Spatii liniare

Noţiunea de spaţiu liniar

Fie Γ corpul numerelor reale $\Gamma = \mathbb{R}$ sau complexe $\Gamma = \mathbb{C}$.

Definiţie

Se numeşte spaţiu liniar (vectorial) peste Γ o mulţime V înzestrată cu cu două legi de compoziţie:
-o lege internă $"+" : VxV \to V, \quad (u, v) \to u + v, \quad \forall u, v \in V$
-o lege externă $"\cdot" : \Gamma xV \to V, \quad (\lambda, u) \to \lambda \cdot u, \quad \forall u \in V, \lambda \in \Gamma$
faţă de care sunt satisfacute axiomele:

Definiţie

1. $(u+v)+w = u+(u+w) \quad \forall u, v, w \in V$
2. $\exists 0_V \in V$, *astfel ca* $u + 0_V = 0_V + u = u, \quad \forall u \in V$
3. $\forall u \in V, \ \exists(-u) \in V$ *astfel ca* $u + (-u) = (-u) + u = 0_V$
4. $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V$
5. $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad \forall \lambda \in \Gamma, \quad u, v \in V$
6. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u, \quad \forall \lambda, \mu \in \Gamma, \ u \in V$
7. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u, \quad \forall \lambda, \mu \in \Gamma, \ u \in V$
8. $1 \cdot u = u$

Observaţii

Elementele lui V se numesc vectori, iar cele din Γ scalari.

1. $(V, +)$ formează grup abelian.

2. În axioma 6. in membrul I este + dintre scalari, iar in membrul II intre vectori.

3. În axioma 8. 1 este elementul neutru la înmulţirea din corpul Γ.

4. Notăm cu 0 elementul neutru faţă de adunarea din Γ.

Consecinţe

1. $\lambda \cdot 0_V = 0_V, \quad \forall \lambda \in \Gamma$
2. $0 \cdot u = 0_V, \forall u \in V$
3. $\lambda \cdot u = 0_V \Leftrightarrow \lambda = 0$ sau $u = 0_V$

Exemple

1. $V = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ faţă de $\mathbb{R}$.
2. $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \quad \text{funcţie}\}$faţă de $\mathbb{R}$.
3. Mulţimea vectorilor din spaţiu faţă de $\mathbb{R}$.
4. Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali $\mathbb{R}[X]$ faţă de $\mathbb{R}$.
5. Mulţimea matricelor $M_{mn}(\Gamma)$ faţă de Γ.

Subspaţiu liniar

Definiţie

Fie V un spaţiu liniar peste Γ. $V_1 \subset V$ se numeşte subspaţiu liniar dacă V_1 împreună cu restricţiile operaţiilor de adunare si înmulţire cu scalari formează o structură de spaţiu liniar.

Caracterizarea unui subspaţiu

Teoremă

Fie V un spaţiu liniar peste Γ. $V_1 \subset V$ este subspaţiu liniar dacă şi numai dacă au loc

1. $\forall u, v \in V_1$ *rezultă* $u + v \in V_1$
2. $\forall u \in V_1, \lambda \in \Gamma$ *rezultă* $\lambda \cdot u \in V_1$.

Exemple

1. $V_1 = C[a, b]$ mulţimea funcţiilor continue pe $[a, b]$ este subspaţiu in $\mathcal{F}$
2. $V_1 = \{u = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ este subspaţiu in $\mathbb{R}^3$.
3. Dacă $V_1, V_2 \subset V$ sunt două subspaţii liniare, atunci intersecţia lor este subspaţiu liniar

Acoperire (înfăşurătoare) liniară

Definiţie

Fie V spaţiu liniar peste Γ. Numim combinaţie liniară a elementelor $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V, \quad n \in \mathbb{N}$ elementul de forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n, \quad \lambda_i \in \Gamma, i = 1, \cdots, n.$$

Definiţie

Fie V spaţiu liniar peste Γ şi $A \subset V$. Numim acoperire liniară a mulţimii A, mulţimea tuturor combinaţiilor liniare finite cu elemente din A.

Notăm cu *Sp A* spaţiul generat. Deci

$$Sp\ A = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \;\; \lambda_i \in \Gamma, i = 1, \cdots, n, u_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Proprietăţi

Teoremă

Sp A este subspaţiu liniar peste Γ.

Teoremă

SpA coincide cu intersecţia tuturor subspaţiilor care conţin A.

Liniară dependenţă

Definiţie

Vectorii $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$ *se numesc* *liniar dependenţi* *dacă există scalarii* $\lambda_i, i = 1, \cdots, n, n \in \mathbb{N}$ *nu toţi nuli astfel ca*

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0_V$$

Definiţie

Vectorii $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$ *se numesc* *liniar independenţi* *dacă din*

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0_V$$

rezultă

$$\lambda_i = 0, \forall i = 1, \cdots, n$$

Exemple.Caracterizare a dependenţei liniare

1. Vectorul $\{0_V\}$ este liniar dependent.
2. Orice vector $u \neq 0_V$ este liniar independent.

Teoremă

Vectorii $u_1, u_2, \cdots, u_n$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă un vector este o combinaţie liniară a celorlalţi.

Demonstraţie.

$\Rightarrow$ Presupunem că $u_1, u_2, \cdots, u_n$ sunt liniar dependenţi. Există scalarii $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, nu toţi nuli astfel ca

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0_V$$

Schimbând eventual ordinea presupunem că $\lambda_1 \neq 0$. Împărţim prin λ_1 avem

$$u_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot u_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot u_n$$

$\Leftarrow$ Presupunem că u_1 este o combinaţie liniară de ceilalţi; Există deci $\beta_2, \cdots, \beta_n$ astfel ca

$$u_1 = \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n.$$

De unde obţinem

$$1 \cdot u_1 - \beta_2 \cdot u_2 - \cdots - \beta_n \cdot u_n = 0_V.$$

Mulţime infinită liniar independentă

Definiţie

Mulţimea $V_1 \subset V$, infinită, se numeşte liniar independentă dacă orice n elemente sunt linar independente, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definiţie

Spaţiul V se numeşte infinit dimensional dacă conţine o submulţime infinită liniar independentă.

Spaţiul $\mathcal{F}$ este infinit dimensional, deoarece mulţimea $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \cdots$ este o submulţime infinit dimensională.

Notiunile de dimensiune şi bază

Definiţie

Spaţiul V are ***dimensiunea n,*** $n \in \mathbb{N}$ *dacă conţine n elemente liniar independente şi oricare* $n+1$ *sunt liniar dependente.*

Definiţie

Nimim ***bază*** *a unui spaţiu n- dimensional oricare n vectori liniar independenţi.*

Dacă $\{u_1, \cdots, u_n\}$ formează o bază , notăm $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$.

Exemple

În spaţul $\mathbb{R}^n$, spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$ vectorii
$e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$
$\dots$
$e_n = (0, 0, \cdots, 1)$
formează o bază numită baza canonica sau uzuală.

Caracterizare a unei baze

Teoremă

Mulţimea $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ este o bază a spaţiului liniar n-dimensional V dacă şi numai dacă orice element $u \in V$ poate fi scris unic ca o combinaţie liniară de vectorii bazei.

Aceasta înseamnă că există scalarii $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Gamma$ unic determinaţi astfel ca $u = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n$.
$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ se numesc coordonatele vectorului u în baza $\mathcal{B}$.
Vom mai nota $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$ sau sub forma unei matrice:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie

$\Rightarrow$ Deoarece V are dimensiunea n şi $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ este o bază, rezultă că mulţimea $\{u, u_1, \cdots, u_n\}$ este liniar dependentă. Există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ nu toţi nuli astfel ca

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n + \alpha_{n+1} \cdot u = 0_V.$$

Observăm că $\alpha_{n+1} \neq 0$, deoarece în caz contrar ar rezulta $u_1, \cdots, u_n$ sunt liniar dependenţi.
Rezultă $u = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} \cdot u_1 - \cdots - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} \cdot u_n$.
Arătăm unicitatea scalarilor. Presupunem că

$$u = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = \gamma_1 \cdot u_1 + \cdots + \gamma_n \cdot u_n.$$

Rezultă $(\beta_1 - \gamma_1) \cdot u_1 + \cdots + (\beta_n - \gamma_n) \cdot u_n = 0_V$, deci $\beta_i = \gamma_i$.

$\Leftarrow$ Fie $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ cu proprietatea că orice vector se exprimă unic ca o combinaţie liniară.
În particular pentru vectorul 0_V există scalarii $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, unic determinaţi astfel ca

$$0_V = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n.$$

Deci $u_1, \cdots, u_n$ sunt liniar independenţi.
Cum orice $u \neq 0_V$ se exprimă ca o combinaţie liniară de $u_1, \cdots, u_n$ rezultă că $\{u, u_1, \cdots, u_n\}$ este liniar dependentă, deci spaţiul are dimensiunea n şi $\mathcal{B}$ este o bază.

Exemple

1. Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad $\leq n$, $\mathbb{R}_n[X]$ este spaţiu liniar de dimensiune $n+1$.

2. Mulţimea matricelor $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ este spaţiu liniar de dimensiune $m \cdot n$.

Caracterizarea rangului unei matrice

Teoremă

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$. Atunci are loc

$$rang\ (A) = dim\ Sp\{L_1, \cdots, L_m\} = dim\ Sp\{C_1, \cdots, C_n\}, \qquad (1)$$

unde $L_i, i = 1, \cdots, m$ sunt liniile, iar $C_i, i = 1, \cdots, n$ coloanele matricei A.

Demonstraţie. Demonstrăm că

$$rang\ (A) = dim\ Sp\{C_1, \cdots, C_n\}. \qquad (2)$$

Notăm $r = rang\ (A) \leq \min\{m, n\}$. Arătăm că

$$r \leq dim\ Sp\{C_1, \cdots, C_n\}. \qquad (3)$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că primele r coloane (schimbând eventual ordinea)sunt liniar independente .

Fie combinaţia liniară $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r = 0_{\mathbb{R}^m}$, echivalentă cu

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_r a_{1r} = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1 a_{r1} + \lambda_2 a_{r2} + \cdots + \lambda_r a_{rr} = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \cdots + \lambda_r a_{mr} = 0 \end{cases}$$

Notăm $B = (a_{ij}), i, j = 1, \cdots, r$ şi din definiţia rangului lui A, $det\ (B) \neq 0$. Primele r linii devin

$$B \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Amplificând la stânga cu B^{-1}, rezultă $\lambda_i = 0, i = 1, \cdots, r$, deci (3) este adevărată.

Reciproc

Fie

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}.$$

Dacă $i \leq r$ sau $k \leq r$, avem evident $\Delta_{ik} = 0$. Fixăm $k = 1, \cdots, n$ şi dezvoltăm Δ_{ik} după ultima linie. Avem

$$\Delta_{ik} = A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \cdots + A_r a_{ir} + det(B) a_{ik} = 0.$$

$$a_{ik} = -\frac{A_1}{det(B)} a_{i1} - \cdots - \frac{A_r}{det(B)} a_{ir}, \quad i = 1, \cdots m.$$

Deducem

$$C_k = -\frac{A_1}{det(B)}C_1 - \cdots - \frac{A_r}{det(B)}C_r.$$

Deci pentru $k = r + 1, \cdots, n$ coloanele C_k sunt liniar dependente de primele r coloane. Rezultă

$$dim\ Sp\{C_1, \cdots, C_r\} \leq r. \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă (2); teorema este demonstrată dacă observăm că $rang\ A = rang\ A^t$.

Consecinţă.

Mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen este spaţiu liniar de dimensiune $n - r$ unde

n este numărul de necunoscute

r este rangul matricei.

Matricea de schimbare de bază

Fie V un spaţiu n dimensional şi bazele $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$.
Vectorii e'_i se exprimă în mod unic in funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}$ după formulele

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \cdot e_j. \tag{5}$$

Matricea $C = (c_{ji}), i, j = 1, \cdots, n$ se numeşte matrice de schimbare de bază.
Observaţie Matricea C are pe coloane coordonatele vectorilor e'_i în baza $\mathcal{B}$ şi evident *det* $(C) \neq 0$.

Schimbarea coordonatelor unui vector la o schimbare de baza

Teoremă

Fie V un spaţiu n dimensional în care avem bazele $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ şi $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$.
Fie vectorul $u \in V$ care are coordonatele $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ şi respectiv $(\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n)_{\mathcal{B}'}$ în cele două baze.
Atunci are loc

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

Demonstraţie

Vectorul u poate fi scris în cele două baze

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \cdot e_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e_j.$$

Înlocuim (5) şi avem

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \cdot e_i' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \cdot e_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} c_{ji} \alpha_i') \cdot e_j$$

Din unicitatea exprimării unui vector avem

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji}\alpha'_i, \quad \forall j = 1, \cdots, n$$

Matriceal devine

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

Deoarece matricea C este nesingulară, afirmaţia este dovedită.

Dacă notăm

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \cdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

relaţia (6) devine

$$X' = C^{-1}X. \tag{7}$$