^2

Presupunem că variabila aleatoare teoretică are repartiţie necunoscută; notăm cu F funcţia de repartiţie.
Fie $x_1, \cdots, x_n$ o selecţie fără întoarcere şi fie F_s funcţia de repartiţie de selecţie. Testăm ipoteza (5.25) cu pragul de semnificaţie α.

Cazul 1. Repartiţia teoretică este discretă

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Repartiţia de selecţie are forma

$$X_s = \begin{pmatrix} x_i \\ f_i \end{pmatrix}.$$

Condiţia (5.25) devine

$$p_i = f_i. \tag{5.26}$$

Cazul 2. Repartiţia teoretică are densitatea de probabilitate f. Presupunem datele de selecţie grupate în intervalele

$$(l_0, l_1], \ \ (l_1, l_2], \ \ \cdots, \ \ (l_{k-1}, l_k]$$

şi fie

$$(H) \ \ p_i = P\{l_{i-1} < X < l_i\} = F(l_i) - F(l_{i-1}), \ \ i = 1, \cdots, n \tag{5.27}$$

Fie

$$U(n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \tag{5.28}$$

Variabila $U(n)$ are următoarea comportare limită

1. Dacă F are parametri cunoscuţi, atunci dacă pentru $n \to \infty$

$$U(n) \to \chi^2, \quad \text{cu } k-1 \text{ grade de libertate} \tag{5.29}$$

2. Dacă F are r parametrii necunoscuţi

$$U(n) \to \chi^2, \quad \text{cu } k-r-1 \text{ grade de libertate} \tag{5.30}$$

Punem condiţia

$$P\{U(n) > \chi^2_\alpha\} = \alpha \tag{5.31}$$

şi din tabele determinăm α.

TESTUL χ^2
1. Date de intrare $x_i, \ i = 1, \cdots, n, \ \ \alpha, \ \ p_i$

2. Estimăm cei r parametri necunoscuţi ai variabilei aleatoare teoretice.

3. Calculăm $U(n)$ cu formula (5.28).

4. Din tabelele legii χ^2 cu $k-r-1$ grade de libertate determinăm χ^2_α

5. Testare.
1. **Dacă $U(n) \leqslant \chi^2_\alpha$, acceptam ipoteza (H).**
2. **Dacă $U(n) \geqslant \chi^2_\alpha$, respingem ipoteza (H).**

Exemplul 5.3.1 *O linie tehnologică foloseşte 4 dispozitive de acelaşi tip şi folosite în aceleaşi condiţii. Urmărind defecţiunile de-a lungul unei perioade de timp obţinem*

dispozitiv	1	2	3	4	Total
număr defecţiuni n_i	46	33	39	50	168

Să se decidă cu nivelul de încredere $\alpha = 0,05$ *dacă diferenţele dintre numerele de defecţiuni este întâmplătoare sau exprimă prezenţa unor defecţiuni sistematice care trebuie remediate.*

Variabila de selecţie este

$$X_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{46}{168} & \frac{33}{168} & \frac{39}{168} & \frac{50}{168} \end{pmatrix}$$

iar variabila teoretică este

$$X_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Verificăm ipoteza

$$(H) \ \ p_i = f_i$$

Înlocuim în (5.28) şi obţinem

$$U(n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - 168\frac{1}{4})^2}{168\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{(46-42)^2 + (33-42)^2 + (39-42)^2 + (50-42)^2}{42} = 4.04$$

Determinăm χ^2_α din tabelul $H(3,1)$ şi obţinem $\chi^2_\alpha = 7.8$. Deoarece $4.04 < 7.8$, acceptam ipoteza H, deci defecţiunile sunt întâmplătoare.

■

5.4 Metoda celor mai mici pătrate

Presupunem că în urma efectuării a n experimente obţinem datele

$$(x_i, y_i),\ \ i = 1, \cdots, n.$$

Dacă coeficientul de corelaţie are modulul apropiat de 1, sau reprezentând grafic datele observăm că acestea ”se aranjează” în jurul unei drepte $y = ax + b$ atunci între variabile există o legătură liniară.

Funcţia de două variabile (care dă pătratul distanţei dintre ordonatele teoretice şi cele experimentale)

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \tag{5.32}$$

admite punct de minim de coordonate care este soluţia sistemului obţinut prin anularea derivatelor parţiale de ordinul I

$$\begin{cases} nb + a\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \tag{5.33}$$

şi are forma

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \\ b &= \overline{y} - a\overline{x} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Între variabilele aleatoare există aproape sigur o relaţie liniară de forma

$$Y = aX + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$$

Covarianţa de selecţie este dată de formula

$$c_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}). \tag{5.35}$$

care poate fi pusă sub forma

$$c_{XY} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n(n-1)}. \tag{5.36}$$

Coeficientul statistic de corelaţie este

$$r_{XY} = \frac{c_{XY}}{s_X^* s_Y^*}. \tag{5.37}$$

Dreapta de regresie este

$$\frac{y - \overline{y}}{s_Y^*} = r_{XY}\frac{x - \overline{x}}{s_X^*}. \tag{5.38}$$

Exemplul 5.4.1 *Se cunosc datele de selecţie*

x_i	2	6	8	10	14	16	18	20	22	24
y_i	5	13	16	24	27	31	35	41	43	49

Să determinăm legatura liniară dintre variabilele X şi Y.

Înlocuim în sistemul (5.33) şi obţinem

$$\begin{cases} 10b + 140a = 284 \\ 140b + 2440a = 4902 \end{cases}$$

de unde găsim relaţia liniară

$$Y = 1,3912 + 1,929X.$$

■

5.5 Probleme propuse

1. 10 rezistenţe au următoarele valori in ohmi: 900/ 1012/ 939/ 1062/ 1017/ 996/ 970/ 1079/ 1065/ 1049. Determinaţi media, dispersia de selecţie şi dispersia modificată.

2. Pe o populaţie de 100 de arzătoare de cuarţ de 250 W pentru lămpi fluorescente numerotate de la 1 la 100 s-a masurat tensiunea U în arc, în volţi.

nr.	U	nr.	U	nr.	U	nr.	U	nr.	U
1	134	21	134	41	125	61	144	81	134
2	133	22	135	42	136	62	146	82	132
3	136	23	136	43	133	63	134	83	130
4	133	24	138	44	139	64	142	84	132
5	135	25	131	45	131	65	146	85	138
6	140	26	137	46	141	66	133	86	137
7	141	27	123	47	128	67	135	87	133
8	138	28	129	48	137	68	126	88	137
9	132	29	137	49	128	69	134	89	130
10	130	30	135	50	127	70	127	90	139
11	135	31	140	51	136	71	138	91	131
12	144	32	134	52	136	72	132	92	138
13	136	33	130	53	130	73	126	93	139
14	129	34	135	54	135	74	135	94	141
15	122	35	144	55	147	75	143	95	135
16	124	36	148	56	134	76	142	96	142
17	135	37	140	57	142	77	134	97	138
18	139	38	135	58	148	78	143	98	128
19	145	39	131	59	133	79	140	99	138
20	137	40	123	60	135	80	140	100	137

Determinaţi variabila de selecţie ataşată, apoi cea prin gruparea datelor.

3. Următoarele date provin din măsurarea a 20 de rezistori, fiecare fiind înregistrat din fabricaţie cu 1000Ω:

$$980/\ 986/\ 1007/\ 1005,4/\ 1015/\ 998,7/\ 1002,5/\ 999/\ 1020/\ 1005/$$

$$1076,3/\ 998/\ 1001,5/\ 1004/\ 988/\ 1006,8/\ 1000/\ 1008,5/\ 1100/\ 985.$$

Determinaţi media de selecţie, dispersia modificată, excesul, mediana, asimetria.

4. Se cunosc 12 măsurători (în ohmi) ale rezistenţelor de intrare pentru o antenă.

69, 71	71,56
77,31	73,33
69,05	66,98
68,66	71,72
72,84	70,77
75,32	71,36

Calculaţi media şi dispersia de selecţie şi determinaţi câte un interval de încredere pentru media teoretică cu nivelul de încredere 0,95 , presupunând ca abaterea nominală este $3,6$.

Determinaţi un interval de încredere pentru dispersie, cu acelaşi nivel de încredere.

5. Arătaţi că într-o selecţie repetată (fără întoarcere) $x_i, i = 1, \cdots, n$ media de selecţie este un estimator absolut corect al mediei teoretice m. Presupunem că variabila teoretică are dispersia σ^2.

6. La o unitate de producţie sunt procesate loturi care conţin câte 25 de cipuri. Pentru 20 de loturi succesive se cunoaşte numărul de cipuri defecte.

Lot	nr. defecţiuni	Lot	defecţiuni
1	0	11	3
2	1	12	1
3	2	13	4
4	1	14	2
5	2	15	0
6	2	16	1
7	1	17	4
8	1	18	2
9	1	19	0
10	2	20	1

Estimaţi probabilitatea p, ca un singur cip din totalitatea lor, să fie defect.

7. Arătaţi că dispersia modificată poate fi pusă sub forma

$$(s^*)^2 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n(n-1)}.$$

8. Se cunoaşte faptul că 30 de date de selecţie au $\sum_{i=1}^{30} x_i = 3001607$ şi abaterea medie pătratică $s = 120$. Aflaţi media de selecţie şi intervale de încredere cu nivelul 0,9 respectiv 0,98 pentru media teoretică.

9. 17 date de selecţie au abaterea $s^* = 92$. Determinaţi un interval de incredere pentru abaterea medie pătratică cu nivelul 0,99.

10. Se fac următoarele măsurări

$$848,3/1131,2/980,4/949,1/990/1044,9/898,1/1056,6/923,7/1002,3.$$

Determinaţi media de selecţie, abaterea standard şi intervalele lor confidenţiale cu nivelul 0,95.

11. Arătaţi folosind metoda verosimilităţii maxime, că parametrul λ al variabilei exponenţiale poate fi estimat prin

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

12. Arătaţi folosind metoda verosimilităţii maxime, că parametrul σ^2 al variabilei repartizate Rayleigh poate fi estimat prin

$$\sigma^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

13. Se dau perechile de date

x_i	0,68
y_i	12,45

0,72	1,27	2,01	2,63	3,06	3,15	4	4,03	4,50
9,93	6,64	10,14	8,93	13,34	11,56	16,72	19,62	15,03

Determinaţi coeficientul de corelaţie şi dreapta de regresie.

14. Un radar emite semnale într-un interval de timp împărţit în 100 de intervale de câte 10 secunde. Se obţin următoarele frecvenţe

Număr de semnal	0	1	2	3	4	$\geqslant$5
Număr de intervale	11	30	25	20	10	4

Se poate accepta cu pragul de semnificaţie $\alpha = 0,01$ că numărul de semnale urmează o lege Poisson ? Dar cu $\alpha = 0,05$?

15. Se consideră următoarea serie statistică 66, 64, 59, 65, 81, 82, 64, 60, 78, 62, 65, 67, 67, 80, 63, 61, 62, 83, 78, 65, 66, 58, 74, 65, 80. Decideţi cu nivelul de incredere 0,99 dacă se poate presupune că selecţia provine de la o populaţie normală.

16. S-au făcut următoarele măsurători ale perechilor de date (x_i, y_i)

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	-19,8	-18,9	11	-12,3	-7,9
2	15,6	-0,9	12	-12,8	13,5
3	44,8	45,5	13	40,7	17,2
4	-20,6	1,7	14	-9,2	-30,1
5	5.6	1.7	15	36,5	57,7
6	-12,3	-22	16	-23,4	-43,1
7	48,2	51,8	17	-9	-34,3
8	-11,7	-26,7	18	41,1	65,8
9	50	41,4	19	-8,5	51,9
10	37,4	15,5	20	11,2	41,4

Determinaţi dispersiile modificate $(s_X^*)^2$, $(s_Y^*)^2$, corelaţia statistică, coeficientul de corelaţie statistică. Analizaţi existenţa unei legaturi liniare între variabile.

17. Ce devine sistemul (5.33) dacă aproximarea în sensul celor mai mici pătrate se face cu curbele indicate mai jos ?

1. $y = ax$
2. $y = ax^2 + bx + c$
3. $y = b + \dfrac{k}{x}$
4. $y = ke^{-x} + b$

5. $y = k \ln x + b$

6. $y = ax^{\alpha}$

5.6 Soluţii

1. $\overline{x} = 1009\,\Omega,\ \ s^2 = \ \ (s^*)^2 = 58,7\,\Omega$

2. Grupând datele se obţine tabelul

Tensiunea U	n_i	Tensiunea U	n_i
122	1	135	12
123	2	136	6
124	1	137	7
125	1	138	7
126	2	139	4
127	2	140	5
128	3	141	3
129	2	142	4
130	5	143	2
131	4	144	3
132	4	145	1
133	6	146	2
134	8	147	1
		148	2

Acestui tabel i se asociază imediat o variabila discretă. E mai comod să grupăm în clase de lungime 3

$$(122,125],\ 9125,128],\ (128,131],\ (134,137],\ (140,143],$$
$$(143,146],(146,149].$$

Variabila este

$$\begin{pmatrix} 123,5 & 126,5 & 129,5 & 132,5 & 135,5 & 138,3 \\ 4/100 & 5/100 & 10/100 & 14/100 & 26/100 & 18/100 \end{pmatrix.$$
$$\begin{matrix} 141,5 & 144,5 & 147,5 \\ 12/100 & 6/100 & 5/100 \end{matrix}\right).$$

3. Înlocuind în formule obţinem $\overline{x} = 1009,32\ \Omega$, $(s^*)^2 = 794,079$ mediana 1003,25, asimetria este pozitivă şi este 2,18, iar excesul 4,06, arată că datele de selecţie se reprezintă grafic printr-o curbă mai ascuţită decât cea normală. Putem reprezenta o histograma, grupând datele în subintervalele:

$$(970,980],\ (980,990],\ (990,1000],(1000,1101],\ (1010,1020],(1020,1100]$$

4. Găsim media de selecţie $\overline{x} = 71,55$, iar din tabelul funcţiei Laplace, găsim $t_\delta = 1,96$ iar forma intervalului pentru media teoretică este

$$\left(71,55 - \frac{1,96 \times 3,6}{\sqrt{12}}, 71,55 + \frac{1,96 \times 3,6}{\sqrt{12}}\right).$$

Mai întâi calculăm $s^2 = 10,05$. Folosind tabele legii χ^2 obţinem intervalul de incredere pentru dispersie

$$\left(\frac{12 \times 10,05}{23,337}, \frac{12 \times 10,05}{4,404}\right).$$

5. Deoarece selecţia este repetată putem presupune că variabilele aleatoare $x_i, i = 1, \cdots, n$ sunt independente. Atunci media de selecţie este

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Verificăm condiţia (5.15).

$$M\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M[x_i]$$

Dar datele de selecţie sunt presupuse cu aceeaşi repartiţie, deci toate au media teoretică m şi deci

$$M[\overline{x}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M[x_i] = \frac{1}{n}nm = m$$

Verificăm condiţia (5.16) folosind independenţa variabilelor.

$$D^2[\overline{x}] = D^2\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D^2[x_i] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Prin trecere la limită obţinem afirmaţia.

6. Fie X variabila care dă numărul de cipuri defecte; observăm că este o variabila Bernoulli. Fiecărui lot îi corespunde o variabilă $X_i,\ i = 1, \cdots, 20,$ iar fiecare X şi X_i sunt repartizate Bernoulli cu $n = 25$ şi p care trebuie determinat. Are loc $X = \sum_{i=1}^{20} X_i$. Media teoretică este $M[X] = np$. Din exerciţiul precedent
$$np = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} n_i}{20}.$$
Deci
$$p = \frac{28}{20 \times 25} = 0,056.$$

7. Putem scrie dispersia modificată sub forma
$$(s^*)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2) =$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^n x_i + n\overline{x}^2\right).$$
Folosind faptul că $\sum_{i=1}^n x_i = n\overline{x}$ deducem
$$(s^*)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)^2 + \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)^2\right) =$$
$$= \frac{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n(n-1)}.$$

8. Media este 100054, iar intervalele sunt $(96450, \ \ 103658)$ şi respectiv $(94958, \ \ 105150)$.

9. Se obţine $63,47 < s^* < 158,9$.

10. 982,49; 82,77; $(923,26, \ \ 1042,72)$ şi $(56,93, \ \ 151,12)$.

11. Funcţie de verosimiliate este

$$V(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Derivăm $\ln V$ şi obţinem ecuaţia

$$\frac{n}{\lambda} - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

12. Funcţie de verosimiliate este

$$V(x_1, \cdots, x_n, \sigma) = \frac{x_1 \cdots x_n}{\sigma^{2n}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma^2}}$$

Prin derivarea funcţiei $\ln V$ şi anularea derivatei găsim

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}.$$

Estimarea este nedeplasată deoarece

$$M[\sigma^2] = \frac{\sum_{i=1}^n M[x_i^2]}{2n}$$

iar momentul iniţial de ordin 2 este $2\sigma^2$.

13. $\rho = 0,71, x = 2,6, \ \ y = 12,44, \ \ s_X^* = 1,39, \ \ s_Y^* = 3,88$, iar dreapta de regresie este $\dfrac{y - 12,44}{3,88} = 0,71\dfrac{x - 2,6}{1,39}$.

14. Variabila aleatoare teoretică are parametrul λ necunoscut, pe care îl estimăm cu media de selecţie
$$\lambda = 2.$$
Calculăm probabilităţile teoretice
$$\begin{aligned} p_0 &= P\{X = 0\} = 0,135 \\ p_1 &= P\{X = 1\} = 0,27 \\ p_2 &= P\{X = 2\} = 0,27 \\ p_3 &= P\{X = 3\} = 0,18 \\ p_4 &= P\{X = 4\} = 0,09 \\ p_5 &= P\{X = 5\} = 0,055 \end{aligned}$$
Variabila
$$U(n) = \frac{(11 - 13,5)^2}{15,5} + \frac{(30 - 27)^2}{27}$$
$$= +\frac{(25 - 27)^2}{27} + \frac{(20 - 18)^2}{18} + \frac{(10 - 9)^2}{9} + \frac{(4 - 5,5)^2}{5,5} = 1,687$$
Din tabele $\chi^2_{0,01} = 13,277$ şi $\chi^2_{0,05} = 9,487$. În ambele cazuri acceptăm ipoteza.

15. Estimăm media cu $m = \overline{x} = 69$ şi dispersia cu $\sigma = s^* = 8$. Împărţim datele în intervalele $(-\infty, 62], (62, 67], (67, 71], (71, 76], (76, +\infty)$ astfel ca probabilitatea ca variabila $\dfrac{X - m}{\sigma}$ să ia valori in aceste intervale să fie 0,2. Se obţine variabila de selecţie
$$X_s = \begin{pmatrix} 60 & 64,5 & 69 & 73,5 & 78 \\ 6/25 & 11/25 & 0 & 1/25 & 7/25 \end{pmatrix}$$
Calculăm
$$U(25) = \frac{(6 - 5)^2}{5} + \frac{(11 - 5)^2}{5} + \frac{(0 - 5)^2}{5} + \frac{(1 - 5)^2}{5} + \frac{(7 - 5)^2}{5} = 16,4.$$
Din tabelele χ^2 cu 2 grade de libertate avem $\chi^2_{0,01} = 9,21$. Respingem ipoteza.

16. Mediile de selecţie sunt $\overline{x} = 9,575$, $\overline{y} = 5.82$. Abaterile medie pătratică $s^*_X = 26,82$, $s^*_Y = 35,57$

$(s^*_X)^2 = 719$, $(s^*_Y)^2 = 1265,69$, $c_{XY} = 783$, $r_{XY} = 0,82$ Putem presupune o legătură liniară, deoarece coeficientul de corelaţie este apropiat de 1, iar dreapta este

$$\frac{Y - 5,82}{35,57} = 0,82\frac{X - 9,57}{26,82}.$$

17. 1. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

2. $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

3. Facem transformarea $u = \dfrac{1}{x}, v = y$ şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + nb$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} = k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} + b \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

4. Facem transformarea $u = e^{-x}, v = y$ şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = k \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} + nb$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i e^{-x_i} = k \sum_{i=1}^{n} e^{-2x_i} + b \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i}$$

5.Facem transformarea $u = \ln x, v = y$ şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = k \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + nb$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i = k \sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i + b \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

6. Facem transformarea $u = \ln x, v = \ln y$ şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} \ln y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + n \ln a$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln y_i \ln x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \ln^3 x_i + \ln \alpha \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

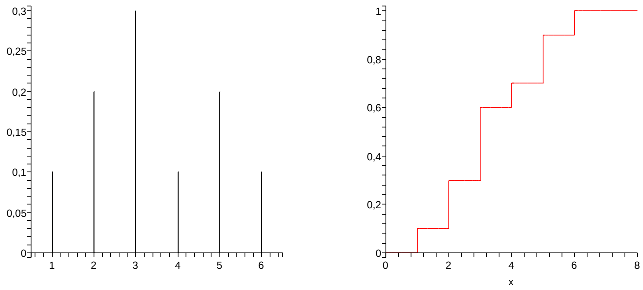
Capitolul 6

Anexe

6.1 Repartiţii uzuale

Repartiţia Bernoulli

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \begin{array}{c} 0 \leqslant k \leqslant n \\ p + q = 1 \end{array}$$
$$M[X] = np; D^2[X] = npq; \qquad \varphi(t) = (q + p\, e^{j\,t})^n$$



Densitatea de probabilitate   Funcţia de repartiţie

Figura 6.1: Repartiţia Bernoulli

Repartiţia Poisson

$$P\{X = k\} = \text{coeficientul lui } x^k \text{ din } \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i x), \quad p_i + q_i = 1$$
$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i; \; D^2[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i; \quad \varphi(t) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i e^{j\,t})$$

Repartiţia geometrică

$$P\{X=k\}=pq^{k-1},\quad \begin{matrix} 1\leqslant k<+\infty \\ p+q=1 \end{matrix}$$

$$M[X]=\frac{1}{p};\ D^2[X]=\frac{q}{p^2};\quad \varphi(t)=\frac{p\ e^{j\ t}}{1-q\ e^{j\ t}}$$

Repartiţia Poisson (cu o infinitate numărabilă de valori)

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots$$

$$M[X]=\lambda;\ D^2[X]=\lambda;\quad \varphi(t)=e^{\lambda(e^{j\ t}-1)}$$

Repartiţia hipergeometrică

$$P\{X=k\}=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},\quad \begin{matrix} 0\leqslant n\leqslant a+b, \\ k\leqslant a \end{matrix}$$

$$M[X]=\frac{an}{a+b};\ D^2[X]=\frac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Repartiţia Pascal (binomială cu exponent negativ)

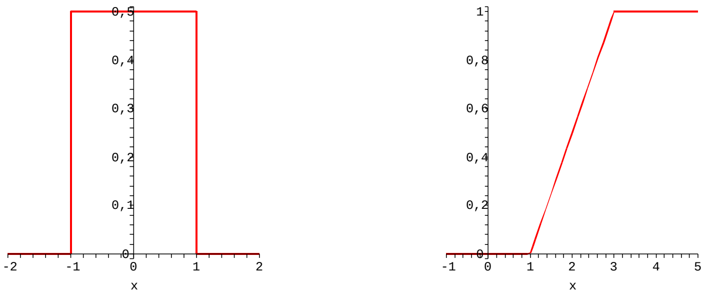
$$P\{X=k\}=C_{k-1}^{m-1}p^m q^{k-m},\quad \begin{matrix} m\geqslant 1, \\ k\geqslant m \end{matrix}$$

$$M[X]=\frac{m}{p};\ D^2[X]=\frac{mq}{p^2};\quad \varphi(t)=\left(\frac{p\ e^{j\ t}}{1-q\ e^{j\ t}}\right)^m$$

Repartiţia uniformă $X : U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$$

$$M[X] = \frac{a+b}{2};\ D^2[X] = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \varphi(t) = \frac{e^{j\,t\,b} - e^{j\,t\,a}}{j\,t\,(b-a)}$$



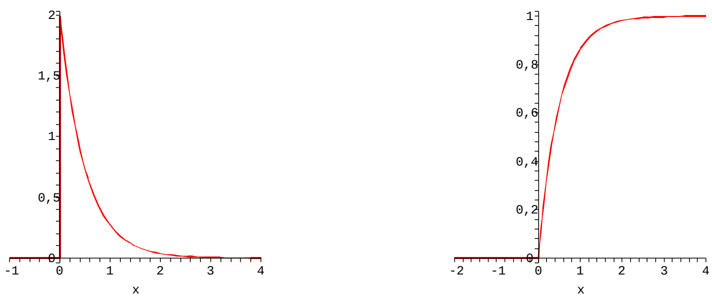
Densitatea uniformă — Funcţia de repartiţie uniformă

Figura 6.2: Repartiţia uniformă

Repartiţia exponenţială

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & , \text{dacă } t \geqslant 0, \\ 0 & , \text{dacă } t < 0,\ \mu > 0 \end{cases}$$

$$M[X] = \frac{1}{\mu};\ D^2[X] = \frac{1}{\mu^2}; \quad \varphi(t) = \frac{\mu}{\mu - j\,t}$$

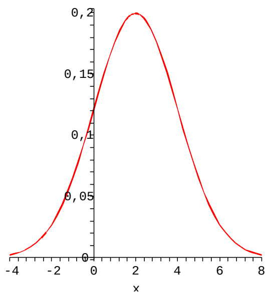


Densitatea exponeţială — Funcţia de repartiţie exponeţială

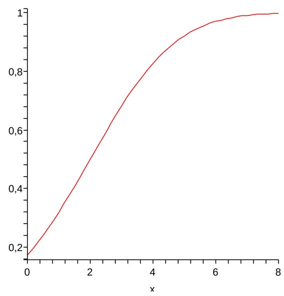
Figura 6.3: Repartiţia exponeţială

Repartiţia normală $X : N(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$M[X] = m; \ D^2[X] = \sigma^2; \quad \varphi(t) = e^{j\ m\ t - \sigma^2 t^2/2}$$



Densitatea normală

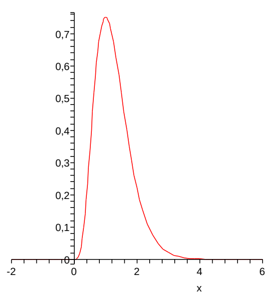


Funcţia de repartiţie normală

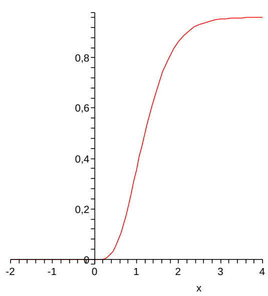
Figura 6.4: Repartiţia normală

Repartiţia Gama

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda (\lambda x)^{\alpha - 1} e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \lambda > 0$$
$$M[X] = \frac{\alpha}{\lambda}; \ D^2[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}; \quad \varphi(t) = \left(\frac{\lambda}{1 - j\ t\ \lambda} \right)^{\alpha}$$



Repartiţia Gama



Funcţia de repartiţie Gama

Figura 6.5: Repartiţia Gama

Repartiţia Erlang

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad ,\lambda>0$$

$$M[X]=\frac{n}{\lambda};\ D^2[X]=\frac{n}{\lambda^2};\quad \varphi_n(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-j\,t}\right)^n$$

Repartiţia Rayleigh

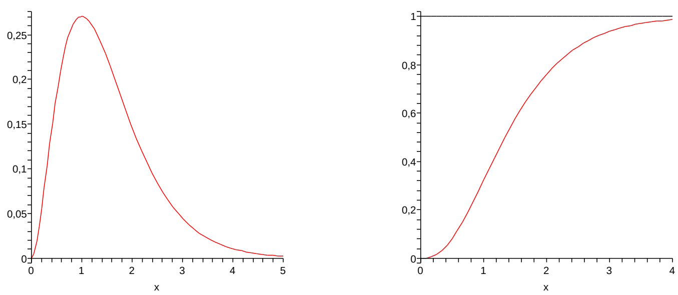
$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad \sigma>0$$

$$M[X]=\sigma\sqrt{\pi/2};\ D^2[X]=(2-\pi/2)\sigma^2$$

Repartiţia "hi pătrat"

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sigma^n}x^{n/2-1}e^{-x/2\sigma^2}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad ,n\in\mathbb{N}$$

$$M[X]=n\sigma^2;\ D^2[X]=2n\sigma^4;\quad \varphi(t)=(1-2\sigma^2 t\,j)^{-\frac{n}{2}}$$



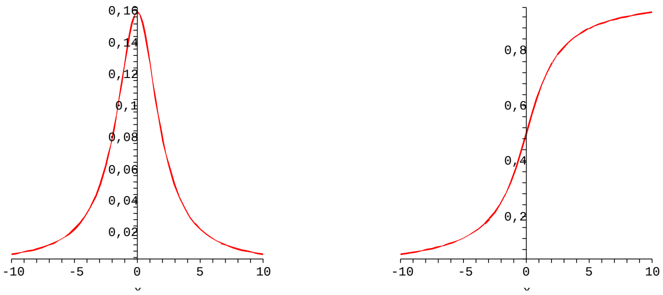
Densitatea χ^2 Funcţia de repartiţieχ^2

Figura 6.6: Repartiţia χ^2

Repartiţia Cauchy

$f(x) = \dfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}, x \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$

$\varphi(t) = e^{-\alpha|t|}$



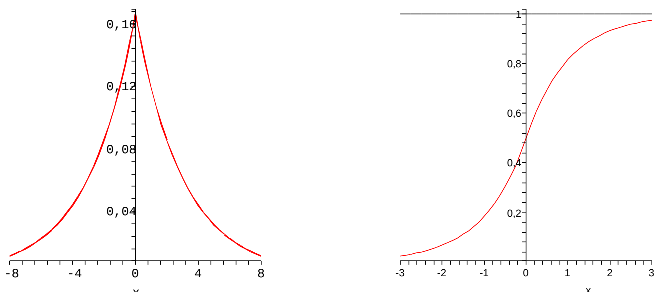
Repartiţia Cauchy Funcţia de repartiţie

Figura 6.7: Repartiţia Cauchy

Repartiţia Laplace

$f(t) = \dfrac{\mu}{2} e^{-\mu|x|}\ x \in \mathbb{R},\ \mu > 0)$

$M[X] = 0;\ D^2[X] = \dfrac{2}{\mu^2}; \quad \varphi(t) = \dfrac{\mu^2}{t^2 + \mu^2}$



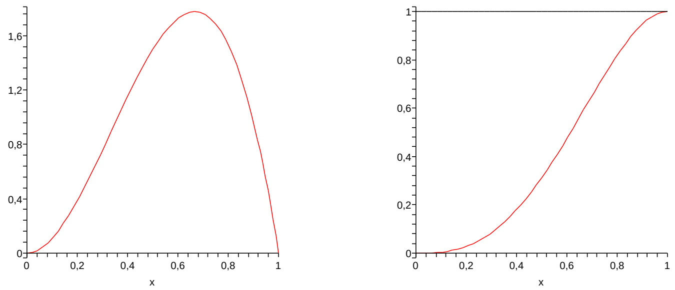
Repartiţia Laplace Funcţia de repartiţie Laplace

Figura 6.8: Repartiţia Laplace

Repartiţia Beta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{B(m,n)}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}, \ m > 0, n > 0$$

$$M[X] = \frac{m}{m+n}; \ D^2[X] = \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}$$



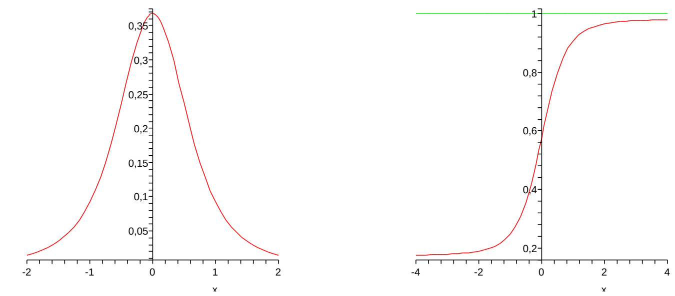
Repartiţia Beta Funcţia de repartiţie Beta

Figura 6.9: Repartiţia Beta

Repartiţia Student

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

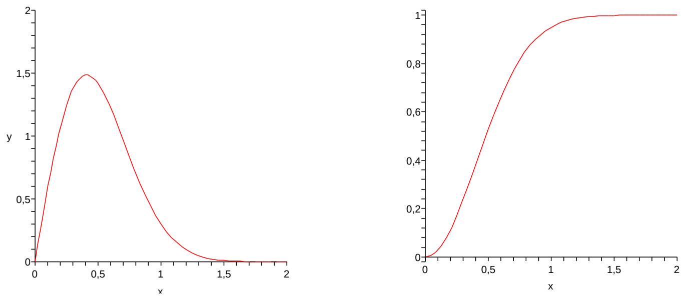
$$M[X] = 0; \ D^2[X] = \frac{n}{n-2}$$



Repartiţia Student Funcţia de repartiţie Student

Figura 6.10: Repartiţia Student

Repartiţia Weibull



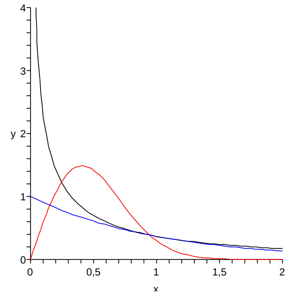
Repartiţia Weibull   Funcţia de repartiţie Weibull

Figura 6.11: Repartiţia Weibull

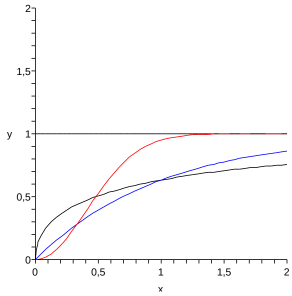
$$f(t) = \begin{cases} \lambda\alpha t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad (\lambda, \alpha \in \mathbb{R}_+).$$

$$M[X] = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

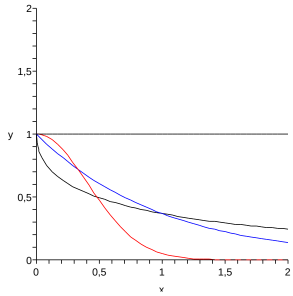
$$D^2[X] = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$



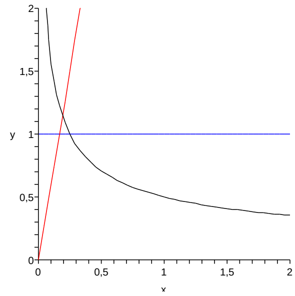
Repartiţia Weibull



Funcţia de repartiţie Weibull



Funcţii de fiabilitatea Weibull



Rate Weibull

roşu	$\lambda = 3,\ \alpha = 2$
albastru	$\lambda = 1,\ \alpha = 1$
negru	$\lambda = 1,\ \alpha = \sqrt{2}$

6.2 Funcţiile lui Euler

Funcţia gama (integrala euleriană de speţa a doua) este definită prin:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \tag{6.1}$$

este convergentă pentru $x > 0$.
Folosind de exemplu relaţia de recurenţă, funcţia gama poate fi prelungită analitic în domeniul $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$; funcţia admite poli simpli punctele $\{0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$.

Teoremă *Au loc următoarele relaţii:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ (formula de recurenţă)} \tag{6.2}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \ z \notin \mathbb{Z} \text{ (formula complementelor)} \tag{6.3}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}+z)\Gamma(\frac{1}{z}-z) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \ z \notin \{\frac{2k+1}{2}; k \in \mathbb{Z}\} \tag{6.4}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z}, \ \ z \notin Z \tag{6.5}$$

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z). \tag{6.6}$$

Valori particulare

$$\Gamma(1) = 1, \ \Gamma(n+1) = n! \tag{6.7}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{6.8}$$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, n \in \mathbb{N} \tag{6.9}$$

$$\Gamma(-n+\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}, n \in \mathbb{N}. \tag{6.10}$$

Funcţia beta (integrala euleriană de speţa întâi) este definită prin:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \ Re\, p > 0, \ Re\, q > 0 \tag{6.11}$$

Teoremă *Au loc reprezentările integrale:*

$$\Gamma(z) = 2\int_0^1 e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \;\; Re\; z > 0 \tag{6.12}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1} dt, \; Re\; z > 0 \tag{6.13}$$

$$\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt, \quad Re\; p > 0, \; Re\; q > 0 \tag{6.14}$$

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta, \;\; Re\; p > 0, \; Re\; q > 0. \tag{6.15}$$

Teoremă *Se verifică următoarele identităţi:*

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{6.16}$$

$$\beta(p,q) = \beta(q,p) \tag{6.17}$$

$$\beta(p,q+1) = \frac{q}{p+q}\beta(p,q) = \frac{q}{p}\beta(p+1,q) \tag{6.18}$$

$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1) \tag{6.19}$$

$$\beta(p,n+1) = \frac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{6.20}$$

Din (6.12) deducem:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{6.21}$$

Index

Bibliografie

[1] Ian Blake: *An Introduction to Applied Probability*, 1980

[2] G.Ciucu, V. Craiu: *Introducere în teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, l971

[3] G.Ciucu, V. Craiu, I.Săcuiu: *Probleme de teoria probabilităţilor*, Editura Tehnică, Bucureşti, l974

[4] G.Ciucu, V. Craiu, I.Săcuiu: *Probleme de statistică matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, l974

[5] A.Corduneanu: *Matematici speciale vol II*, Institutul Politehnic Iaşi, 1979

[6] Kai Lai Chung: *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*, Springer Verlag, 1982

[7] Kai Lai Chung: *Elementary Probability Theory with Stochastic Process* Springer Verlag, 1974

[8] B.V.Gnedenko: *The theory of Probability*, MIR, Moscow, 1969

[9] C.Helstrom: *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, Macmillan Publishing Company, New York, 1984

[10] C.Iacob, A.Crăciunescu: *Matematici clasice şi moderne*, Bucureşti, 1979

[11] M.Iosifescu, Gh.Mihoc, R.Theodorescu: *Teoria probabilităţilor şi statistică ma te ma tică*, Editura tehnică, Bucureşti, 1966

[12] M.Iosifescu: *Lanţuri Markov finite şi aplicaţii*, Editura Tehnică Bucureşti, 1977

[13] A. Leon-Garcia: *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989

[14] Gh.Mihoc, G.Ciucu, V.Craiu: *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970

[15] Gh.Mihoc, N.Micu: *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

[16] Gh. Mihoc, A.Muja, E.Diata: *Bazele matematice ale teoriei fiabilităţii* , Cluj, 1976

[17] E.Nenciu: *Lecţii de statistică matematică*, Universitatea A.I.Cuza, Iaşi, 1976

[18] A.Papoulis: *Probability Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Book Company, New York 1965

[19] A.Pletea, L.Popa : *Teoria probabilitatilor*, Universitatea Tehnica "Gh.Asachi", Iaşi, 1999

[20] C.Reischer, G.Sâmboan: *Teoria probabilităţilor*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1967

[21] A.Spătaru: *Fondaments de la theorie de la transmission de l'information*, Bucureşti, 1991

[22] I.Gh.Şabac, P.Cocârlan, O.Stănăşilă, A.Topală: *Matematici speciale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983

[23] P.Talpalaru, Gh.Şufaru: *Matematici speciale (Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică)*, Institutul Politehnic Iaşi , 1979

[24] P.Talpalaru, L.Popa, E.Popovici: *Probleme de teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, Universitatea tehnică Gh.Asachi, Iaşi, 1995

[25] E.Wentzel, L.Ovcharov: *Applied Problems in Probability Theory*, MIR, Moscow, 1973

Variabila normala N(0,1)

z	.00	.01	.02	.03	.04	. 05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.401 ~
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.417
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4552	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.454 -
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.463'''
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.481,
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.485,
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.49 -:
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.49~
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.49 ~
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.498:
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.49 C
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.499C

Tabelul da probabilitatea $P(0 < Z < z)$ pentru variabila normala Z

De exemplu : $P(0 < Z < .43) = .1664$.

•

Variabila hi- patrat

n	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0;001
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.82
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.81
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.26
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.46
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750	20.51
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.45
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.32
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.12
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.87
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.58
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.26
12	3.073	3.570	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.91
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	9.299	12.340	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.820	34.52
14	4.074	4.660	5.629	6.571	7.789	10.165	13.339	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.12
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037	14.339	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.69
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912	15.339	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.25
17	5.697	6.408	7.564	8.671	10.08	12.792	16.338	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.71.9	40.79
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.675	17.338	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.31
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.65	14.562	18.338	22.718	27.204	30.144	32.853	36.191	38.582	43.82
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.44	15.452	19.337	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.31
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.23	16.344	20.337	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.79
22	8.642	9.542	10.982	12.338	14.04	17.240	21.337	26.039	30.813	33.925	36.781	40.289	42.796	48.26
23	9.260	10.196	11.688	13.090	14.84	18.137	22.337	27.141	32.007	35.173	38.076	41.639	44.181	49.72
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.65	19.037	23.337	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.17
25	10.519	11.524	13.119	14.611	16.47	19.939	24.337	29.339	34.382	37.653	40.647	44.314	46.928	52.62
26	11.160	12.198	13.843	15.379	17.29	20.843	25.336	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290	54.05
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.11	21.749	26.336	31.528	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645	55.47
28	12.461	13.564	15.308	16.928	18.93	22.657	27.336	32.621	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993	56.89
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.76	23.566	28.336	33.711	39.088	42.557	45.722	49.588	52.336	58.30
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.59	24.478	29.336	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672	59.70

Exemplu : Daca alegem o variabila hi-patrat cu n = 17 grade de libertate si se da $P(V > v)$ = 0.250, atunci valoarea abscisei v este v = 20.489

n este numarul de grade de libertate

Variabila Student

n	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.180	4.525	5.797
4	1.533	2.132	2.777	3.744	4.596
5			2.571	3.365	4.030
6	1.440	1.944	2.448	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.999	3.500
8	1.397	1.860	2.307	2.897	3.356
9	1.383	1.834'	2.263	2.822	3.250
10	1.372	1.813	2.229	2.764	3.170
11	1.364	1.796	2.202	2.719	3.106
12	1.356	1.783	2.179	2.682	3.055
13	1.350	1.771	2.161	2.651	3.013
14	1.345	1.762	2.145	2.625	2.977
15	1.341	1.753	2.132	2.603	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.584	2.921
17	1.334	1.740	2.110	2.567	2.899
18	1.331	1.734	2.101	2.553	2.879
19	1.328	1.730	2.094	2.540	2.861
20	1.326	1.725	2.086	2.529	2.846
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.832
22	1.321	1.718	2.074	2.509	2.819
23	1.320	1.714	2.069	2.500	2.808
24	1.318	1.711	2.064	2.493	2.797
25	1.317	1.709	2.060	2.486	2.788
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.704	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.702	2.049	2.468	2.764
29	1.312	1.700	2.046	2.463	2.757
INF	1.282	1.645	1.960	2.327	2.576

Examplu: Daca variabila Student are n = 13 grade de libertate si
Se da $P(T > t)$ = 0.05, atunci t = 1.771 .

Examplu: Densitatea Student este simetrica. Daca alegem variabila Student
cu n = 13 grade de libertate si $P(T > t)$ = 0.95, atunci t = -1.771

n reprezinta numarul de grade de libertate