Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială
Dr. C.O. Tărniceriu
Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații
Matrice și determinanți
Sisteme de ecuații liniare.
Spații vectoriale.
Definiții, exemple și proprietăți generale
Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Suport de curs
Curs I-II

Bibliografie

- C. Fetecau, Algebra liniara si geometrie diferentiala, Editura Tehnica-Info, Chisinau, 2006
- A. Vieru, C. Fetecau, Probleme de algebra liniara si geometrie diferentiala, Editura Tehnica-Info, Chisinau, 2006
- I. Craciun, Gh. Procopiuc, Al. Neagu, C. Fetecau, Curs de algebra liniara, geometrie analitica si diferentiala si programare, Rotaprint, Institutul Politehnic, Iasi, 1984
- N. Papaghiuc, C. Calin, Algebra liniara si Geometrie, Editura Performantica, Iasi, 2003

CURS I

- Matrice și determinanți.
- Sisteme de ecuații liniare.

Matrice și determinanți.

Definiție.

Se numește **matrice reală cu** m **linii și** n **coloane** (și se va numi matrice de tip (m, n)), o funcție care asociază fiecărei perechi (i, j) cu $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ un unic număr real notat a_{ij}. Se folosește notația

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} .$$

Mulțimea tuturor matricelor reale de tip (m, n) o vom nota prin $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Numerele a_{ij} cu $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ se numesc **elementele matricei**.

Matrice și determinanți.

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Dacă $m = n$, atunci matricea A se numește **matrice pătratică** iar $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se va nota prin $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă $m = 1$, atunci matricea A se numește **matrice linie** și deci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

iar dacă $n = 1$, atunci matricea A se numește **matrice coloană** și deci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Matrice și determinanți.

Spunem că A este **matricea nulă** dacă are toate elementele 0. Matricea pătratică

$$I_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

se numește **matricea unitate de ordinul** n.

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații

Matrice și determinanți

Sisteme de ecuații liniare.

Spații vectoriale.

Definiții, exemple și proprietăți generale

Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

Definiție

Prin **suma a două matrice** $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ înțelegem o nouă matrice $C = A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ale cărei elemente sunt suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice. Astfel dacă $A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ iar $B = (b_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ atunci $C = A + B$ este definită de $C = (c_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ cu

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij},\ \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\ .$$

Matrice și determinanți.

Definiție

Prin **produsul matricei** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ **cu scalarul** $\alpha \in \mathbb{R}$ se înțelege o nouă matrice, de aceleași dimensiuni, obținută prin înmulțirea tuturor elementelor lui A cu scalarul α. Astfel dacă $A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ iar $\alpha \in \mathbb{R}$ este un scalar oarecare, atunci αA este definită de

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} = (\alpha a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}.$$

Matrice și determinanți.

Teoremă

Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmații:

(a) $A + B = B + A$;

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(c) $A + 0 = A$;

(d) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

(e) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

(f) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Matrice și determinanți.

Definiție

Prin **produsul matricelor** $A = (a_{i,j})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $B = (b_{j,k})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ k=\overline{1,p}}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ se înțelege o nouă matrice $C = (c_{i,k})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,p}}} := AB$, ale cărei elemente sunt date prin:

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \;\; i = \overline{1,n}, \;\; k = \overline{1,p} \; .$$

Observație: Prin urmare, $c_{i,k}$ este “produsul liniei i din A cu coloana k din B”, adică elementul $c_{i,k}$ (situat la intersecția liniei i cu coloana k) se obține din sumarea produselor elementelor liniei i a matricei A cu elementele coloanei k a matricei B.

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială
Dr. C.O. Tărniceriu
Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații
Matrice și determinanți
Sisteme de ecuații liniare.
Spații vectoriale.
Definiții, exemple și proprietăți generale
Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

Exerciții:

1. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ și $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Calculați

$$AB = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [ax + by + cz] \text{ și că}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ az & bz & cz \end{bmatrix}.$$

Matrice și determinanți.

2. Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculați A^n, unde $n \in \mathbb{N}^*$ (matricea A^n este, prin definiție, $A^n := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$).

3. Să se efectueze diverse operații cu următoarele matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Matrice și determinanți.

Teoremă

Fie trei matrice A, B și C astfel încât dimensiunile lor permit efectuarea operațiilor indicate mai jos și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmații:

(a) $A(BC) = (AB)C$;

(b) $A(B + C) = AB + AC$;

(c) $(B + C)A = BA + CA$;

(d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

(e) $I_m A = A I_n = A$

(amc onsiderat că $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$).

Observație: Înmulțirea matricelor nu este comutativă. Astfel, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci se pot efectua produsele AB și BA, dar există exemple pentru care $AB \neq BA$.

Matrice și determinanți.

4. Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ și $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Calculați AB și BA. Calculați și AI_2 și I_2B.

Matrice și determinanți.

Definiție

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se numește **transpusa matricei** A (și o vom nota prin A^t) matricea obținută prin interschimbarea liniilor și coloanelor lui A, adică

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

5. Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Scrieți A^t.

Teoremă

Fie două matrice A, B și C astfel încât dimensiunile lor permit efectuarea operațiilor indicate mai jos și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmații:

(a) $\left(A^t\right)^t = A$;

(b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;

(c) $(A+B)^t = A^t + B^t$;

(d) $(AB)^t = B^t A^t$.

Definiție

O matrice pătratică A care are proprietatea că $A = A^t$ se numește *matrice simetrică*.

Matrice și determinanți.

Definiție

Fie o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se numește **determinant** al matricei A, și se notează cu $\det A$ sau cu $|A|$, un număr real definit recurent în modul următor:

(a) dacă $n = 2$, atunci $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

(b) dacă $n > 2$, atunci

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} D_{1i} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} D_{1n} \; ,$$

unde D_{1i} este determinantul matricei pătratice de ordinul $n-1$ obținută prin eliminarea primei linii si a coloanei i din matricea A, pentru $i = \overline{1, n}$.

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații

Matrice și determinanți

Sisteme de ecuații liniare.

Spații vectoriale.

Definiții, exemple și proprietăți generale

Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

Observații

1. Prin definiția de mai sus, calcularea unui determinant de ordin n se reduce la calcularea a n determinanți de ordin $n-1$.
2. În cazul particular $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ obținem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Matrice și determinanți.

Pentru $n = 3$ se obține *regula lui Sarrus (copiind primele două linii sub matricea A)*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{3}$$

3. În definiția de mai sus de calcul al unui determinant s-a considerat dezvoltarea după prima linie, dar se poate considera (în mod echivalent) și dezvoltarea după orice altă linie sau coloană.

Matrice și determinanți.

Numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ se numește **complementul algebric corespunzător liniei** i **și coloanei** j, pentru $i, j = \overline{1, n}$. Mai precis, în matricea A, suprimăm linia i și coloana j și obținem o matrice de ordin $(n-1)$ al cărei determinant este D_{ij}.

Folosind complemenții algebrici corespunzători unei linii sau unei coloane, putem calcula determinantul unei matrice printr-o formulă asemănătoare celei din definiție, dezvoltând după o linie sau coloană oarecare a matricei.

Matrice și determinanți.

Teoremă

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci pentru $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixați avem:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ , \end{aligned}$$

unde A_{ik} este complementul algebric corespunzător liniei i și coloanei k.

Matrice și determinanți.

Exerciții: Calculați $\det A$, unde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Este avantajos să considerăm dezvoltarea după a treia coloană deoarece conține două zerouri. Astfel

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\,0\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+3}\,1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}\,0\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left((-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\,1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+\left((-1)^{1+1}\,1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\,2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\,0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\right) = -4 - 8 = -12.$$

Matrice și determinanți.

Teoremă

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci au loc următoarele afirmații:

(a) $\det A^t = \det A$;

(b) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

(c) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

(d) dacă matricea A are o linie (sau o coloană) formată numai din zerouri, atunci $\det A = 0$;

(e) dacă matricea A are două linii (sau două coloane) egale sau proporționale, atunci $\det A = 0$;

(f) **dacă matricea B este obținută prin adăugarea la o linie a lui A a unei alte linii înmulțită cu un scalar**, atunci

$$\det B = \det A;$$

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații

Matrice și determinanți

Sisteme de ecuații liniare.

Spații vectoriale.

Definiții, exemple și proprietăți generale

Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

(g) dacă matricea B este obținută prin interschimbarea a două linii ale lui A, atunci

$$\det B = -\det A;$$

(h) **dacă matricea** B **este obținută prin înmulțirea unei linii a lui** A **cu un scalar** $\alpha \in R$, atunci

$$\det B = \alpha \det A.$$

Matrice și determinanți.

Observație: Proprietățile (f), (g) și (h) enunțate mai sus rămân valabile dacă operațiile precizate se efectuează asupra coloanelor matricei A.

Definiție

O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **nesingulară** dacă are determinantul nenul, și se numește **singulară** dacă are determinantul nul.

Definiție

O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ spunem că este **inversabilă** dacă există o matrice notată $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (numită **matricea inversă** a lui A) cu proprietatea că

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \ ,$$

unde I_n este *matricea unitate* de ordinul n.

Matrice și determinanți.

Teoremă

O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inversabilă dacă și numai dacă este matrice nesingulară. În acest caz, inversa acesteia este dată de formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

unde A^* se numește **matricea adjunctă** a lui A și este definită de

$$A^* := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

iar A_{ij} este complementul algebric corespunzător liniei i și coloanei j.

Observație: Adjuncta A^* se obține înlocuind fiecare element al lui A^t prin *complementul său algebric*; mai precis, în matricea A^t, suprimăm linia i și coloana j și obținem o matrice de ordin $(n-1)$ al cărei determinant este D_{ij}, *iar* $A_{i,j} := (-1)^{i+j} D_{ij}$ este complementul algebric al elementului $a_{i,j}$.

Exemple:

Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Calculați $\det A$, A^t, A^* și A^{-1}. Vom obține

$\det A = -2$ și $A^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Fie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calculați $\det A$, A^t, A^* și A^{-1}.

Matrice și determinanți.

Definiție

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $p \leq \min(m, n)$.
(a) Se numește **minor de ordinul** p **al matricei** A, orice determinant de ordin p al unei matrice obținute prin intersectarea a p linii și p coloane din A;
(b) Se numește **rangul matricei** A (și se notează cu $rang\,(A)$), ordinul maxim al minorilor nenuli ai lui A.

Observații:

1. Prin urmare, $r \leq \min(m, n)$ este rangul matricei A dacă aceasta are un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.
2. Operațiile care păstrează rangul unei matrice se numesc *transformări elementare* și sunt următoarele:
- înmulțirea unei linii (coloane) cu o constantă nenulă
- interschimbarea a două linii (coloane)
- adunarea unei linii (coloane) înmulțită cu o constantă la o altă linie (coloană).

3. **Pentru calculul rangului unei matrice se folosește teorema lui Kronecker: dacă într-o matrice** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ **există un minor de ordin** $r \leq \min(m, n)$ **nenul și toți minorii de ordin** $(r+1)$ **ce se pot forma cu aceștia, prin bordarea cu o nouă linie și coloană sunt nuli, atunci** $rang\,(A) = r$.

Exercițiu: Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calculați $rang\,(A)$.

Astfel, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ și $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ și

$\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci $rang\,(A) = 2$.

Sisteme de ecuații liniare.

Definiție

Se numește **sistem de ecuații liniare** un sistem de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Sisteme de ecuații liniare.

Definiție

Matricele formate cu ajutorul coeficienților sistemului

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

se numesc **matricea sistemului**, respectiv **matricea extinsă a sistemului**.

Sisteme de ecuații liniare.

Sistemul (2.1) este un sistem algebric liniar de m ecuații cu n necunoscute. Folosind notațiile precedente, acesta se poate scrie sub forma restrânsă (matriceală)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B,$$

unde $X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Sisteme de ecuații liniare.

și $B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}^t \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ reprezintă matricea necunoscutelor și, respectiv, matricea termenilor liberi.

Propoziție

Dacă A este matrice pătratică nesingulară, atunci soluția sistemului este dată de

$$X = A^{-1}B.$$

Definiție

Dacă toți termenii liberi sunt nuli, i.e. $B = 0$ (sau $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$), atunci sistemul se numește **omogen**.

Definiție

Dacă $B \neq 0$, atunci sistemul se numește **neomogen**.

Definiție

(a) Rangul matricei A se numește **rangul sistemului**.
(b) Dacă există valorile reale $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ care verifică ecuațiile sistemului (2.1), spunem că n–uplul $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ este o soluție a sistemului (2.1).

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a găsi soluții $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sisteme de ecuații liniare.

Definiție

(a) Sistemul (2.1) este **compatibil** dacă admite cel puțin o soluție.
(b) Sistemul (2.1) este **incompatibil** dacă nu admite nici o soluție.
(c) Sistemul (2.1) este **compatibil determinat** dacă admite o singură soluție.
(d) Sistemul (2.1) este **compatibil nedeterminat** dacă admite mai multe soluții.

În cazul în care numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor $(m = n)$, pentru rezolvarea sistemului se poate folosi regula lui Cramer.

Sisteme de ecuații liniare.

Regula lui Cramer

Fie sistemul cu n ecuații și n necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Dacă $\det A \neq 0$, atunci sistemul este compatibil și are soluția unică dată de

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

unde $D = \det A$, iar D_i este determinantul matricei obținută prin înlocuirea în matricea A a coloanei i cu coloana termenilor liberi, pentru $i = \overline{1, n}$.

Sisteme de ecuații liniare.

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ și $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Observăm că $\det(A) = 15 \neq 0$, deci sistemul are soluție unică dată de regula lui Cramer. Calculăm

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 45, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

și deci

$$(x, y, z) = \frac{1}{15}(45, 30, 15) = (3, 2, 1).$$

Definiție

Fie $r = rang\,(A) \leq \min\{m, n\}$. Se numește **determinant principal al sistemului** (2.1), orice minor de ordin r nenul al matricei A.

Definiție

Fie $r = rang\,(A) \leq \min\{m, n\}$. Se numește **determinant caracteristic asociat determinantului principal** , orice minor de ordin $(r + 1)$ al matricei extinse $\bar{A}$ ob ținut prin bordarea determinantului principal cu una dintre liniile rămase și cu coloana termenilor liberi corespunzători.

Observații:

1. Se pot forma $m - r$ determinanți caracteristici.

2. Ecuațiile și necunoscutele corespunzătoare determinantului principal se numesc **ecuații și, respectiv, necunoscutele principale**, celelalte numindu-se **necunoscute secundare**.

Sisteme de ecuații liniare.

Teorema Kronecker–Capelli

Sistemul (2.1) este compatibil dacă și numai dacă matricele A și $\bar{A}$ au același rang, adică $rang\,(A) = rang\,(\bar{A})$.

Observații:

1. Întrucât matricea extinsă $\bar{A}$ este obținută prin adăugarea unei coloane la matricea A, în general avem că $rang(A) \leq rang(\bar{A})$. Așadar un sistem este incompatibil dacă prin adăugarea coloanei termenilor liberi se mărește rangul matricei.

2. În concluzie, notând cu $r := rang(A)$ și cu m și n numărul de linii, respectiv de coloane ale sistemului, au loc următoarele cazuri:

(a) Dacă $r = m$, atunci sistemul este compatibil și atunci:

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații

Matrice și determinanți

Sisteme de ecuații liniare.

Spații vectoriale.

Definiții, exemple și proprietăți generale

Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

(a_1) Dacă $m = n$, atunci sistemul este compatibil determinat (și atunci soluția sistemului se obține aplicând regula de calcul a lui Cramer).

(a_2) Dacă $m < n$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat și admite o infinitate de soluții (și atunci soluțiile sistemului se obțin parametrizând necunoscutele secundare și rezolvând sistemul format din ecuațiile principale și necunoscutele principale).

(b) Dacă $r < m$, atunci aplicăm teorema lui Kronecker–Capelli.

Metoda de rezolvare

Deci

$$\text{Un sistem este} \begin{cases} \text{compatibil determinat dacă:} & rang(A) = rang(\bar{A}) = n, \\ \text{compatibil nedeterminat dacă:} & rang(A) = rang(\bar{A}) < n, \\ \text{incompatibil dacă:} & rang(A) < rang(\bar{A}), \end{cases}$$

unde n este numărul de necunoscute.
Practic: se scriu matricele A și $\bar{A}$ și se calculează rangul lor.
Dacă $rang(A) < rang(\bar{A})$, atunci sistemul este incompatibil.Dacă $rang(A) = rang(\bar{A})$, atunci sistemul este compatibil.
Dacă rangul obținut este egal cu numărul de necunoscute, atunci sistemul este compatibil determinat cu soluția dată de regula lui Cramer.
Dacă rangul obținut este mai mic strict decât numărul de necunoscute, atunci sistemul este compatibil nedeterminat; pentru a găsi soluția, determinăm, folosind minorul principal (cel care dă rangul), ecuațiile principale și necunoscutele principale. Celelate necunoscute se vor numi secundare și se vor renota cu alte litere (vor deveni parametri), urmând ca necunoscutele principale să se determine în funcție de aceste necunoscute secundare.

Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\begin{cases} x - 4y - 3z = 1 \\ -3x + 12y - 3z = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:
Scriem mai întâi matricea sistemului și matricea extinsă:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -3 & 12 & -3 \end{bmatrix}, \ \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 12 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observăm că $rang\,(A) = rang\,(\bar{A}) = 2$, deci, conform teoremei lui Kronecker–Capelli, sistemul este compatibil dar nedeterminat (admite o soluție dar aceasta nu este unică). Determinantul principal (cel care dă rangul) este $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, deci necunoscutele x și z sunt necunoscutele principale, iar y este necunoscuta secundară. Vom nota $y = \alpha$ și rescriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} x - 3z = 1 + 4\alpha \\ -3x - 3z = 2 - 12\alpha \end{cases}$$

care are soluția unică $(x, z) = (4\alpha - 1/4, -5/12)$, deci soluția sistemului inițial este

$(x, y, z) = (4\alpha - 1/4, \alpha, -5/12)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

În cazul particular al sistemelor liniare și omogene avem următoarele concluzii:
(a) Un sistem liniar omogen este întotdeauna compatibil, el admițând cel puțin soluția banală $X = 0$, i.e. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Evident $rang(A) = rang(\bar{A})$.
(b) Un sistem liniar omogen admite și alte soluții (diferite de cea banală) dacă și numai dacă $rang(A)$ este mai mic decât numărul de necunoscute.
(c) Prin urmare, un sistem liniar omogen în care numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute admite și alte soluții (diferite de cea banală) dacă și numai dacă $\det(A) = 0$.

Să se rezolve și să se discute următorul sistem omogen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ și calculăm $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, deci $rang(A) \geq 2$. Apoi prin bordarea minorului Δ_2 obținem doi minori de ordin superior $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ și

$\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Deoarece sunt nuli deducem că $rang\,(A) = 2$. Evident $rang\bar{A} = rang(A)$, deci sistemul este compatibil dar nedeterminat; astfel necunoscutele principale sunt x_1 și x_2 iar ecuațiile principale sunt primele două. Necunoscutele secundare sunt celelalte două și le vom parametriza: $\alpha := x_3$ și $\beta := x_4$. Sistemul devine

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2\alpha + \beta \\ 2x_1 = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

care are soluția $x_1 = (\alpha - 3\beta)/2$, $x_2 = -5(\alpha - \beta)/4$. Sistemul inițial are atunci soluția

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((\alpha - 3\beta)/2, -5(\alpha - \beta)/4, \alpha, \beta)$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Metoda lui Gauss

Definiție

Se numește **matrice superior triunghiulară** o matrice care are sub diagonala principală toate elementele egale cu zero.

Metoda lui Gauss constă in folosirea transformărilor elementare asupra matricei extinse a unui sistem astfel încât, după un anume număr de iterații, matricea astfel obținută să fie superior triunghiulară.

Metoda lui Gauss

Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemul

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ -2x + 3y - z = 5 \\ -x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Rezolvare: Matricea extinsă a sistemului este $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

și **vom face transformări convenabile pentru a obține zerouri sub diagonala principală. Astfel vom aduna prima linie înmulțită cu constante convenabile la celelalte linii (știm că în urma acestor transformări aplicate unor matrici pătratice, rangul noii matrice obținute nu se modifică). Apoi vom aduna a doua linie înmulțită cu constante convenabile la următoarele linii, ș.a.m.d. Astfel vom obține zerouri pe coloane și sistemul**

Metoda lui Gauss

În cazul nostru, notând formal liniile cu L_i, scriem $L_1 \cdot 2 + L_2$, $L_1 \cdot 1 + L_2$, apoi $L_2' \cdot 1/5 + L_3'$ și obținem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ -2+2 & 3+2 & -1+6 & 5+20 \\ -1+1 & -2+1 & 3+3 & 6+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & -1 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & -1+1 & 6+1 & 16+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{bmatrix}$$

Metoda lui Gauss

și sistemul este echivalent cu următorul sistem triunghiular:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ 5y + 5z = 25 \\ 17z = 21. \end{cases}$$

Soluția lui este imediată $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$.

Evident, metoda lui Gauss este utilă și pentru determinarea rangului unei matrice și pentru calcul de determinanți. Menționăm, în plus, că, pentru a aplica metoda lui Gauss, nu contează numărul de ecuații și de necunoscute ale sistemului.

Metoda lui Gauss

Metoda lui Gauss poate fi redată în mod echivalent de următorul algoritm:

- Se scrie matricea extinsă a sistemului $\overline{A}$;
- Reducerea acestei matrice (de dimensiune (m, n) la o matrice superior triunghiulară se va realiza în p pași, unde $p = \overline{1, m-1}$;
- La fiecare pas p, noile elemente $a_{ij}^{(p)}$ ale matricei transformate (echivalente), se calculează astfel

$$a_{ij}^{(p+1)} = a_{ij}^{(p)} - \frac{a_{ip}^{(p)} \cdot a_{jp}^{(p)}}{a_{pp}^{(p)}}, i = \overline{p+1, m}, j = \overline{p, n} \qquad (2.3)$$

- Dacă pivotul de la pasul p, $a_{pp}^{(p)} = 0$, se efectuează interschimbarea liniei p cu una din liniile $p+1, \ldots, m$ astfel încât noul pivot să fie nenul.

CURS II

Spații vectoriale.

Fie K un corp comutativ (**câmp**) ale cărui elemente le vom numi **scalari** și le vom nota cu litere grecești $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, având elementul nul notat cu 0 și elementul unitate (neutru) cu 1. Fie V o mulțime a cărei elemente le vom numi **vectori** și le vom nota cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, \ldots$ (vectorii se mai pot nota și cu $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \ldots$).

Definiție.

Vom spune că V este un **spațiu vectorial** peste câmpul K dacă pe mulțimea V sunt definite două legi de compoziție, una internă "$+$" numită **adunarea vectorilor,** astfel încât

$$\text{pentru orice } \vec{x}, \vec{y} \in V \text{ avem că } \vec{x} + \vec{y} \in V,$$

și una externă "$\cdot$" numită **înmulțirea vectorilor cu scalari,** astfel încât

$$\text{pentru } \alpha \in K \text{ și } \vec{x} \in V \text{ avem că } \alpha \cdot \vec{x} \in V,$$

și astfel încât:

Spații vectoriale.

1. Adunarea vectorilor este **asociativă**

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} \in V, \ \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,$$

2. Adunarea vectorilor este **comutativă**

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

3. Există un vector notat $\vec{0} \in V$, numit **vector nul**, astfel încât

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \ \forall \vec{x} \in V,$$

4. Pentru orice $\vec{x} \in V$ există vectorul $-\vec{x} \in V$, numit **opusul** lui $\vec{x}$, astfel încât

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0},$$

5.

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}, \ \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall \vec{x} \in V,$$

Spații vectoriale.

6.
$$(\alpha+\beta)\cdot\vec{x}=\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{x},\ \forall\alpha,\beta\in K,\ \forall\vec{x}\in V,$$
7.
$$\alpha\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\cdot\vec{x}+\alpha\cdot\vec{y},\ \forall\alpha\in K,\ \forall\vec{x},\vec{y}\in V,$$
8.
$$1\cdot\vec{x}=\vec{x},\ \forall\vec{x}\in V,$$
unde 1 este elementul (unitate) neutru pentru operația de înmulțire în corpul K.

Observații.

1. O mulțime K înzestrată cu două operații (una aditivă și una multiplicativă), $(K,+,\cdot)$, este corp comutativ sau câmp dacă:

– $(K,+)$ este grup comutativ (adică operația $+$ este asociativă, admite element neutru, fiecare element din K admite invers (opus) și $+$ este comutativă);

– operația $\cdot$ este asociativă;

– operația $\cdot$ este distributivă față de $+$

– operația $\cdot$ admite element unitate (diferit de zero).

Spații vectoriale.

2. Din definiția de mai sus se observă că V are structură de grup comutativ în raport cu operația "$+$" de adunare a vectorilor.
3. În cele ce urmează corpul K va desemna câmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ sau câmpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ (înzestrate cu operațiile uzuale de adunare și înmulțire a numerelor).

Propozitie

Din definiția de mai sus deducem următoarele:

1. $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}, \ \forall \vec{x} \in V$
2. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}, \ \forall \alpha \in K$
3. $(-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x}) = -(\alpha \cdot \vec{x}), \ \forall \alpha \in K, \ \forall \vec{x} \in V$
4. $(-\alpha) \cdot (-\vec{x}) = \alpha \cdot \vec{x}, \ \forall \alpha \in K, \ \forall \vec{x} \in V$

Exemple:

1. Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale formează un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

2. Mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe formează un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

3. Mulțimea $\mathcal{P}_n(x)$ a **polinoamelor cu coeficienți reali de grad cel mult** n (unde $n \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar fixat). formează un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ cu operațiile de adunare ale polinoamelor și de înmulțirea a acestora cu un număr real.

4. **Spațiul vectorial aritmetic** $(K^n, +, \cdot)$, unde K un câmp oarecare și $n \in \mathbb{N}^*$, iar

$$K^n := K \times K \times \cdots \times K = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in K\}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in K^n$$

$$\alpha \cdot \vec{x} = \alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), \ \forall \alpha \in K, \ \forall \vec{x} \in K^n$$

formează un spațiu vectorial peste K.

5. În particular pentru $K = \mathbb{R}$ obținem $\mathbb{R}^n$ numit **spațiul vectorial aritmetic real *n*-dimensional**.

6. Spațiul vectorial $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ al matricelor cu elemente din K situate pe m linii și n coloane.

Vom nota cu a_{ij} elementul matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ situat pe linia i și coloana j. Deci A se va scrie sub forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sau prescurtat $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$.

Definim operațiile

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}),\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K),\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha a_{ij}),\ \forall \alpha \in K,\ \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(K),\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Se poate verifica că, în raport cu aceste două operații, $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ este spațiu vectorial peste câmpul K.
În particular pentru $m = n$ obținem $\mathcal{M}_n(K)$ numit **spațiul vectorial al matricelor pătratice de ordin n.**
În continuare vom renunța, pentru simplitatea scrierii, la notația "$\cdot$"; astfel $\alpha \cdot \vec{x}$ se va scrie, mai simplu, $\alpha\vec{x}$ (dacă nu există posibilitate de confuzie).

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații
Matrice și determinanți
Sisteme de ecuații liniare.
Spații vectoriale.
Definiții, exemple și proprietăți generale
Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

Definitiție.
O submulțime $V' \subset V$ ale cărei elemente verifică axiomele spațiului vectorial V definit peste K se numește **subspațiu vectorial** al lui V.

Teoremă

O submulțime $V' \subset V$ este un subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă avem:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V', \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in V'. \tag{3.1}$$

Demonstrație: *Necesitatea ("$\Rightarrow$")* Dacă $V' \subset V$ este un subspațiu vectorial al lui V atunci are loc, evident condiția (3.1).

Suficiența ("$\Leftarrow$") Menționăm, mai întâi, că dacă are loc (3.1) atunci să luăm $\alpha = \beta = 1$ și obținem că $\vec{u} + \vec{v} \in V'$, apoi $\beta = 0$ și obținem că $\alpha \vec{u} \in V'$, și apoi să luăm $\alpha = \beta = 0$ și obținem că $\vec{0} \in V'$. Se poate arăta ușor că sunt verificate toate axiomele spațiului vectorial.

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială
Dr. C.O. Tărniceriu
Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații
Matrice și determinanți
Sisteme de ecuații liniare.
Spații vectoriale.
Definiții, exemple și proprietăți generale
Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

Pentru caracterizarea unui subspațiu vectorial relația (3.1) poate fi înlocuită, echivalent, cu

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V', \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V' \text{ și } \alpha \vec{u} \in V'. \tag{3.2}$$

Exemple:
1. Submulțimea $\{\vec{0}\}$ a unui spațiu vectorial este un subspațiu vectorial.
2. Considerăm spațiul vectorial aritmetic K^n. Atunci submulțimea sa

$$V = \{\vec{u} \in K^n : \vec{u} = (0, u_2, u_3, \ldots, u_n), \; u_2, u_3, \ldots, u_n \in K\} \subset K^n$$

este un subspațiu vectorial.
3. Pe de altă parte, submulțimea
$V' = \{\vec{u} \in K^n : \vec{u} = (1, u_2, u_3, \ldots, u_n), \; u_2, u_3, \ldots, u_n \in K\} \subset K^n$ nu este un subspațiu vectorial.

4. Fie $\mathcal{M}_n(K)$ spațiul vectorial al matricelor pătratice cu elemente din K. Atunci submulțimea sa $V = \{A \in \mathcal{M}_n(K) : A = A^t\} \subset \mathcal{M}_n(K)$ (submulțimea matricelor simetrice) este un subspațiu vectorial. Într-adevăr, pentru orice $A, B \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ avem că

$$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B,$$

adică vectorul matrice care s-a obținut este o matrice simetrică și deci $\alpha A + \beta B \in V$.

Spaţii vectoriale.

Definiţie

Fie $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ un sistem de $n \in \mathbb{N}^*$ vectori din spaţiul vectorial V. Spunem că vectorul $\vec{v} \in V$ este o **combinaţie liniară** de vectorii sistemului S dacă există n elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ astfel încât are loc

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n.$$

Teoremă

Mulţimea vectorilor din V care se pot exprima ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului S formează un subspaţiu vectorial al lui V.

Definiţie

Vom nota cu $[S]$ mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de vectori din S, $[S] := \{\vec{u} \in V : \vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n, \ \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in K\} \subseteq V$. Acest spaţiu este, conform teoremei precedente, un subspaţiu vectorial şi se numeşte **subspaţiul vectorial generat** de submulţimea S.

Spații vectoriale.

Definiție

Vectorii $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p$ spunem că formează un **sistem de generatori** pentru $[S]$.

Fie V un K–spațiu vectorial și $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ un sistem finit de vectori din V.

Definiție

Sistemul S se numește **liniar dependent** dacă există scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, nu toți egali cu zero, astfel încât să aibă loc

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \tag{3.3}$$

(combinația liniară $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$ să fie vectorul nul).

Definiție

În caz contrar, adică dacă orice relație de forma

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

(orice combinația liniară $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$ care este $\vec{0}$) implică $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, atunci sistemul S se numește **liniar independent**.

Exemple:
1. Sistemul $S = \{\vec{0}\}$ este liniar dependent deoarece are loc $\alpha\vec{0} = \vec{0}$, $\forall\alpha \in K$.
2. Sistemul $S = \{\vec{v} : \vec{v} \neq \vec{0}\}$ este liniar independent deoarece din relația $\alpha\vec{v} = 0$, obținem $\alpha = 0$ (dacă $\alpha \neq 0$, atunci se obține $\vec{v} = 0$).

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații

Matrice și determinanți

Sisteme de ecuații liniare.

Spații vectoriale.

Definiții, exemple și proprietăți generale

Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

3. În spațiul vectorial aritmetic K^n sistemul de vectori

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), ..., \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$$

(1 și 0 sunt elementele neutre în câmpul K) este liniar independent. Într-adevăr, fie combinația liniară

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}.$$

Avem

$$\alpha_1 (1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2 (0, 1, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n (0, \ldots, 1)$$

$$= (\alpha_1, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

deci ecuația precedentă devine

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Deci din orice combinație liniară obținem coeficienții nuli.

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații

Matrice și determinanți

Sisteme de ecuații liniare.

Spații vectoriale.

Definiții, exemple și proprietăți generale

Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

4. În spațiul vectorial $\mathcal{P}_n(x)$ al polinoamelor de grad cel mult n, polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^n$ formează un sistem liniar independent deoarece relația

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n = 0$$

are loc doar dacă $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exercițiu. Studiați dacă următorul sistem de vectori din spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ este liniar dependent sau nu:

$$S = \{\vec{v}_1 = (1,1,1), \vec{v}_2 = (1,-1,1), \vec{v}_3 = (-1,3,-1)\}.$$

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații

Matrice și determinanți

Sisteme de ecuații liniare.

Spații vectoriale.

Definiții, exemple și proprietăți generale

Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

Să se stabilească dacă următorii vectori sunt liniar independenți: $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$
Să considerăm combinația liniară

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Determinantul matricii sistemului este $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ deci rangul $rang(A) = 3$. Deci sistemul de mai sus este compatibil unic determinat (admite o unică soluție). Pe de altă parte sistemul este omogen deci admite cel puțin soluția banală $(0, 0, 0)$. Prin urmare soluția banală este unica soluție. În acest caz deducem că vectorii dați sunt liniar independenți adică orice relație de tipul

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$$

implică $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Dr. C.O. Tărniceriu

Matrice și Determinanți. Sisteme de ecuații

Matrice și determinanți

Sisteme de ecuații liniare.

Spații vectoriale.

Definiții, exemple și proprietăți generale

Dependență liniară, independență liniară și baze într-un K–spațiu

Teorema de caracterizare a dependenței liniare

Condiția necesară și suficientă ca sistemul $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ să fie liniar dependent este ca cel puțin unul din vectorii sistemului S să se poată scrie ca o combinație liniară de ceilalți vectori ai sistemului S.

Necesitatea ("$\Rightarrow$") Să presupunem că sistemul S este liniar dependent. Deci are loc relația (3.3) cu scalarul $\alpha_1 \neq 0$ (de exemplu). În acest caz există $(\alpha_1)^{-1}$ deci obținem

$$\vec{v}_1 = -(\alpha_1)^{-1}\alpha_2\vec{v}_2 - (\alpha_1)^{-1}\alpha_3\vec{v}_3 - \cdots - (\alpha_1)^{-1}\alpha_n\vec{v}_n$$

adică $\vec{v}_1$ este o combinație liniară de ceilalți $n-1$ vectori.
Suficiența ("$\Leftarrow$") Să presupunem că un vector (de exemplu $\vec{v}_1$) este o combinație liniară de ceilalți $n-1$ vectori. Are loc

$$\vec{v}_1 = \beta_1\vec{v}_2 + \beta_2\vec{v}_3 + \cdots + \beta_{n-1}\vec{v}_n$$

sau echivalent

$$\vec{v}_1 + (-\beta_1)\vec{v}_2 + (-\beta_2)\vec{v}_3 + \cdots + (-\beta_{n-1})\vec{v}_n = \vec{0}$$

adică are loc relația (3.3) cu coeficientul 1, al lui $\vec{v}_1$, diferit de zero. Deci sistemul de vectori S este liniar dependent.

Spații vectoriale.

Teoremă

Fie V un K–spațiu vectorial. Atunci:
1. Orice sistem de vectori care conține un subsistem liniar dependent este de asemenea sistem liniar dependent.
2. Orice subsistem de vectori liniar independent este de asemenea un sistem liniar independent.

Propozitie

Orice sistem S care conține vectorul nul este liniar dependent deoarece are loc $0\vec{v}_1 + \cdots + 0\vec{v}_n + \alpha\vec{0} = \vec{0}, \ \forall\alpha \in K$.