Definiţie

Definiţie

*Numim **sferă** locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct fix C. Punctul C se numeşte **centru**, iar distanţa se notează cu R si se numeşte **rază**.*

În reperul $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ alegem coordonatele centrului $C(a, b, c)$ şi avem

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{1}$$

Ecuaţia generală

Ecuaţia generală a sferei este:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0. \tag{2}$$

Deducem:

- centrul de coordonate $C(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2})$

- raza $R = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{4} - D}$.

Reprezentare parametrică

Sfera are următoarea reprezentare parametrică

$$\begin{cases} x = a + R\sin\theta\cos\varphi \\ y = b + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = c + R\cos\theta \end{cases} \tag{3}$$

unde $\varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi)$.

Dreapta tangentă la sferă

Definiţie

O dreaptă este tangentă la sferă dacă intersectează sfera în două puncte confundate.

Punem condiţia ca sistemul

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

să aibă soluţie unică. Dacă $M(x_0, y_0, z_0)$ este punctul de tangenţă, atunci condiţia de tangenţă revine la

$$l(a-x_0)+m(b-y_0)+n(c-z_0)=0.$$

Planul tangent la sferă

Definiţie

Locul geometric al dreptelor tangente la sferă se numeşte ***plan tangent*** *la sferă în* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Din condiţia de tangenţă avem

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{CM_0} = 0$$

unde $\overrightarrow{v}$ este vectorul director al dreptei.
Ecuaţia planului tangent la sferă în $M(x_0, y_0, z_0)$ este

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)+(z-c)(z_0-c)=R^2.$$

Intersecţia unei sfere cu un plan

Fie sfera $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ şi planul
$(P)\quad Ax+By+Cz+D=0$.
1. Dacă $d=d(C,(P))=\dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}<R$ atunci sfera este intersectată de dreaptă după un cerc, care are raza $r=\sqrt{R^2-d^2}$ şi centrul $C'=Pr_{(P)}C$.
2. Dacă $d>R$ sfera şi planul nu au puncte comune.
3. Dacă $d=R$, planul este tangent la sferă.

Sfera prin 4 puncte necoplanare

Fie $M_i(x_i, y_i, z_i)_{i=1,4}$, 4 puncte necoplanare, adică satisfac

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sfera determinată de cele 4 puncte are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Elipsoidul

Elipsoidul are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Proprietăţi:

1. O este centru de simetrie
2. Axele Ox, Oy, Oz sunt axe de simetrie
3. Planele xOy, yOz, xOz sunt plane de simetrie.

Reprezentare parametrică

Elipsoidul are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = a \sin\theta \cos\varphi \\ y = b \sin\theta \sin\varphi \\ z = c \cos\theta \end{cases}$$

unde $\varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi)$.

Hiperboloidul cu o pânză

Hiperboloidul cu o pânză are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

unde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Proprietăţi:

1. O este centru de simetrie
2. Axele Ox, Oy, Oz sunt axe de simetrie
3. Planele xOy, yOz, xOz sunt plane de simetrie.

Reprezentare parametrică

Hiperboloidul cu o panză are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = a\, ch\, \theta \cos \varphi \\ y = b\, ch\, \theta \sin \varphi \\ z = c\, sh\, \theta \end{cases}$$

unde $\varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}$.

Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

unde $a > 0, b > 0, c > 0$.
Hiperboloidul cu două pânze are reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = a\, sh\, \theta \cos\varphi \\ y = b\, sh\, \theta \sin\varphi \\ z = c\, ch\, \theta \end{cases}$$

unde $\varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in \mathbb{R}$.

Paraboloidul eliptic

Paraboloidul eliptic are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz,$$

unde $a > 0, b > 0$.

Paraboloidul hiperbolic

Paraboloidul hiperbolic are ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz,$$

unde $a > 0, b > 0$.

Conul

Conul este o cuadrică degenerată.
Ecuaţia suprafeţei conice circulare cu vârful în origine are

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Cilindrul

Cilindrul este o cuadrică degenerată.
Ecuaţia suprafeţei cilindrice circulare cu generatoarele paralele cu aza Oz este

$$x^2 + y^2 = a^2.$$