Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Suport de curs
Curs III-IV

Baze în spații vectoriale

Definition

Vom spune că submulțimea (cu un număr finit de vectori) $S = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\} \subset V$ este un **sistem de generatori** al lui V dacă subspațiul vectorial generat de S coincide cu V, adică

$$[S] = V$$

(ceea ce înseamnă că orice element vector din V se poate scrie ca o combinație liniară de vectori din S).

Definition

Sistemul finit de vectori $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ se numește bază în K–spațiul vectorial V dacă satisface condițiile:
(a) B este sistem liniar independent.
(b) B este un sistem de generatori al lui V.

Example

În spațiul vectorial aritmetic K^n sistemul de vectori

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, ..., 1)\}$$

(1 și 0 sunt elementele neutre în câmpul K) este bază în K^n deoarece este liniar independent și este și sistem de generatori al lui K^n. Această bază se numește **bază canonică**.

Example

În particular, în spațiul vectorial aritmetic $\mathbb{R}^n$ sistemul de vectori

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), ..., \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$$

este bază în $\mathbb{R}^n$ deoarece este liniar independent și este și sistem de generatori al lui $\mathbb{R}^n$. Această bază se numește **bază canonică**.

Example

În spațiul vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sistemul de vectori matrice

$$B = \left\{ E_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

este bază în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ deoarece este liniar independent și este și sistem de generatori al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Această bază se numeș te **bază canonică**.

Example

În spațiul vectorial $\mathcal{P}_n(x)$ al polinoamelor de grad cel mult n, polinoamele $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ formează un sistem liniar independent și este sistem de generatori pentru orice vector (polinom) din $\mathcal{P}_n(x)$. Deci $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\right\}$ formează o bază în spațiul $\mathcal{P}_n(x)$.

Theorem (de caracterizare a bazelor)

Condiția necesară și suficientă ca submulțimea finită $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ să fie bază în K–spațiul vectorial V, este ca orice vector $\vec{x} \in V$ să se descompună în mod unic după vectorii lui B, adică

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \tag{0.1}$$

unde scalarii $x_i \in K$, $i = \overline{1, n}$ sunt unic determinați.

Definition

Scalarii $x_i \in K$, $i = \overline{1, n}$ (din teorema precedentă) ce dau descompunerea unică a lui $\vec{x}$ în baza $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ se numesc **coordonatele vectorului** $\vec{x}$ în baza $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$.

Theorem

Dacă $V \neq \{\vec{0}\}$ este un K–spațiu finit generat atunci oricare două baze ale lui V au același număr de vectori.

(fără demonstrație).

Definition

Dacă V este un K–spațiu finit generat atunci numărul de elemente dintr-o bază a lui V se va numi dimensiunea lui V notată cu $\dim_K V$ sau, mai scurt (dacă nu este pericol de confuzie), $\dim V$.

Example

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$
- $\dim(\mathcal{P}_n(x)) = n$

Notație

Dacă V este un $K-$spațiu vectorial de dimensiune n, atunci vom mai nota spațiul și cu V_n (notația va indica astfel și dimensiunea).

Propozitie

Fie V un $K-$spațiu vectorial de dimensiune n. Atunci:
(a) Orice sistem S format din n vectori liniari independenți este o bază în V.
(b) Orice sistem S format din n vectori care constituie un sistem de generatori al lui V este o bază în V.

Teorema de completare a bazei

Fie V un K–spațiu vectorial de dimensiune n și fie $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\} \subset V$, unde $k < n$, un sistem de vectori liniar independenți din V. Atunci există vectorii $\vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n \in V$ astfel încât submulțimea $B = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}, \ldots, \vec{v}_n\}$ este o bază a spațiului vectorial V.

(fără demonstrație).

Definition

Fie S un sistem de vectori din spațiul vectorial V. Se numește **rangul sistemului de vectori** S dimensiunea subspațiului vectorial generat de S.

Theorem

Toate sistemele de vectori din V obținute din S prin următoarele transformări (numite și transformări elementare):
1. schimbarea ordinii vectorilor;
2. înmulțirea unui vector cu un scalar nenul;
3. adunarea la un vector din S a unui alt vector din S înmulțit cu un scalar,
au același rang cu S.

Theorem

Rangul unui sistem finit de vectori este egal cu numărul maxim de vectori liniar independenți ai sistemului.

În cazul particular al spațiului vectorial aritmetic K^n, dacă avem un număr finit de vectori, atunci, punându-i pe coloană, putem forma cu ei o matrice iar problema independenței lor liniare se reduce la a determina rangul acelei matrice. Astfel are loc rezultatul următor:

Theorem

Rangul unei matrice este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană (sau linie, evident) liniar independenți.

Într-adevăr, fie $A = \begin{bmatrix} s_1^1 & s_2^1 & \cdots & s_n^1 \\ s_1^2 & s_2^2 & \cdots & s_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_1^m & s_2^m & \cdots & s_n^m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice dată și vectorii coloană ai acesteia notați cu

$$v_1 = \begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ \cdots \\ s_1^m \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ \cdots \\ s_2^m \end{bmatrix}, \; \ldots, \; v_n = \begin{bmatrix} s_n^1 \\ s_n^2 \\ \cdots \\ s_n^m \end{bmatrix}.$$

Să presupunem că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_r$, cu $r \leq n$, sunt liniar independenți (presupunem, fără a restrânge generalitatea că sunt independenți primii r vectori), deci din orice combinație liniară a lor

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r = 0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$$

rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$.

Evident, vectorii $v_i \in K^m$, $i = \overline{1, r}$, deci numărul maxim de vectori liniar independenți este m, ceea ce înseamnă că trebuie să luăm $r \leq m$.
Deci se obține sistemul

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ \dots \\ s_1^m \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ \dots \\ s_2^m \end{bmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{bmatrix} s_r^1 \\ s_r^2 \\ \dots \\ s_r^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 s_1^1 \\ \alpha_1 s_1^2 \\ \dots \\ \alpha_1 s_1^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 s_2^1 \\ \alpha_2 s_2^2 \\ \dots \\ \alpha_2 s_2^m \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \alpha_r s_r^1 \\ \alpha_r s_r^2 \\ \dots \\ \alpha_r s_r^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1^1 \alpha_1 + s_2^1 \alpha_2 + \dots + s_r^1 \alpha_r = 0 \\ s_1^2 \alpha_1 + s_2^2 \alpha_2 + \dots + s_r^2 \alpha_r = 0 \\ \vdots \\ s_1^m \alpha_1 + s_2^m \alpha_2 + \dots + s_r^m \alpha_r = 0 \end{cases}$$

care este omogen de tip (m, r) și care trebuie să admită doar soluția banală. Prin urmare există un determinant principal de rang r care să fie nenul. Acest determinant principal este exact cel care dă rangul matricei inițiale A, deci $rang(A) = r$.
Invers, să presupunem acum că $rang(A) = r$ (deci, evident, $r \leq \min(m, n)$) și să arătăm că numărul maxim de vectori liniar independenți este tot r. Fie astfel, o combinația liniară de $(r + 1)$ vectori

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r + \alpha_p v_p = 0 \in \mathcal{M}_{m,1}(K),$$

unde p este un indice oarecare astfel încât $r + 1 \leq p \leq n$. Prin urmare obținem sistemul

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ \cdots \\ s_1^m \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ \cdots \\ s_2^m \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_r \begin{bmatrix} s_r^1 \\ s_r^2 \\ \cdots \\ s_r^m \end{bmatrix} + \alpha_p \begin{bmatrix} s_p^1 \\ s_p^2 \\ \cdots \\ s_p^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1^1\alpha_1 + s_2^1\alpha_2 + \cdots + s_r^1\alpha_r + s_p^1\alpha_p = 0 \\ s_1^2\alpha_1 + s_2^2\alpha_2 + \cdots + s_r^2\alpha_r + s_p^1\alpha_p = 0 \\ \vdots \\ s_1^m\alpha_1 + s_2^m\alpha_2 + \cdots + s_r^m\alpha_r + s_p^1\alpha_p = 0 \end{cases}$$

care este un sistem omogen de tipul $(m, r+1)$. Rangul matricei sistemului este r (este exact rangul matricei inițiale A) și deci mai mic decât numărul de necunoscute. Prin urmare sistemul nu admite soluție unică, deci admite și soluții nenule. Aceasta înseamnă că există cel puțin un coeficient α_i nenul, deci vectorii $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_p\}$ sunt liniar dependenți.

Exercițiu:

Să se afle numărul maxim de vectori liniar independenți din sistemul de vectori

$S = \{\vec{u}_1 = (2, 1, -1), \vec{u}_2 = (1, 2, 1), \vec{u}_3 = (3, 0, -3), \vec{u}_4 = (1, 1, 0)\}$.

Schimbarea bazelor și schimbarea coordonatelor unui vector într-un K–spațiu

Fie V este un K–spațiu vectorial de dimensiune n și $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, $\tilde{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ două baze diferite ale aceluiași spațiu V. A determina schimbarea de baze înseamnă a descompune vectorii bazei $\tilde{B}$ după baza B, adică a obține relații de tipul

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} s_j^i \, \vec{e}_i \, , \; j = \overline{1, n} \tag{0.2}$$

sau, echivalent,

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = s_1^1 \, \vec{e}_1 + s_1^2 \, \vec{e}_2 + \cdots + s_1^n \, \vec{e}_n \\ \vec{f}_2 = s_2^1 \, \vec{e}_1 + s_2^2 \, \vec{e}_2 + \cdots + s_2^n \, \vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{f}_n = s_n^1 \, \vec{e}_1 + s_n^2 \, \vec{e}_2 + \cdots + s_n^n \, \vec{e}_n \, . \end{cases}$$

Definim matricea $S := (s^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$ ale cărei **coloane sunt formate din coordonatele vectorilor lui $\tilde{B}$ în baza B**. Deci

$$S = \begin{bmatrix} s^1_1 & s^1_2 & \cdots & s^1_n \\ s^2_1 & s^2_2 & \cdots & s^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s^n_1 & s^n_2 & \cdots & s^n_n \end{bmatrix}.$$

Matricea S se numește **matricea schimbării de baze** de la B la baza $\tilde{B}$ și vom nota $B \xrightarrow{S} \tilde{B}$.

Theorem

Dacă avem $B \xrightarrow{S} \tilde{B}$ *atunci matricea* S *este inversabilă și are loc* $\tilde{B} \xrightarrow{S^{-1}} B$*, unde* S^{-1} *este inversa matricei* S*.*

(fără demonstrație).

Considerăm acum un vector oarecare $\vec{x} \in V$. Atunci vectorul $\vec{x}$ are două descompuneri în cele două baze:

$$\vec{x} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \, \vec{e}_i \quad \text{și} \quad \vec{x} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \, \vec{f}_j \, . \tag{0.3}$$

Este importantă determinarea legăturii dintre coordonatele x_i, $i = \overline{1, n}$ ale vectorului în baza B și coordonatele y_j, $j = \overline{1, n}$ ale vectorului în baza $\tilde{B}$.

Din (0.2) obținem

$$\vec{x} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \, \vec{f_j} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} y_j \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} s_j^i \, \vec{e_i} \right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} s_j^i \, y_j \right) \vec{e_i}$$

Din unicitatea scrierii vectorului $\vec{x}$ în baza B vom obține identificarea coeficienților:

$$x_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} s_j^i \, y_j \, , \;\; i = \overline{1, n}. \tag{0.4}$$

Introducând matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în cele două baze

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ și } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

putem rescrie (0.4) sub formă matriceală și obținem

Propozitie

Fie $\vec{x} \in V$ un vector care are descompunerea (0.3) în raport cu cele două baze B și $\tilde{B}$. Atunci legătura între coordonatele vectorului $\vec{x}$ din cele două baze este dată de relația:

$$X = S \cdot Y \Leftrightarrow Y = S^{-1} \cdot X\,, \tag{0.5}$$

ceea ce constitue **formula matriceală de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze**.

Exerciţiu:

Se dă sistemul de vectori
$B' = \{\vec{v}_1 = (1, 2, 1)\,, \vec{v}_2 = (2, 3, 3)\,, \vec{v}_3 = (3, 7, 1)\}$.
a) Să se arate că B' este o bază în $\mathbb{R}^3$.
b) Să se scrie matricea schimbării de bază de la baza canonică la B'.
c) Să se afle coordonatele vectorului $\vec{x} = (3, -1, 2)$ în baza B'.

Se consideră bazele
$B_1 = \{\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (2,-1,1), \vec{u}_3 = (-1,1,1)\}$ și
$B_2 = \{\vec{v}_1 = (1,0,1), \vec{v}_2 = (0,1,1), \vec{v}_3 = (1,1,0)\}$ precum și vectorul
$\vec{x} = (1,-1,0)$.
a) Să se scrie matricea schimbării de baze de la B_1 la B_2.
b) Să se afle coordonatele vectorului $\vec{x}$ în cele două baze.

Spații euclidiene.

Definition

Fie V un spațiu vectorial. Se numește **produs scalar** pe V o funcție

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

care asociază fiecărei perechi de vectori din V un număr real notat $\langle u, v \rangle$ și care satisface condițiile:

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, $\forall u, v \in V$;

(ii) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$, $\forall u_1, u_2, v \in V$;

(iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$;

(iv) $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in V$ și $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Observație:

Din cele patru proprietăți de mai sus, se mai pot deduce următoarele:

1. $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$, $\forall u, v_1, v_2 \in V$
2. $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$
3. $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$, $\forall v \in V$

Într-adevăr,

$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle v_1 + v_2, u\rangle = \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle,$$

$$\langle u, \lambda v\rangle = \langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = \lambda\langle u, v\rangle,$$

$$\langle 0, v\rangle = \langle u - u, v\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle = 0.$$

Definition

Un spațiu vectorial înzestrat cu un produs scalar $\langle \cdot, \cdot\rangle$ se numește **spațiu euclidian**.

Example

Pe spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$ definim produsul scalar standard

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \,,$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \; y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Example

Pe spațiul vectorial al matricelor pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definim produsul scalar

$$\langle A, B\rangle = Tr(A^t B), \; \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Example

Pe spațiul vectorial al funcțiilor continue definite pe $[a, b]$ definim produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \; \forall f, g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continue}.$$

Theorem (Cauchy–Schwarz–Buniakovski)

Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Atunci are loc inegalitatea

$$|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle} \cdot \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

Inegalitatea cerută este echivalentă cu

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle.$$

Pentru $u = 0$ sau $v = 0$, inegalitatea devine egalitate.
Dacă $u, v \in V \setminus \{0\}$, considerăm combinația liniară $u + \lambda v \in V$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este un scalar arbitrar. Din proprietățile produsului scalar avem că

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle \geq 0, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{0.6}$$

Aplicând proprietățile produsului scalar, membrul stâng al inegalității devine

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle = \langle u, u + \lambda v\rangle + \langle \lambda v, u + \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, \lambda v\rangle + \langle \lambda v, u\rangle + \langle \lambda v, \lambda v\rangle$$

$$= \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \lambda\langle v, u\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$$

Notând cu $A = \langle v, v\rangle$, $B = \langle u, v\rangle$ și $C = \langle u, u\rangle$, inegalitatea (0.6) devine

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cum $A > 0$, inegalitatea de mai sus are loc pentru orice λ real doar dacă discriminantul

$$\Delta = 4B^2 - 4AC \leq 0,$$

deci $B^2 \leq AC$ ceea ce înseamnă că $\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle$.

Definition

Se numește **normă** pe spațiul vectorial V o funcție

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

care satisface condițiile:
(i) $\|v\| \geq 0, \ \forall v \in V$ și $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$;
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall u, v \in V$.

Definition

Un spațiu vectorial înzestrat cu o normă $\|\cdot\|$ se numește **spațiu normat**.

Theorem

Fie $(V;\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Atunci funcția

$$\|\cdot\|:V\to\mathbb{R},\ \|v\|:=\sqrt{\langle v,v\rangle},\ \forall v\in V$$

este o normă pe V, numită **norma euclidiană** *indusă de produsul scalar.*

Observații:

bf 1. Din teorema anterioară rezultă că orice spațiu vectorial euclidian este un spațiu normat cu norma indusă de produsul scalar.
2. Într-un spațiu vetorial normat, inegalitatea Cauchy–Schwarz–Buniakovski se poate rescrie sub forma

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Definition

Fie V un spațiu vectorial euclidian și $u, v \in V \setminus \{0\}$. Numărul $\theta \in [0, \pi]$ definit prin

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

se numește **unghiul** dintre vectorii u și v.

Definition

Un vector se numește **versor** (sau **vector unitar**) dacă norma sa este 1.

Observație: Orice vector $v \in V \setminus \{0\}$ are un vector unitar corespunzător notat cu v^0 și dat de:

$$v^0 = \frac{1}{\|v\|} \cdot v.$$

Definition

Se numește **distanță** sau **metrică** pe mulțimea nevidă M o funcție

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

care satisface condițiile:
(i) $d(x, y) \geq 0, \ \forall x, y \in M$ și $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in M$;
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \ \forall x, y, z \in M$.

Definition

O mulțime M înzestrată cu o distanță (metrică) d se numește **spațiu metric**.

Orice spațiu vectorial normat este spațiu metric cu *distanța euclidiană* definită de $d(u, v) = \|u - v\|$.

Definition

Fie $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Doi vectori $u, v \in V$ se numesc **ortogonali** dacă produsul lor scalar este nul, i.e. $\langle u, v \rangle = 0$.

Definition

Fie $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu vectorial euclidian și o mulțime de vectori $U \subset V$. Mulțimea tuturor vectorilor ortogonali pe vectorii din U

$$U^{\perp} := \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0,\ \forall u \in U\}$$

se numește **complementul ortogonal** al lui U și este un subspațiu vectorial al lui V.

Theorem

Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Dacă vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ sunt ortogonali doi câte doi, adică

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0,\ i, j = \overline{1, n}, i \neq j,$$

atunci aceștia sunt liniar independenți.

Considerăm combinația liniară

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_1 \rangle = \langle 0, v_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v_n, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1 \|v_1\|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

Înmulțind cu ceilalți vectori $v_2, \ldots, v_n$ obținem mod analog $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Definition

Fie $(V; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian n-dimensional și o bază $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

1. Baza B se numește **ortogonală** dacă $e_1, \ldots, e_n$ sunt ortogonali doi câte doi, i.e.

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \ \ i, j = \overline{1, n}, i \neq j;$$

2. Baza B se numește **ortonormată** dacă este ortogonală și toți vectorii din B au norma 1, i.e.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, \ \text{dacă } i = j \\ 0, \ \text{dacă } i \neq j \end{cases}, \ \ i, j = \overline{1, n}.$$

Theorem (Procedeul de ortonormalizare Gram–Schmidt)

Fie $(V; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spațiu vectorial euclidian n-dimensional și o bază $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Atunci se poate construi o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ pornind de la baza B.

Demonstrație: Construim mai întâi o bază ortogonală pornind de la baza B, iar apoi considerând versorii corespunzători se obține baza ortonormată căutată.

Pasul 1. Definim $v_1 = u_1$.

Pasul 2. Definim $v_2 = u_2 + \alpha_{21} v_1$, unde scalarul α_{21} se determină punând condiția ca v_2 să fie ortogonal pe v_1,

$$0 = \langle v_2, v_1\rangle = \langle u_2 + \alpha_{21} v_1, v_1\rangle = \langle u_2, v_1\rangle + \alpha_{21}\langle v_1, v_1\rangle,$$

de unde rezultă

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}.$$

Pasul 3. Definim $v_3 = u_3 + \alpha_{31} v_1 + \alpha_{32} v_2$, unde scalarii α_{31}, α_{32} se determină punând condiția ca v_3 să fie ortogonal pe v_1 și v_2,

$$0 = \langle v_3, v_1\rangle = \langle u_3+\alpha_{31} v_1+\alpha_{32} v_2, v_1\rangle = \langle u_3, v_1\rangle+\alpha_{31}\langle v_1, v_1\rangle+\alpha_{32}\langle v_2, v_1\rangle,$$

de unde observând că $\langle v_2, v_1\rangle = 0$ rezultă $\alpha_{31} = -\dfrac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$.

Apoi

$$0 = \langle v_3, v_2\rangle = \langle u_3+\alpha_{31} v_1+\alpha_{32} v_2, v_2\rangle = \langle u_3, v_2\rangle+\alpha_{31}\langle v_1, v_2\rangle+\alpha_{32}\langle v_2, v_2\rangle$$

de unde observând că $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ rezultă $\alpha_{32} = -\dfrac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}$.

După n pași se obține baza ortogonală $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
Considerând versorii corespunzători vectorilor din B' se obține baza ortonormată $B'' = \{e_1, \ldots, e_n\}$, unde $e_i = \dfrac{1}{\|v_i\|} \cdot v_i,\ \ i = \overline{1, n}$.