Segment orientat

Fie S spaţiul geometric tridimensional cu axiomele lui Euclid. Orice pereche de puncte din S, notată (A, B) se numeşte **segment orientat.**

Dacă $A \neq B$, atunci direcţia dreptei determinate se numeşte **direcţia segmentului** (A, B).

Segmentele (A, B) şi (B, A) se numesc **opuse.**

Lungimea unui vector este numarul real şi pozitiv, care reprezintă **distanţa** dintre A şi B. Notăm $d(AB)$.

Două segmente (A, B) şi (C, D) se numesc **egale** dacă $A = C$ şi $B = D$.

Relaţia de echipolenţă

Segmentele (A, B) şi (C, D) se numesc **echipolente** dacă segmentele orientate (A, D) şi (B, C) au acelaşi mijloc. Notăm $(A, B) \sim (C, D)$.

Observaţii.

1. $(A, A) \sim (B, B)$.

2. Dacă $A \neq B$ atunci $(A, B) \sim (C, D)$ dacă şi numai dacă

-$d(A, B) = d(C, D)$

-$AB \parallel CD$

-B şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei AC.

Relaţia de echipolenţă

Segmentele (A, B) şi (C, D) se numesc **echipolente** dacă segmentele orientate (A, D) şi (B, C) au acelaşi mijloc. Notăm $(A, B) \sim (C, D)$.

Observaţii.

1. $(A, A) \sim (B, B)$.

2. Dacă $A \neq B$ atunci $(A, B) \sim (C, D)$ dacă şi numai dacă

-$d(A, B) = d(C, D)$

-$AB \parallel CD$

-B şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei AC.

Vector liber

Relaţia de echipolenţă este o **relaţie de echivalenţă**, adică au loc:
- $(A, B) \sim (A, B)$
- $(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow (C, D) \sim (A, B)$
- dacă $(A, B) \sim (C, D)$ şi $(C, D) \sim (E, F)$ atunci $(A, B) \sim (E, F)$.

O relaţie de echivalenţă împarte mulţimea segmentelor orientate în clase de echivalenţă, a căror mulţime o notăm V_3.
O clasă de echivalenţă se numeşte **vector liber** şi se notează $\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{v}$.
Vectorul liber $\overrightarrow{AB}$ este mulţimea tuturor segementelor orientate echipolenţi cu (A, B).

Vector liber

Relaţia de echipolenţă este o **relaţie de echivalenţă**, adică au loc:

- $(A, B) \sim (A, B)$
- $(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow (C, D) \sim (A, B)$
- dacă $(A, B) \sim (C, D)$ şi $(C, D) \sim (E, F)$ atunci $(A, B) \sim (E, F)$.

O relaţie de echivalenţă împarte mulţimea segmentelor orientate în clase de echivalenţă, a căror mulţime o notăm V_3.
O clasă de echivalenţă se numeşte **vector liber** şi se notează $\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{v}$.
Vectorul liber $\overrightarrow{AB}$ este mulţimea tuturor segementelor orientate echipolenţi cu (A, B).

Vector liber

Relaţia de echipolenţă este o **relaţie de echivalenţă**, adică au loc:
- $(A, B) \sim (A, B)$
- $(A, B) \sim (C, D) \Rightarrow (C, D) \sim (A, B)$
- dacă $(A, B) \sim (C, D)$ şi $(C, D) \sim (E, F)$ atunci $(A, B) \sim (E, F)$.
O relaţie de echivalenţă împarte mulţimea segmentelor orientate în clase de echivalenţă, a căror mulţime o notăm V_3.
O clasă de echivalenţă se numeşte **vector liber** şi se notează $\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{v}$.
Vectorul liber $\overrightarrow{AB}$ este mulţimea tuturor segementelor orientate echipolenţi cu (A, B).

Adunarea vectorilor liberi

Definim adunarea a doi vectori liberi

$$+ : V_3 \times V_3 \to V_3$$

astfel: daţi vectorii liberi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$, vectorul suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ este clasa de echivalenţă a diagonalei paralelogramului determinat de cei doi vectori.

Adunarea nu depinde de alegerea reprezentanţilor.

Adunarea vectorilor liberi

Definim adunarea a doi vectori liberi

$$+ : V_3 \times V_3 \to V_3$$

astfel: daţi vectorii liberi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$, vectorul suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ este clasa de echivalenţă a diagonalei paralelogramului determinat de cei doi vectori.
Adunarea nu depinde de alegerea reprezentanţilor.

Înmulţirea cu scalari

Definim operaţia de înmulţire a unui vector liber cu un scalar astfel:

$$\cdot : \mathbb{R} \times V_3 \to V_3$$

astfel: pentru $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\overrightarrow{AB}$ vector liber prin înmulţirea lor înţelegem vectorul liber :

- $\overrightarrow{AC}$ dacă $\lambda > 0$, A, B, C coliniare, $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ au aceeaşi orientare şi $d(A, C) = \lambda d(A, B)$.
- dacă $\lambda = 0$
- $\overrightarrow{AD}$ dacă $\lambda < 0$, A, B, D coliniare, $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AB}$ au orientări diferite şi $d(D, A) = -\lambda d(A, B)$.

Spaţiul vectorilor liberi

Teoremă

Mulţimea V_3 înzestrată cu cele două legi formează un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$.

Reper cartezian (ortogonal). Considerăm în S un triedru ortogonal $Oxyz$, format din 3 semidrepte Ox, Oy, Oz, astfel ca cele 3 drepte sunt ortogonale doua câte două. Fie pe cele 3 drepte punctele U_1, U_2, U_3 şi vectorii $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{j} = \overrightarrow{OU_2}, \overrightarrow{k} = \overrightarrow{OU_3}$ astfel ca $d(OU_1) = d(OU_2) = d(OU_3) = 1.$,

Spaţiul vectorilor liberi

Teoremă

Mulţimea V_3 înzestrată cu cele două legi formează un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$.

Reper cartezian (ortogonal). Considerăm în S un triedru ortogonal $Oxyz$, format din 3 semidrepte Ox, Oy, Oz, astfel ca cele 3 drepte sunt ortogonale doua câte două. Fie pe cele 3 drepte punctele U_1, U_2, U_3 şi vectorii $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OU_1}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OU_2}$, $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OU_3}$ astfel ca $d(OU_1) = d(OU_2) = d(OU_3) = 1.$,

Dimensiunea spaţiului V_3

Fie $\overrightarrow{v} \in V_3$ un vector liber. Există un unic punct M astfel ca $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$ şi care se numeşte **vector de poziţie.**
Proiectăm punctul M pe axele Ox, Oy, Oz în punctele M_1, M_2, M_3 respectiv. Avem
$\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{j}, \overrightarrow{OM_3} = z\overrightarrow{k}$.
Are loc

$$\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \tag{1}$$

Teoremă

Mulţimea $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este o bază în spaţiul V_3. Deci V_3 are dimensiunea 3.

Demonstraţie

Se arată că vectorii $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ sunt liniar independenţi. Fie $\lambda_1 \overrightarrow{i} + \lambda_2 \overrightarrow{j} + \lambda_3 \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ şi presupunem că $\lambda_3 \neq 0$ atunci are loc:

$$\overrightarrow{k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\overrightarrow{i} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\overrightarrow{j}$$

ceea ce înseamnă că în particular segmentul OU_3 este paralel cu planul xOy, absurd. Dacă $\lambda_2 = 0$ atunci ar rezulta $\overrightarrow{k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\overrightarrow{i}$ deci OU_3 ar fi paralel cu Ox, absurd.

Din relaţia (1), orice sistem de forma $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este liniar dependent.

Notăm

$$d(OM) = \|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{v}\|$$

şi o numim lungime sau norma vectorului.

Demonstraţie

Se arată că vectorii $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ sunt liniar independenţi. Fie $\lambda_1 \overrightarrow{i} + \lambda_2 \overrightarrow{j} + \lambda_3 \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ şi presupunem că $\lambda_3 \neq 0$ atunci are loc:

$$\overrightarrow{k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\overrightarrow{i} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\overrightarrow{j}$$

ceea ce înseamnă că în particular segmentul OU_3 este paralel cu planul xOy, absurd. Dacă $\lambda_2 = 0$ atunci ar rezulta $\overrightarrow{k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\overrightarrow{i}$ deci OU_3 ar fi paralel cu Ox, absurd.

Din relaţia (1), orice sistem de forma $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este liniar dependent.

Notăm

$$d(OM) = \|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{v}\|$$

şi o numim lungime sau norma vectorului.

Direcţie în spaţiu

Fie $\mathcal{D}$ mulţimea tuturor dreptelor din spaţiul S. Două drepte d, d' sunt **paralele în sens larg** dacă sunt paralele sau coincid.

Numim **direcţie** mulţimea tuturor dreptelor paralele în sens larg cu o dreaptă d..

Numim **vector director** al unei direcţii orice vector nenul având un reprezentant paralel cu d.

Fie doi vectori directori ai aceleiaşi direcţtii:

$$\overrightarrow{v} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{v}_1 = l_1\,\overrightarrow{i} + m_1\,\overrightarrow{j} + n_1\,\overrightarrow{k}.$$

Atunci

$$\overrightarrow{v}_1 = \alpha\overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad \text{vectorii sunt liniar dependenţi}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{l_1}{l} = \frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n} = \alpha.$$

Direcţie în spaţiu

Fie $\mathcal{D}$ mulţimea tuturor dreptelor din spaţiul S. Două drepte d, d' sunt **paralele în sens larg** dacă sunt paralele sau coincid. Numim **direcţie** mulţimea tuturor dreptelor paralele în sens larg cu o dreaptă d..

Numim **vector director** al unei direcţii orice vector nenul având un reprezentant paralel cu d.

Fie doi vectori directori ai aceleiaşi directţii:

$$\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{v}_1 = l_1\overrightarrow{i} + m_1\overrightarrow{j} + n_1\overrightarrow{k}.$$

Atunci

$$\overrightarrow{v}_1 = \alpha\overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad \text{vectorii sunt liniar dependenţi}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{l_1}{l} = \frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n} = \alpha.$$

Direcţie în spaţiu

Fie $\mathcal{D}$ mulţimea tuturor dreptelor din spaţiul S. Două drepte d, d' sunt **paralele în sens larg** dacă sunt paralele sau coincid. Numim **direcţie** mulţimea tuturor dreptelor paralele în sens larg cu o dreaptă d..
Numim **vector director** al unei direcţii orice vector nenul având un reprezentant paralel cu d.
Fie doi vectori directori ai aceleiaşi directţii:

$$\overrightarrow{v} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{v}_1 = l_1\,\overrightarrow{i} + m_1\,\overrightarrow{j} + n_1\,\overrightarrow{k}.$$

Atunci

$$\overrightarrow{v}_1 = \alpha\overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad \text{vectorii sunt liniar dependenţi}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{l_1}{l} = \frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n} = \alpha.$$

Produs scalar

Fie $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$ doi vectori liberi şi $\theta \in [0, \pi]$ unghiul dintre doi reprezentanţi.

Definiţie

Numim produs scalar numărul real dat de

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{w}\| \cos\theta. \tag{2}$$

Dacă unul dintre vectori este $\overrightarrow{0}$, *atunci produsul este 0.*

Produsul scalar are proprietăţile produsului scalar din definiţia spaţiilor euclidiene.

Consecinţe

1. $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$
2. Are loc inegalitatea Cauchy Schwarz

$$|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| \leq \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\|.$$

3. Au loc $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$, $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = 0$, $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$ şi $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1$, $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1$, $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$
4. Dacă $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v}' = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$ atunci

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}' = xx' + yy' + zz'.$$

Aplicaţii

1. Lungimea unui vector $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
2. Unghiul a doi vectori

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

3. Cosinuşii directori ai unei direcţii . Fie $\overrightarrow{v} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}$ un vector director. Acestui vector i se asociază doi versori

$$\overrightarrow{u} = \pm\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = \pm\frac{l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Cosinuşii directori

Se numesc **cosinuşi directori** numerele

$$a = \pm\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\ b = \pm\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\ c = \pm\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Au loc

$$\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{u} = \cos\alpha,\ \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{u} = \cos\beta,\ \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{u} = \cos\gamma,$$

unde α, β, γ sunt unghiurile pe care direcţia le face cu Ox, Oy, Oz.
Deci un versor are expresia

$$\overrightarrow{u} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\beta\,\overrightarrow{j} + \cos\gamma\,\overrightarrow{k}$$

4. **Teorema cosinusului.** Fie triunghiul ABC şi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Atunci $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ deci

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$$

5. **Proiecţii.** Fie $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$. Proiecţia scalară a lui $\overrightarrow{w}$ pe $\overrightarrow{v}$ este prin notată $pr_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{w}$. Are loc

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\| pr_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{w}$$

4. **Teorema cosinusului.** Fie triunghiul ABC şi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Atunci $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$ deci

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$$

5. **Proiecţii.** Fie $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$. Proiecţia scalară a lui $\overrightarrow{w}$ pe $\overrightarrow{v}$ este prin notată $pr_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{w}$. Are loc

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\| pr_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{w}$$

Produs vectorial

Definiţie

Fie $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$. *Numim produs vectorial, vectorul notat* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} \in V_3$ *astfel:*
Dacă $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *sunt coliniari, atunci* $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Dacă nu sunt coliniari atunci $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ *are*

- *direcţia este perpendiculară pe planul celor doi vectori*
- *lungimea este aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, adică* $\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \sin\theta$
- *sensul este dat de "regula burghiului"*

Regula burghiului

Matematic regula burghiului exprimă alegerea unuia dintre cele două sensuri posibile ale vectorilor , perpendiculari pe planul paralelogramului, astfel ca determinantul matricei de trecere de la baza $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ la baza $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\}$ să fie pozitiv.

Proprietăţi

Au loc

1. $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}, \quad \forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V_3$
2. $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sunt coliniari (liniar independenţi).
3. $\overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2) = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}_2$
4. $\overrightarrow{v} \times (\lambda \overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$.
5. $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$
   $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$

6. Dacă $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v}' = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$ atunci

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Aplicaţii

1. **Aria triunghiului** *ABC* este

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

2. **Identitatea lui Lagrange**

$$(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})^2 + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2\|\overrightarrow{w}\|^2.$$

3. **Momentul unei forţe.** Fie A un punct în spaţiu şi $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{PQ}$ o forţă cu momentul de aplicaţie P. Se numeşte momentul în A al forţei $\overrightarrow{F}$, produsul vectorial $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{F}$.

Produsul mixt

Definiţie

Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V_3$. Se numeşte produs mixt numărul real

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}).$$

Dacă $\overrightarrow{a} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j} + z_1 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = x_3 \overrightarrow{i} + y_3 \overrightarrow{j} + z_3 \overrightarrow{k}$ atunci

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Proprietăţi

1. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$ dacă şi numai dacă vectorii sunt coplanari (liniar dependenţi).
2. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \pm$ volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.
3. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$
4. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$.

Dublul produs vectorial

Definiţie

Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V_3$. Se numeşte dublul produs vectorial, vectorul $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$.

Are loc formula

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \end{vmatrix}.$$