Spaţiu euclidian real

Fie V spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$.

Definiţie

Numim ***produs scalar*** *funcţia* $<\ ,\ >: V \times V \to \mathbb{R}$ *cu proprietăţile:*

1. $< u, u > \ \geq 0, \forall u \in V, \quad < u, u >= 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

2. $< u, v >=< v, u >, \ \forall u, v \in V$

3. $< \alpha u + \alpha' u', v >= \alpha < u, v > + \alpha' < u', v >$

$\forall \alpha, \alpha', \in \mathbb{R}, \quad u, u' \in V.$

Definiţie

Un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$ *înzestrat cu produs scalar se numeşte* ***spaţiu euclidian real****.*

Exemple

1. În $\mathbb{R}^n$, dacă $u = (x_1, \cdots, x_n)$ şi $v = (y_1, \cdots, y_n)$ atunci

$$< u, v >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

este un produs scalar.
2. În $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \text{ continuă } \}$

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

este un produs scalar.

Inegalitatea Cauchy Buniakovski Schwarz

Teoremă

Fie V un spaţiu euclidian real. Pentru orice $u, v \in V$ are loc

$$|< u, v >| \leq \sqrt{< u, u >}\sqrt{< v, v >}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Relaţia

$$< u + \alpha v, u + \alpha v > \geq 0, \forall u, v \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

este echivalentă cu

$$< u, u > + 2\alpha < u, v > + \alpha^2 < v, v > \geq 0$$

relaţie adevărată dacă $\Delta =< u, v >^2 - < u, u >< v, v > \leq 0$.

Definiţie

Numim normă funcţia $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_+$ *cu proprietăţile:*

$$\begin{array}{ll} 1. & \|u\| \geq 0, \ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_V \\ 2. & \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \\ 3. & \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \end{array},$$

pentru orice $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Teoremă

Dacă V *este spaţiu euclidian real, atunci*

$$\|u\| = \sqrt{< u, u >} \tag{2}$$

este o normă.

Unghiul a doi vectori

Definiţie

Fie $u, v \in V \setminus \{0_V\}$. Numim unghiul celor doi vectori, unghiul $\varphi \in [0, \pi)$ cu proprietatea

$$\cos\varphi = \frac{< u, v >}{\|u\|\|v\|}. \tag{3}$$

Definiţie

Vectorii $u, v \in V$ se numesc ortogonali, dacă $< u, v >= 0$.

Observaţie. Dacă $u, v, u \neq 0_v, v \neq 0_V$ sunt ortogonali, atunci $\cos\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Complement ortogonal

Definiţie

Fie V un spaţiu euclidian şi $V_1 \subset V$. Spunem că $u \in V$ este ortogonal pe V_1 dacă

$$< u, v >= 0, \ \ \forall v \in V_1.$$

Definiţie

Fie V un spaţiu euclidian şi $V_1 \subset V$. Numim complement ortogonal al lui V_1 mulţimea

$$V_1^{\perp} = \{u \in V \mid \ < u, v >= 0, \ \ \forall v \in V_1.\} \tag{4}$$

Teoremă

$V_1^{\perp}$ este subspaţiu liniar

Expresia produsului scalar într-o bază

Fie V un spaţiu euclidian de dimensiune n şi $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ o bază. Pentru $u, v \in V$ are loc

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Atunci expresia produsului scalar este

$$< u, v >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i, e_j > . \tag{5}$$

Bază ortonormală

Fie V un spaţiu euclidian de dimensiune n şi $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ o bază.

Definiţie

Baza $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ se numeşte ortonormală dacă

$$< u_i, u_j >= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \tag{6}$$

Exemplu. Baza canonică din $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1).$$

Teoremă de ortonormalizare

Teoremă

În orice spaţiu euclidian V de dimensiune n, există baze ortonormale.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{f_1, \cdots, f_n\}$ o bază. Considerăm vectorii

$$\begin{cases} g_1 = f_1 \\ g_2 = f_2 - \alpha_{21} g_1 \\ g_3 = f_3 - \alpha_{31} g_1 - \alpha_{32} g_2 \\ \dots \\ g_n = f_n - \alpha_{n1} g_1 - \alpha_{n2} g_2 - \cdots - \alpha_{n,n-1} g_{n-1} \end{cases} \tag{7}$$

Determinăm α_{ij} punând condiţiile de bază ortonormată.

$$0 =< g_1, g_2 >=< f_1, f_2 - \alpha_{21} f_1 >=< f_1, f_2 > -\alpha_{21} < f_1, f_1 >$$

De unde

$$\alpha_{21} = \frac{< f_1, f_2 >}{\|f_1\|^2} \tag{8}$$

Din

$$0 =< g_1, g_3 >=< g_1, f_3 - \alpha_{31} g_1 - \alpha_{32} g_2 >=$$

$$< g_1, f_3 > -\alpha_{31} < g_1, f_1 > -\alpha_{32} < g_1 g_2 >,$$

deducem

$$\alpha_{31} = \frac{< f_1, f_3 >}{\|f_1\|^2} \tag{9}$$

Din

$$0 =< g_2, f_3 - \alpha_{31} g_1 - \alpha_{32} g_2 >=$$
$$=< g_2, f_3 > -\alpha_{31} < g_2, g_1 > -\alpha_{32} < g_2, g_2 >$$

deducem

$$\alpha_{32} = \frac{< g_2, f_3 >}{\|g_2\|^2}. \tag{10}$$

Procedând astfel în continuare, obţinem vectorii $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ ortogonali doi câte doi.
Mulţimea de vectori de forma

$$e_i = \frac{g_i}{\|g_i\|} \tag{11}$$

este o bază ortonormală.

Produs scalar complex

Fie V spaţiu liniar peste $\mathbb{C}$.

Definiţie

Numim *produs scalar complex* *funcţia* $< , >: V \times V \to \mathbb{C}$ *cu proprietăţile:*

1. $< u, u > \ \geq 0, \forall u \in V, \quad < u, u >= 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

2. $< u, v >= \overline{< v, u >}, \ \forall u, v \in V$

3. $< \alpha u + \alpha' u', v >= \alpha < u, v > + \alpha' < u', v >$

$\forall \alpha, \alpha', \in \mathbb{C}, \quad u, u' \in V.$

În formula 2., in membrul al doilea apare conjugarea numărului complex.

Observaţie. Are loc

$$< u, \alpha v >= \overline{\alpha} < u, v > .$$

Exemple

1. În $\mathbb{C}^n$, dacă $u = (x_1, \cdots, x_n)$ şi $v = (y_1, \cdots, y_n)$ atunci

$$< u, v >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

este un produs scalar.
2. În $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{C}, f \text{ continuă } \}$

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx$$

este un produs scalar.

Matrice ortogonală

Definiţie

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte ortogonală dacă

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n.$$

Propoziţie

O matrice ortogonală are proprietăţile

1. $det(A) = \pm 1$
2. $A^{-1} = A^t$.
3. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$
4. *Produsul a două matrice ortogonale este o matrice ortogonală.*

Demonstraţie

1. $det(A \cdot A^t) = det(A)^2 = 1$; de unde $det(A) = \pm 1$.
2. Evident
3. Evident
4. $(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = I_n$.

Teoremă

Matricea de schimbare de la o bază ortornormală la o altă bază ortonormală este ortogonală.

Demonstraţie

Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ două baze ortonormale.
Fie C matricea de schimbare de bază de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$. Au loc

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_i \quad e'_j = \sum_{l=1}^{n} c_{lj} e_l.$$

Pentru $i \neq j$ are loc

$$0 =< e'_i, e'_j >= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ki} c_{kj} < e_k, e_l >= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ki} c_{kj}, \quad k = l$$

$$1 =< e'_i, e'_i >= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ki} c_{ki} < e_k, e_l > .$$

Pentru $k = l$ avem

$$1 = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}^2.$$

Deci C este ortogonală.

Consecinţă. Schimbarea coordonatelor la o schimbare de baze ortonormale se face după formula

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \dots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = C^t \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Fie V un spaţiu euclidian real, de dimensiune n.

Definiţie

Transformarea liniară $f : V \to V$ se numeşte ortogonală, dacă matricea sa relativ la o bază ortonormală este ortogonală.

Teoremă

Fie $f : V \to V$ o transformare liniară. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1. f este ortogonală
2. f păstrează produsul scalar, adică

$$< f(u), f(v) >=< u, v >, \ \forall u, v \in V$$

3. Matricea transformării relativ la orice bază ortonormală este ortogonală.

Demonstraţie

$1 \to 2$ Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ o bază ortonormală. Pentru $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ au loc

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{m=1}^{n} a_{mj} e_m.$$

Au loc

$$< f(u), f(v) >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \sum_{m=1}^{n} a_{mj} < e_k, e_m > .$$

Deoarece $\mathcal{B}$ este ortonormală are loc

$$< e_k, e_m >= \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

Rezultă

$$< f(u), f(v) >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i =< u, v > .$$

În relaţiile de mai sus s-a folosit faptul că A este ortogonală.

$2 \to 1$ rezultă din raţionamentul de mai sus.
Corolar. Dacă $f \in L(V)$ este ortogonal, atunci are loc

$$\|f(u)\| = \|u\|, \ \forall u \in V.$$

Propoziţie

1. Dacă $f \in L(V)$ este ortogonal, atunci f este injectiv.
2. Compunerea a două transformări ortogonale este o transformare ortogonală.
3. Inversa unei transformări ortogonale este o transformare ortogonală.

Transformări unitare

Fie V un spaţiu euclidian complex.

Definiţie

Transformarea $f \in L(V)$ se numeşte unitară dacă transformă o bază ortonormală într-o bază ortonormală.

Exemplu.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Teoremă

Fie $f : V \to V$ o transformare liniară. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1. f este unitară
2. f păstrează produsul scalar, adică

$$< f(u), f(v) >=< u, v >, \ \forall u, v \in V$$

3. Matricea transformării relativ la o bază ortonormală, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ satisface

$$A \cdot \overline{A}^t = \overline{A}^t \cdot A = I_n$$

Fie V spaţiu euclidian finit dimensional.

Definiţie

Transformarea $f \in L(V)$ se numeşte autoadjunctă, dacă

$$< f(u), v >=< u, f(v) >, \quad \forall u, v \in V.$$

Teoremă

1. Dacă $\Gamma = \mathbb{R}$, atunci f este autoadjunctă dacă şi numai dacă $A = A^t$, unde A este matricea transformării în orice bază a lui V.
2. Dacă $\Gamma = \mathbb{C}$, atunci f este autoadjunctă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}^t$,unde A este matricea transformării în orice bază a lui V.

Demonstraţie

1. Fie $\mathbb{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ o bază ortonormală. Demonstrăm relaţia doar pe vectorii bazei.

$$< f(e_i), e_j >=< \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j >= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} < e_k, e_j >= a_{ji}.$$

$$< e_i, f(e_j) >=< e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k >= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} < e_i, e_k >= a_{ij}.$$

2. E suficient să observăm că:

$$< e_i, f(e_j) >= \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{kj} < e_i, e_k >= \overline{a}_{ij}.$$

Teoremă

Fie V un spaţiu euclidian şi $f \in L(V)$ o transformare autoadjunctă. Atunci toate valorile proprii sunt reale.

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie şi $u \in V, u \neq 0_V$ vector propriu asociat. Din $f(u) = \lambda u$ deducem

$$< f(u), u >= \lambda \|u\|^2$$

$$< u, f(u) >= \overline{\lambda} \|u\|^2.$$

Teoremă

Fie V un spaţiu euclidian şi $f \in L(V)$ o transformare autoadjunctă. Atunci la valori proprii distincte, vectorii proprii sunt ortogonali.

Demonstraţie. Fie $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ valoari proprii distincte şi $u, u' \in V, u \neq 0_V, u' \neq 0_V$ vectorii proprii asociaţi. Din $f(u) = \lambda u, f(u') = \lambda' u'$ avem

$$< f(u), u' >=< u, f(u') >$$

echivalent cu

$$< \lambda u, u' >=< u, \lambda' u' >$$

de unde

$$(\lambda - \lambda') < u, u' >= 0.$$

Teoremă

Fie V un spaţiu euclidian real şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci există o bază ortonormală, în raport cu care h are formă canonică.