Transformări

Noţiunea de transformare liniară

Fie V şi W spaţii liniare peste Γ, unde $\Gamma = \mathbb{R}$ sau complexe $\Gamma = \mathbb{C}$.

Definiţie

Se numeşte transformare (operator) liniară funcţia $f : V \to W$ dacă satisface

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in V$
2. $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u), \quad \forall u \in V, \ \alpha \in \Gamma.$

Proprietăţi

Propoziţie

Dacă f este o transformare liniară, atunci au loc

1. $f(0_V) = 0_W$

2. $f(-u) = -f(u), \ \ \forall u \in V.$

Demonstraţie. 1. $f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot f(0_V) = 0_W$.
2. Din $u + (-u) = 0_V$ deducem $f(u) + f(-u) = 0_W$, adică $f(-u) = -f(u)$.

Spaţiul transformărilor liniare

Fie V şi W spaţii liniare peste Γ, unde $\Gamma = \mathbb{R}$ sau complexe $\Gamma = \mathbb{C}$. Notăm

$$L(V, W) = \{f : V \to W, \ \ f \text{ transformare liniară}\}.$$

Teoremă

$L(V, W)$ este spaţiu liniar peste Γ.

Demonstraţie.
Definim operaţiile

$$f, g \in L(V, W) \quad (f + g)(u) = f(u) + g(u), \quad \forall u \in V.$$

$$f \in L(V, W), \ \ \alpha \in \Gamma, \quad (\alpha \cdot f)(u) = \alpha \cdot f(u).$$

Alte operaţii cu transformări

Teoremă

Fie U, V, W *spaţii liniare peste* Γ *şi* $f \in L(U, V)$, $g \in L(V, W)$. *Atunci* $g \circ f \in L(U, W)$

Teoremă

Fie $f \in L(U, V)$ *o transformare liniară bijectivă. Atunci există* f^{-1} *şi* $f^{-1} \in L(V, U)$.

Nucleul şi imagine

Definiţie

Numim nucleu al transformării liniare $f : V \to W$ mulţimea

$$Ker\ f = \{u \in V \mid f(u) = 0_W.\}$$

Definiţie

Numim imagine a transformării liniare $f : V \to W$ mulţimea

$$Im\ f = \{v \in W \mid \exists u \in V,\ f(u) = v\}.$$

Proprietăţi

Propoziţie

Fie $f : V \to W$ *o transformare liniară atunci*

1. $\operatorname{Ker} f$ *este subspaţiu liniar în* V.

2. $\operatorname{Im} f$ *este subspaţiu liniar în* W.

Propoziţie

Fie $f : V \to W$ *o transformare liniară atunci*

1. f *este injectivă dacă şi numai dacă* $\operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

2. f *este surjectivă dacă şi numai dacă* $\operatorname{Im} f = W$.

Teoremă

1. Dacă $f \in L(V, W)$ atunci f transformă un sistem de vectori liniar dependenţi într-un sistem de vectori liniar dependenţi.

2. Dacă $f \in L(V, W)$ este injectivă atunci f transformă un sistem de vectori liniar independenţi într-un sistem de vectori liniar independenţi.

Demonstraţie. 1. Presupunem că $u_1, u_2, \cdots, u_n$ sunt liniar dependenţi; există $\alpha_i \in \Gamma$ nu toţi nuli astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0_V.$$

Aplicăm f şi avem

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) = 0_W.$$

2. Presupunem că $u_1, u_2, \cdot, u_n$ sunt liniar independenţi. Fie

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) = 0_W,$$

care implică

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i) = 0_W,$$

Morfisme

Definiţie

Fie $f : V \to W$ o transformare liniară atunci f se numeşte izomorfism dacă f este bijectivă.

Dacă $V = W$, atunci f se numeşte endomorfism. Notam $L(V)$ mulţimea tuturor endomorfismelor.

Endomorfismul liniar $f : V \to V$ se numeşte automorfism, dacă f este bijectivă.

Rangul şi defectul unei transformări

Definiţie

*Numim **rangul** transformării $f : V \to W$ liniare dimensiunea subspaţiului $Im\, f$.*

Definiţie

*Numim **defectul** transformării $f : V \to W$ liniare dimensiunea subspaţiului $Ker\ f$.*

Transformări liniare între spaţii finit dimensionale

Fie V, W două spaţii liniare finit dimensionale, astfel ca

$$\dim V = n, \quad \dim W = m, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Fie $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ o bază în V şi $\mathcal{B}_2 = \{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ o bază în W. Au loc

$$\begin{array}{c} f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m \\ f(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m \\ \cdots \\ f(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \cdots + a_{mn}f_m \end{array}.$$

Relaţiile sunt echivalente cu:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} g_j, \quad \forall i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

Definiţie

Matricea

$$A = A_f^{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = (a_{ji}), j = 1, \cdots m, i = 1, \cdots, n$$

se numeşte matricea transformării în perechea de baze $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.

Observaţie. Matricea are pe coloane coordonatele vectorilor $f(e_i)$ în baza din W.

Teoremă

Între mulţimea transformărilor liniare $L(V, W)$ şi mulţimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$ există o corespondenţă bijectivă.

Demonstraţie.$\Rightarrow$ Fie $f \in L(V, W)$, unde $dim(V) = n, \;\; dim(W) = m$. Dacă folosim notaţiile predente, avem pentru orice $u \in V, w \in W$

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad w = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j. \tag{2}$$

Demonstraţie.

Au loc

$$w = f(u) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i) f_j$$

Deducem

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \quad j = 1, \cdots, m \tag{3}$$

Dacă notăm $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, relaţia (3) devine

$$Y = A \cdot X. \tag{4}$$

$\Leftarrow$ Oricare ar fi matricele
$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma), \quad X \in \mathcal{M}_{n,1}(\Gamma), \quad Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\Gamma)$, relaţia (4) defineşte o transformare liniară.

Consecinţe

1. Tranformarea identic nulă, $f: V \to W, \ \ f(u) = 0_W$, are matricea $O_{m,n}$
2. Transformarea identică $f: V \to V, \ \ f(u) = u$ are matricea $A = I_n$.
3. Dacă $f, g \in L(V, W)$ au matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$ atunci $f + g$ are matricea $A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$.
4. Dacă $\alpha \in \Gamma, \ f \in\in L(V, W)$, iar f are matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$, atunci transformarea $\alpha \cdot f$ are matricea $\alpha \cdot A \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$.

Compunerea transformărilor

5. Fie U, V, W spaţii liniare peste Γ cu $dim(U) = n,\ dim(V) = m,\ dim(W) = p,\ \ m, n, p \in \mathbb{N}$. Fie $f \in L(U, V),\ g \in L(V, W)$. Are sens compunerea $g \circ f \in L(U, W)$.

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ U & \rightarrow & V & \rightarrow & W \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & A \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma) & & B \in \mathcal{M}_{p,m}(\Gamma) & \end{array}.$$

Atunci transformării $g \circ f$ îi corespunde matricea $B \cdot A \in \mathcal{M}_{p,n}(\Gamma)$.

Inversarea unei transfromări

6. Dacă $V = W$ şi $f \in L(V)$ cu matricea $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ este o transformare inversabilă, atunci transformării f^{-1} îi corespunde matricea A^{-1}.

Relaţia dintre rang şi defect

Fie V, W spaţii liniare peste Γ cu $dim(U) = n$ şi $dim(W) = m$.

Teoremă

Fie $f \in L(U, W)$ atunci are loc

$$dim(Im(f)) + dim(ker\ f) = n.$$

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\Gamma)$ matricea lui f într-o pereche de baze. Atunci $f(u) = w$ înseamnă

$$A \cdot X = Y.$$

Dacă $w \in Im(f)$ atunci sistemul de mai jos este compatibil

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n} = y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n} = y_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn} = y_m \end{cases}.$$

Sistemul este echivalent cu

$$C_1 x_1 + \cdots + C_n x_n = Y, \tag{5}$$

unde $C_1, \cdots, C_n$ sunt coloanele matricei A.
Relaţia (5) exprimă faptul că $Y \in Sp\{C_1, \cdots, C_n\}$.
Ştim că $rang(A) = dim(Sp\{C_1, \cdots, C_n\})$, deci
$rang(A) = dim(Im(f))$.

Pe de altă parte $ker\ f$ reprezintă mulţimea soluţiilor unui sistem liniar omogen, cu dimensiunea $n - rang(A)$, de unde concluzia.

Teoremă

Fie $f \in L(V)$ cu $\dim(V) = n$ şi $\mathcal{B} = \{e_i, \cdots, e_n\}$ o bază în V, în care f are matricea $A \in M_n(\Gamma)$.
Fie $\mathcal{B}' = \{e'_i, \cdots, e'_n\}$ o altă bază în V, în care f are matricea $A' \in M_n(\Gamma)$.
Fie C matricea de schimbare de la baza $\mathcal{B}$ la $\mathcal{B}'$.
Are loc

$$A' = C^{-1} \cdot A \cdot C. \tag{6}$$

Demonstraţie.

Calculăm în două moduri $f(e'_j)$.

$$f(e'_j) = f(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} f(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_{ij}) e_k.$$

$$f(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} c_{ki} a'_{ij}) e_k.$$

Rezultă

$$A \cdot C = C \cdot A'.$$

Valori şi vectori proprii

Definiţie

Fie V un spaţiu liniar peste Γ, unde $\Gamma = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ şi $f \in L(V)$.
$\lambda \in \Gamma$ se numeşte valoare proprie dacă există $u \in V,\ u \neq 0_V$ astfel ca

$$f(u) = \lambda u. \tag{7}$$

Vectorul u se numeşte vector propriu.

Mulţimea tuturor vectorilor proprii se numeşte spectrul operatorului şi se notează cu $\sigma(f)$.

Teoremă

Fie $\lambda \in \Gamma$ o valoare proprie.
1. Mulţimea $V_\lambda = \{u \in V | f(u) = \lambda u\}$ este subspaţiu liniar în V.
2. Oricare ar fi $u \in V_\lambda$ are loc $f(u) \in V_\lambda$.

Demonstraţie. 1. Dacă $u, u' \in V_\lambda$ rezultă că $u + u' \in V_\lambda$. Dacă $\alpha \in V_\lambda$, $u \in V_\lambda$ atunci $\alpha u \in V_\lambda$.
2. Fie $u \in V$ astfel ca $f(u) = \lambda u$. Rezultă $f(f(u)) = \lambda f(u)$.

V_λ se numeşte subspaţiu propriu.

Teoremă

Dacă $\lambda, \lambda' \in \Gamma$ sunt valori proprii distincte, iar u, u' sunt vectorii proprii corespunzatori, atunci u şi u' sunt liniar independenţi.

Demonstraţie. Dacă u, u' ar fi liniar dependenţi, ar exista $\alpha \in \Gamma, \alpha \neq 0$ astfel ca $u' = \alpha u$, Aplicând f deducem :

$$\lambda' \alpha u = \lambda' u' = f(u') = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha \lambda u$$

De unde

$$\alpha(\lambda' - \lambda)u = 0_V$$

ceea ce antrenează , prin absurd, $\lambda = \lambda'$.

Teoremă

Dacă V este spaţiu liniar n-dimensional peste Γ, atunci orice $f \in L(V)$ are cel puţin o valoare proprie în Γ.

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ matricea transformării într-o bază fixată $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Dacă $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ din condiţia $f(u) = \lambda u$ găsim

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică

Se obţine

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemul are soluţie nebanală dacă

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

Ecuaţia (8) se numeşte ecuaţie caracteristică.

Forma diagonală

Definiţie

Spunem că o transformare liniară admite forma diagonală, dacă există o bază în care matricea este diagonală.

Teoremă

Dacă spaţiul liniar V admite o bază de vectori proprii, atunci în această bază transformarea liniară admite formă diagonală.

Demonstraţie. Fie $\lambda_i \in \Gamma$ valori proprii şi $\{u_1, \cdots, u_n\}$ o bază de vectori proprii. Atunci $f(u_i) = \lambda_i u_i$, adică matricea are pe diagonală valorile proprii λ_i, iar în rest 0.

Lema lui Gersgorin

Lemă

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pentru orice $i = 1, \cdots, n$ fie

$$r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i\}.$$

Are loc

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

unde $\sigma(A)$ este spectrul transformării liniare de matrice A.

Demonstraţie. Fie λ o valoare proprie, astfel ca există $x_i, i = 1, \cdots, n$ nu toţi nuli astfel ca

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Fie i astfel ca $|x_i| = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ de unde $x_i \neq 0$. Ecuaţia i este

$$a_{i1}x_1 + \cdots + (a_{ii} - \lambda)x_i + \cdots + a_{in} = 0.$$

Deducem

$$(a_{ii} - \lambda)x_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j,$$

de unde

$$|a_{ii} - \lambda||x_i| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}||x_j|.$$

Urmează

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq r_i.$$

Polinom caracteristic

Definiţie

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$. Polinomul

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) \tag{9}$$

se numeşte polinom caracteristic.

Teoremă

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ şi $P(\lambda)$ polinomul caracteristic. Atunci au loc:
1. A şi A^t au acelaşi polinom carateristic.
2.
$P(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \cdots + a_n$
unde $a_n = det(A)$.
3. Date $A, B \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ şi $C \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ nesingulară astfel ca $B = C^{-1}AC$ atunci A şi B au acelaşi polinom caracteristic.

Demonstraţie

$P(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)+$polinom de grad $\leq n-2 =$
$(-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$.
Dacă $\lambda = 0$ deducem $a_n = det(A)$.

Consecinţe.

1 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = Tr(A)$
2. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = det(A)$.

Teorema Cayley-Hamilton

Teoremă

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\Gamma)$ şi P polinomul caracteristic. Atunci

$$P(A) = 0.$$