CURS VII-VIII – Forme biliniare. Forme pătratice

1 Forme biliniare şi forme pătratice

1.1 Forme bilinare. Definiţii, proprietăţi generale

Fie V un K–spaţiu vectorial n–dimensional.

Definiţia 1 *O aplicaţie $\mathcal{A} : V \times V \to K$ se numeşte* ***formă biliniară*** *pe V dacă satisface condiţiile:*
(i) $\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y}, \vec{z})$, $\forall\alpha, \beta \in K$, $\forall\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (i.e., $\mathcal{A}$ este operator liniar în raport cu primul argument),
(ii) $\mathcal{A}(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) + \beta\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{z})$, $\forall\alpha, \beta \in K$, $\forall\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ (i.e., $\mathcal{A}$ este operator liniar în raport cu al doilea argument).

Vom nota cu $\mathcal{L}_2(V) = \{\mathcal{A} : V \times V \to K : \mathcal{A} \text{ este formă biliniară}\}$.

Propoziţia 2 *Mulţimea $\mathcal{L}_2(V)$ este un spaţiu vectorial peste K, numit spaţiul vectorial al formelor biliniare definite pe K–spaţiul vectorial V.*

Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ o bază în V. Fie $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_2(V)$ şi $\vec{x}, \vec{y} \in V$ cu descompunerea

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j.$$

Atunci vom obţine

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j\right) = \text{(din liniaritate)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, a_{ij}, \tag{1}$$

unde $a_{ij} := \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$.

Expresia (1) reprezintă **expresia în coordonate a formei biliniare** $\mathcal{A}$ în raport cu baza B. Vom nota cu $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ numită **matricea coordonatelor formei biliniare** $\mathcal{A}$ în raport cu baza B. Astfel, folosind (1), obţinem **expresia matriceală a formei biliniare** $\mathcal{A}$ în raport cu baza B

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = X^t \cdot A \cdot Y,$$

unde X, Y reprezintă matricile coloană ale vectorilor $\vec{x}$ şi $\vec{y}$ în baza B.

Corolarul 3 *Se poate arăta dimensiunea spaţiului vectorial $\mathcal{L}_2(V)$ este* $\dim\mathcal{L}_2(V) = \dim\mathcal{M}_n(K) = n^2$.

Prezentăm în continuare cum se schimbă matricea A la o schimbare de baze. Fie $\bar{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ o nouă bază în V cu $S = (s_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$ matricea schimbării de baze, $B \xrightarrow{S} \bar{B}$. Atunci $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}\vec{e}_i$ şi, notând $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$, unde $\bar{a}_{ij} = \mathcal{A}(\vec{f}_i, \vec{f}_j)$, obţinem

$$\bar{a}_{ij} = \mathcal{A}(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{n} s_{ki}\vec{e}_k, \sum_{l=1}^{n} s_{lj}\vec{e}_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} s_{ki}s_{lj}\mathcal{A}(\vec{e}_k, \vec{e}_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} s_{ki}s_{lj}\, a_{kl},\ i, j \in \overline{1,n}.$$

Deci, sub formă matriceală obţinem următoarea **formulă matriceală de schimbare a coordonatelor la schimbare de baze**

$$\bar{A} = S^t \cdot A \cdot S. \tag{2}$$

Prin definiţie, rangul unei forme biliniare este rangul matricii sale într-o bază oarecare a lui V (menţionăm că matricea S este nesingulară şi, din relaţia (2), deducem că rangul matricei $\bar{A}$ este egal cu rangul matricei A, deci rangul matricei formei este invariant la schimbări de baze).

Definiţia 4 *O formă biliniară se numeşte nedegenerată dacă rangul ei coincide cu dimensiunea n a spaţiului V (şi degenerată caz contrar).*

Definiţia 5 *O formă biliniară $\mathcal{A}$ se numeşte simetrică dacă $\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{y},\vec{x})$, pentru orice $\vec{x},\vec{y} \in V$.*

Se poate arăta că:

Propoziţia 6 *O formă biliniară $\mathcal{A}$ este simetrică dacă şi numai dacă există o bază a lui V în raport cu care matricea formei este simetrică.*

1.2 Forme pătratice. Definiţii, proprietăţi generale

Fie V un K–spaţiu vectorial n–dimensional.

Definiţia 7 *O aplicaţie $\mathcal{Q} : V \to K$ se numeşte **formă pătratică** pe V dacă există o formă biliniară simetrică $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_2(V)$ astfel încât*

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x},\vec{x}),\ \forall \vec{x} \in V. \tag{3}$$

Propoziţia 8 *Mulţimea tuturor formelor pătratice $\mathcal{Q} : V \to K$ este un spaţiu vectorial peste K.*

Propoziţia 9 *Dacă $\mathcal{Q}$ este o formă pătratică atunci forma biliniară simetrică $\mathcal{A}$ de la care provine este unic determintată.*

Demonstraţie. Din (3) obţinem

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\vec{x}+\vec{y}) &= \mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x},\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) + \mathcal{A}(\vec{y},\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y},\vec{y}) \\ &= \mathcal{A}(\vec{x},\vec{x}) + 2\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) + \mathcal{A}(\vec{y},\vec{y}) = \mathcal{Q}(\vec{x}) + \mathcal{Q}(\vec{y}) + 2\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}),\end{aligned}$$

deci $\mathcal{A}$ este unic determinată de egalitatea

$$\mathcal{A}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{Q}(\vec{x}+\vec{y}) - \mathcal{Q}(\vec{x}) - \mathcal{Q}(\vec{y})\right],\ \forall \vec{x},\vec{y} \in V.$$

■

Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ o bază în V. Fie $\mathcal{Q}$ o formă pătratică şi $\vec{x} \in V$ dat de descompunerea $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$. Atunci vom obţine

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\vec{x}) &= \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\right) = \text{(din liniaritate)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\, \mathcal{A}(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\, a_{ij}.\end{aligned} \tag{4}$$

Expresia (4) reprezintă **expresia în coordonate a formei pătratice** $\mathcal{Q}$ în raport cu baza B. Folosind matricea A obţinem şi **expresia matriceală a formei pătratice** $\mathcal{Q}$ în raport cu baza B

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X,$$

unde X reprezintă matricea coloană a vectorului $\vec{x}$ în baza B.

Definiţia 10 *Matricea unei forme pătratice $\mathcal{Q}$ este prin definiţie matricea A a formei biliniare asociate iar rangul unei forme pătratice este rangul acestei matrice.*

Definiţia 11 *O formă pătratică se numeşte nedegenerată dacă rangul ei coincide cu dimensiunea n a spaţiului V.*

Exerciţiul 12 *Fie forma pătratică $\mathcal{Q}(\vec{x}) = \mathcal{Q}(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.* ***Forma biliniară asociată lui $\mathcal{Q}$ se obţine prin dedublare****. Mai precis, urmăm următoarele asocieri:*

$$
\begin{aligned}
(x_i)^2 &= x_ix_i \rightsquigarrow x_iy_i, \\
x_ix_j &= \frac{1}{2}x_ix_j + \frac{1}{2}x_ix_j \rightsquigarrow \frac{1}{2}x_iy_j + \frac{1}{2}x_jy_i.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Deci avem

$$
\mathcal{Q}(\vec{x}) = \mathcal{Q}(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 + 2 \cdot 2x_1x_3 + 3 \cdot 2x_2x_3
$$

şi prin dedublare obţinem

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) &= \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2x_1y_3 + 2y_1x_3 + 3x_2y_3 + 3y_2x_3 \\
&= x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2.
\end{aligned}
$$

Se vor calcula $\mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ şi vom obţinea matricea A a coordonatelor lui $\mathcal{Q}$ în raport cu baza canonică

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}
$$

Se va determina rangul matricii şi se va obţine $\mathrm{rang}\mathcal{Q} = \mathrm{rang}A = 3$.

1.3 Forma canonică a unei forme pătratice

Fie V un K–spaţiu vectorial n–dimensional.

Definiţia 13 *Spunem că forma pătratică $\mathcal{Q}$ este redusă la forma canonică, dacă s-a găsit o bază $\bar{B} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\}$ a lui V, în raport cu care expresia în coordonate a lui $\mathcal{Q}$ este*

$$
\mathcal{Q}(\vec{x}) = \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2 + \cdots + \lambda_n (y_n)^2, \tag{6}
$$

unde $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ nu sunt, în mod necesar, toţi nenuli iar

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \text{ (descompunerea în baza } B) \\
&= y_1f_1 + y_2f_2 + \cdots + y_nf_n \text{ (descompunerea în baza } \bar{B}).
\end{aligned}
$$

Definiţia 14 *O formă pătratică $\mathcal{Q}$ se numeşte pozitiv definită dacă toţi cei n coeficienţi sunt strict pozitivi.*

Forma pătratică $\mathcal{Q}$ se numeşte negativ definită dacă toţi cei n coeficienţi sunt strict negativi.

Forma pătratică $\mathcal{Q}$ se numeşte nedefinită dacă există şi coeficienţi strict pozitivi şi coeficienţi strict negativi.

Problema este dacă există baze $\bar{B}$ în raport cu care expresia unei forme pătratice să fie de forma canonică (6).

Răspunsul este dat de următoarele trei metode: **metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi** şi **metoda transformărilor ortogonale**. Prezentăm, fără demonstraţie, aceste rezultate, metodele fiind aplicate în câteva exemple ulterioare.

Teorema 15 (Metoda lui Gauss) *Fie $\mathcal{Q}$ o forma pătratică. Atunci există cel puţin o bază $\bar{B}$ a lui V şi corespunzător acesteia există scalarii $\lambda_1, ..., \lambda_n$, în raport cu care expresia în coordonate a lui $\mathcal{Q}$ are forma canonică (6).*

Remarca 16 *Demonstraţia teoremei lui Gauss ne oferă şi algoritmul practic de reducere la forma canonică a unei forme pătratice $\mathcal{Q}$, precum şi modul de determinare al bazei $\bar{B}$. Astfel, conform demonstraţiei teoremei, avem următoarele situaţii:*
1. *dacă forma pătratică conţine cel puţin un pătrat $(x_i)^2$, atunci grupăm toţi termenii care conţin termenul x_i şi formăm un pătrat perfect folosind identitatea $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;*
2. *dacă forma pătratică nu conţine nici un pătrat dar apare termenul $x_i x_j$, atunci facem schimbarea de variabilă*

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \\ x_k = y_k, \ \forall k \neq i, j. \end{cases}$$

Prin înlocuirea în formă pătratică, vor apărea pătratele $(y_i)^2$ şi $(y_j)^2$, deci suntem în primul caz.

Exerciţiul 17 *Se dă forma pătratică*

$$\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ \mathcal{Q}(\vec{x}) = 5(x_1)^2 + 6(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Să se scrie forma biliniară simetrică din care provine $\mathcal{Q}$ şi să se determine matricea formei pătratice în raport cu baza canonică şi să se calculeze rangul formei.

De asemenea, să se aducă forma pătratică la forma canonică prin metoda lui Gauss.

Rezolvare:

Forma biliniară asociată se scrie folosind tehnica de dedublare (vezi (5)) şi obţinem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) &= 5x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_3y_3 - 4\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - 4\frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= 5x_1y_1 + 6x_2y_2 + 4x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Prin definiţie,

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X,$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$, iar A este matricea formei biliniare simetrice corespunzătoare $\mathcal{A}$.

Calculând $a_{ij} = \mathcal{A}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ obţinem matricea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

deci

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = X^t \cdot A \cdot X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Rangul formei va fi atunci $\operatorname{rang}\mathcal{Q} = \operatorname{rang}\mathcal{A} = \operatorname{rang}A = 3$, *adică forma biliniară (şi cea pătratică) este nedegenerată.*

Aducem acum forma pătratică la forma canonică. În cazul nostru, apare pătratul $5(x_1)^2$ şi termenii x_1x_2, x_1x_3. Apare şi pătratul $6(x_2)^2$ şi apoi x_1x_2. Alegem, pentru simplitate, să plecăm de la termenul

x_2 şi deci grupăm toţi termenii care conţin termenul x_2 şi formăm un pătrat perfect

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(\vec{x}) = \left(6(x_2)^2 - 4x_1x_2\right) + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3\\
&= \frac{1}{6}\left((6x_2)^2 - 24x_1x_2\right) + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3\\
&= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 - \frac{1}{6}(2x_1)^2 + 5(x_1)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_3\\
&= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \left(4(x_3)^2 - 4x_1x_3\right) + \frac{13}{3}(x_1)^2\\
&= \text{(putem pleca şi de la } \frac{13}{3}(x_1)^2\text{, dar pentru simplitatea calculelor plecăm de la } 4(x_3)^2\text{)}\\
&= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{1}{4}\left((4x_3)^2 - 16x_1x_3\right) + \frac{13}{3}(x_1)^2\\
&= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{1}{4}(4x_3 - 2x_1)^2 - \frac{1}{4}(2x_1)^2 + \frac{13}{3}(x_1)^2\\
&= \frac{1}{6}(6x_2 - 2x_1)^2 + \frac{1}{4}(4x_3 - 2x_1)^2 + \frac{10}{3}(x_1)^2\\
&= \frac{1}{6}(y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2)^2 + \frac{10}{3}(y_3)^2,
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 6x_2\\ y_2 = -2x_1 + 4x_3\\ y_3 = x_1. \end{cases} \tag{7}$$

Deoarece toţi coeficienţii $1/6, 3/13$ şi $40/13$ sunt strict pozitivi, deducem că forma pătratică dată este pozitiv definită.

Să determinăm în continuare baza $\bar{B}$ în raport cu care forma pătratică $\mathcal{Q}$ are forma canonică de mai sus.

Rezolvăm sistemul de mai sus astfel încât să determinăm coordonatel x_i în raport de coordonatele y_j. Vom obţine

$$\begin{cases} x_1 = y_3\\ x_2 = \dfrac{1}{6}y_1 + \dfrac{1}{3}y_3\\ x_3 = \dfrac{1}{4}y_2 + \dfrac{1}{2}y_3\,. \end{cases}$$

deci

$$X = SY \Leftrightarrow Y = S^{-1}X,$$

unde

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1/6 & 0 & 1/3\\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Evident puteam citi şi direct din (7) matricea $S^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0\\ -2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Dar, prin definiţie, matricea S este matricea schimbării de baze de la B_c la baza $\bar{B} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\}$ în raport cu care forma pătratică $\mathcal{Q}$ are forma canonică $\mathcal{Q}(\vec{x}) = \frac{1}{6}(y_1)^2 + \frac{1}{4}(y_2)^2 + \frac{10}{3}(y_3)^2$.

Deci citim coordonatele din matricea S şi obţinem $\vec{f}_1 = (0, 1/6, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 0, 1/4)$, $\vec{f}_3 = (1, 1/3, 1/2)$.

Evident, din forma canonică, citim că forma pătratică are în raport cu această nouă bază matricea $\bar{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$. *Într-adevăr, conform formulei de schimbare a matricei A la schimbare de baze,*

$$\begin{aligned}\bar{A} &= S^tAS=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/6 & 0 & 1/3\\ 0 & 1/4 & 1/2\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}5 & -2 & -2\\ -2 & 6 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/6 & 0 & 1/3\\ 0 & 1/4 & 1/2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1/3 & 1 & 0\\ -1/2 & 0 & 1\\ 10/3 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/6 & 0 & 1/3\\ 0 & 1/4 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/6 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 10/3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Teorema 18 (Metoda lui Jacobi) *Fie $\mathcal{Q}$ o forma pătratică astfel încât $\mathrm{rang}\mathrm{Q}=n$. Atunci există o bază B a lui V în care determinanţii*

$$\Delta_0=1,\ \Delta_1=a_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\ldots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

sunt toţi nenuli, şi există o bază $\bar{B}=\{\vec{f}_1,...,\vec{f}_n\}$ a lui V în raport cu care expresia în coordonate a lui h are forma canonică

$$\mathcal{Q}(\vec{x})=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}(y_1)^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(y_2)^2+\cdots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(y_n)^2,$$

unde $\vec{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\vec{f}_i$.

Remarca 19 *Prezentăm în continuare tehnica concretă de găsire a bazei $\bar{B}=\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\}$ (am luat, pentru simplitatea expunerii $n=3$) în raport cu care are loc scrierea canonică a lui $\mathcal{Q}$. Vom considera că relaţiile de legătură dintre $\vec{f}_i$ şi $\vec{e}_j$ sunt următoarele:*

$$\begin{cases}\vec{f}_1=c_{11}\vec{e}_1\\ \vec{f}_2=c_{21}\vec{e}_1+c_{22}\vec{e}_2\\ \vec{f}_3=c_{31}\vec{e}_1+c_{32}\vec{e}_2+c_{33}\vec{e}_3\,.\end{cases}$$

Calculul coeficienţilor c_{ij} se face impunând condiţiile suplimentare

$$\mathcal{A}(\vec{f}_i,\vec{e}_j)=\delta_{ij}:=\begin{cases}1, \text{ dacă } i=j,\\ 0, \text{ dacă } i\neq j\end{cases}$$

Obţinem astfel sistemele

$$\mathcal{A}(\vec{f}_1,\vec{e}_1)=1\Leftrightarrow\mathcal{A}(c_{11}\vec{e}_1,\vec{e}_1)=c_{11}\mathcal{A}(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=c_{11}a_{11}=1,\tag{8}$$

şi

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\mathcal{A}(\vec{f}_2,\vec{e}_1)=0,\\ \mathcal{A}(\vec{f}_2,\vec{e}_2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathcal{A}(c_{21}\vec{e}_1+c_{22}\vec{e}_2,\vec{e}_1)=0,\\ \mathcal{A}(c_{21}\vec{e}_1+c_{22}\vec{e}_2,\vec{e}_2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_{21}\mathcal{A}(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+c_{22}\mathcal{A}(\vec{e}_2,\vec{e}_1)=0,\\ c_{21}\mathcal{A}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+c_{22}\mathcal{A}(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}c_{21}a_{11}+c_{22}a_{21}=0,\\ c_{21}a_{12}+c_{22}a_{22}=1\end{cases}\end{aligned}\tag{9}$$

şi respectiv

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\vec{f}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(\vec{f}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ \mathcal{A}(\vec{f}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ \mathcal{A}(c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, \\ c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0, \\ c_{31}\mathcal{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + c_{32}\mathcal{A}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + c_{33}\mathcal{A}(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{31}a_{11} + c_{32}a_{21} + c_{33}a_{31} = 0, \\ c_{31}a_{12} + c_{32}a_{22} + c_{33}a_{32} = 0, \\ c_{31}a_{13} + c_{32}a_{23} + c_{33}a_{33} = 1 \end{cases} \tag{10}$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Exerciţiul 20 *Se dă forma pătratică $\mathcal{Q}$ de la Exerciţiul 17. Să se aducă forma pătratică $\mathcal{Q}$ la forma canonică prin metoda lui Jacobi.*

Rezolvare:

Matricea formei pătratice este

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculăm determinanţii

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80.$$

Deci forma canonică va fi

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = \frac{1}{5}(y_1)^2 + \frac{5}{26}(y_2)^2 + \frac{13}{40}(y_3)^2.$$

Pentru a determina baza $\bar{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ în care are loc această scriere canonică a lui $\mathcal{Q}$, considerăm că relaţiile de legătură dintre $\vec{f}_i$ şi $\vec{e}_j$ sunt următoarele:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = c_{21}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = c_{31}\vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3. \end{cases}$$

Calculul coeficienţilor c_{ij} se face impunând condiţiile suplimentare

$$\mathcal{A}(\vec{f}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1,\ \textit{dacă } i = j, \\ 0,\ \textit{dacă } i \neq j \end{cases}$$

În cazul nostru sistemel (8–10)de mai sus devin, în particular,

$$5c_{11} = 1 \Leftrightarrow c_{11} = 1/5$$

şi

$$\begin{cases} 5c_{21} - 2c_{22} = 0, \\ -2c_{21} + 6c_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c_{21} = 1/13,\ c_{22} = 5/26$$

şi respectiv

$$\begin{cases} 5c_{31} - 2c_{32} - 2c_{33} = 0, \\ -2c_{31} + 6c_{32} = 0, \\ -2c_{31} + 4c_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c_{31} = 3/20,\ c_{32} = 1/20,\ c_{33} = 13/40.$$

Prin urmare noua bază în raport cu care $\mathcal{Q}$ are forma canonică este

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \dfrac{1}{5}\vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = \dfrac{1}{13}\vec{e}_1 + \dfrac{5}{26}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = \dfrac{3}{20}\vec{e}_1 + \dfrac{1}{20}\vec{e}_2 + \dfrac{13}{40}\vec{e}_3 \,. \end{cases}$$

Citim matricea schimbării de baze

$$S = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/13 & 3/20 \\ 0 & 5/26 & 1/20 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{bmatrix}.$$

Calculăm

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 26/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 40/13 \end{bmatrix}$$

Deoarece legătura dintre cele două tipuri de coordonate (în funcţia de baza în care se face descompunerea) este

$$X = SY \Leftrightarrow Y = S^{-1}X,$$

deducem că

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/13 & 3/20 \\ 0 & 5/26 & 1/20 \\ 0 & 0 & 13/40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

sau echivalent

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 26/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 40/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Deci

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{1}{13}y_2 + \frac{3}{20}y_3 \\ x_2 = \frac{5}{26}y_2 + \frac{1}{20}y_3 \\ x_3 = \frac{13}{40}y_3 \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ y_2 = \frac{26}{5}x_2 + \frac{1}{20}y_3 \\ y_3 = \frac{13}{40}y_3 \end{cases}$$

Remarca 21 *Cea de a treia metodă este* ***metoda transformărilor ortogonale (sau a valorilor proprii)****. Fie forma pătratică $\mathcal{Q}$ dată de $\mathcal{Q}(\bar{u}) = X^t \cdot A \cdot X$. Fie transformarea liniară T care are drept matrice tot pe A. Deoarece A este simetrică, se poate arăta că ea va avea valori proprii reale şi simple (adică diferite între ele) iar vectorii proprii corespunzători vor fi ortogonali doi câte doi. Normând aceşti vectori vom obţine deci nişte versori (vectori de normă 1) ortogonali doi câte doi. Aceştia vor forma o nouă bază $\bar{B}$ şi în raport* *cu aceasa transformarea liniară T este diagonalizabilă matricea nouă fiind diagonală având valorile proprii pe diagonala principală, şi deci $\mathcal{Q}$ va avea o formă canonică în raport cu această nouă bază $\bar{B}$.*

Într-adevăr, dacă are loc relaţia $X = SY$ unde $B \xrightarrow{S} \bar{B}$ iar S se poate arăta, folosind definiţia bazei $\bar{B}$, că este matrice ortogonală (i.e. $S^{-1} = S^t$) şi X, Y reprezintă matricele coloană ale vectorului $\vec{x}$ în raport cu baza B şi respectiv $\bar{B}$, atunci

$$\mathcal{Q}(\bar{u}) = X^t \cdot A \cdot X = (SY)^t \cdot A \cdot (SY) = \left(Y^t S^t\right) \cdot A \cdot (SY) = Y^t \cdot \left(S^t \cdot A \cdot S\right) \cdot Y = Y^t \cdot \left(S^{-1} \cdot A \cdot S\right) \cdot Y.$$

Dar T este diagonalizabilă în această nouă bază, deci noua matrice (obţinută prin schimbarea bazelor) este $\bar{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S$ şi are formă diagonală. Deoarece

$$\mathcal{Q}(\bar{u}) = Y^t \cdot \bar{A} \cdot Y,$$

obţinem că $\mathcal{Q}$ are deci formă canonică.

Exerciţiul 22 *Se dă forma pătratică $\mathcal{Q}$ de la Exerciţiul 17. Să se aducă forma pătratică $\mathcal{Q}$ la forma canonică prin metoda transformărilor ortogonale.*

Rezolvare:

Matricea formei pătratice este

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică asociată matricei A este

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0,$$

deci, efectuând calculele, obţinem

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 66\lambda + 80 = 0.$$

Se va obţine, căutând rădăcinile printre divizorii termenului liber şi folosind schema lui Horner,

$$\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda - 8) = 0,$$

şi deci rădăcinile sunt $\lambda_1 = 2$, $m_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $m_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$, $m_3 = 1$. Acestea fiind din câmpul de scalari, obţinem că sunt chiar valori proprii.

Vom calcula acum subspaţiile proprii $V(2)$, $V(5)$ şi $V(8)$ corespunzătoare celor trei valori proprii găsite. Avem

$$V(\lambda) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A - \lambda I_3) X = 0\},$$

deci trebuie rezolvat sistemul liniar şi omogen

$$\begin{cases} (5-\lambda) x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (6-\lambda) x_2 = 0 \\ -2x_1 + (4-\lambda) x_3 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Pentru determinarea lui $V(2)$, rezolvăm, prin urmare, sistemul liniar şi omogen (11):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Rangul matricii sistemului este 2, deci sistemul are două necunoscute principale, x_1, x_2, şi o necunoscută secundară, $x_3 = \alpha$. Vom obţinem soluţia $X = \alpha(2, 1, 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Deci
$$V(2) = \{\alpha(2,1,2) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$
adică $V(2)$ *este generat de vectorul* $\vec{f_1} = (2,1,2)$ *şi prin urmare* $\{\vec{f_1}\}$ *este bază în* $V(2)$ *şi deci* $\dim V(2) = 1 = m_1$.

Analog
$$V(5) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A - 5I_3)X = 0\}$$
şi sistemul liniar şi omogen $(A - 5I_3)X = 0$ *este*
$$\begin{cases} -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$
care are soluţia $X = \alpha(1,2,-2),\ \alpha \in \mathbb{R}$. *Deci*
$$V(5) = \{\alpha(1,2,-2) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$
adică $V(5)$ *este generat de vectorul nenul* $\vec{f_2} = (1,2,-2)$ *şi prin urmare* $\{\vec{f_2}\}$ *este bază în* $V(5)$ *şi deci* $\dim V(5) = 1 = m_2$.

Analog $V(8) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A - 8I_3)X = 0\}$ *şi sistemul liniar şi omogen* $(A - 8I_3)X = 0$ *este*
$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$
care are soluţia $X = \alpha(2,-2,-1),\ \alpha \in \mathbb{R}$. *Deci*
$$V(8) = \{\alpha(2,-2,-1) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$
adică $V(8)$ *este generat de vectorul nenul* $\vec{f_3} = (2,-2,-1)$ *şi prin urmare* $\{\vec{f_3}\}$ *este bază în* $V(5)$ *şi deci* $\dim V(8) = 1 = m_3$.

Observăm, mai întâi că, dacă notăm prin T *endomorfismul care are drept matrice pe* A, *atunci, conform teoremei de diagonalizare, endomorfismul* T *este diagonalizabil (rădăcinile caracterisitice sunt din câmpul de scalari, i.e.* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,3}$, *şi subspaţiile proprii au dimensiunea egală cu multiplicitatea valorii proprii, i.e.* $\dim V(\lambda_i) = m_i$, $\forall i = \overline{1,3}$*).*

Pe de altă parte, conform teoriei, deoarece valorile proprii sunt simple (au multiplicitatea 1*) atunci vectorii proprii corespunzători sunt ortogonali. Aceştia mai* ***trebuie doar normalizaţi****. Mai precis dacă avem vectorul* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, *atunci versorul lui* $\vec{u}$ *este dat de formula*
$$\frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}}\vec{u}$$

Deci prin normalizare obţin baza ortonormată
$$\bar{B} = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\} = \left\{\frac{1}{||\vec{f_1}||}\vec{f_1}, \frac{1}{||\vec{f_2}||}\vec{f_2}, \frac{1}{||\vec{f_3}||}\vec{f_3}\right\} = \left\{\frac{1}{3}(2,1,2), \frac{1}{3}(1,2,-2), \frac{1}{3}(2,-2,-1)\right\}.$$
Matricea schimbării de baze $B_c \xrightarrow{S} \bar{B}$ *este deci*
$$S = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
care este, conform teoriei, ***matrice ortogonală****, adică* $S^{-1} = S^t$.

Verificăm mai întâi egalitatea de mai sus calculând transpusa S^t şi apoi inversa

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} S^* = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} -6 & -3 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = S = S^t.$$

Matricea formei pătratice în raport cu noua bază va fi atunci dată de formula (vezi (2))

$$\bar{A} = S^t \cdot A \cdot S = \textit{calcule temă} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Deci forma canonică a formei pătratice va fi atunci

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = 2(y_1)^2 + 5(y_2)^2 + 8(y_3)^2,$$

unde y_i, $i = \overline{1,3}$ sunt coeficienţii descompunerii lui $\vec{x}$ în baza $\bar{B}$, adică are loc descompunerea în cele două baze B_c şi $\bar{B}$ dată de:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{e}_1' + y_2\vec{e}_2' + y_3\vec{e}_3'.$$

Pentru a determina matricea coloană Y avem formulele

$$X = SY \Leftrightarrow Y = S^{-1}X$$

Se va obţine

$$Y = S^{-1}X = S^tX \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

deci

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{3}(2x_1 + x_2 + 2x_3) \\ y_2 = \dfrac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3) \\ y_3 = \dfrac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 - x_3). \end{cases}$$