http://math.etc.tuiasi.ro/otarniceriu/

CURS VIII – IX

1 Algebra vectorială a vectorilor liberi

1.1 Spaţiul vectorial al vectorilor liberi

Vom nota cu E_3 spaţiul geometric tridimensional (intuitiv) conceput ca o mulţime de puncte. Noţiunile de punct, dreaptă, plan şi spaţiu le considerăm cunoscute cu sensul lor intuitiv din geometria elementară. Dreptele şi planele sunt submulţimi ale lui E_3.

Definiţia 1 *Se numeşte* ***segment orientat*** *sau* ***vector legat*** *orice pereche orientată de puncte din spaţiu.*

Dacă A, B sunt două puncte date în spaţiul E_3, atunci pentru segmentul orientat definit de perechea de puncte (A, B) vom folosi notaţia $\overline{AB}$. Deci orice segment orientat este un element al produsului cartezian $E_3 \times E_3$. Punctul A se va numi originea segmentului orientat iar B extremitatea sa. Dacă $A = B$ atunci $\overline{AA}$ este segmentul nul. Dacă $A \neq B$ atunci dreapta determinată de A şi B se numeşte dreapta suport a segmentului orientat $\overline{AB}$.

Definiţia 2 *Punctul A se numeşte* ***originea*** *iar B se numeşte* ***vârful*** *sau* ***extremitatea*** *vectorului legat* $\overline{AB}$.

Definiţia 3 *Două segmente orientate nenule au aceaşi direcţie dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.*

Definiţia 4 *Două segmente orientate nenule se numesc* ***coliniare*** *dacă au aceaşi direcţie. În caz contrar ele se numesc necoliniare.*

Definiţia 5 *Două segmente orientate nenule care au aceeaşi direcţie, spunem că au acelaşi sens dacă*

(i) *sunt necoliniare şi extremităţile lor se află în acelaşi semiplan în raport cu dreapta determinată de originile lor.*

Definiţia 6 *Se numeşte* ***mărime (modul sau normă) a unui segment orientat*** $\overline{AB}$, *distanţa dintre punctele A şi B. Vom nota mărimea cu* $||\overline{AB}||$.

Definiţia 7 *Două segmente orientate* $\overline{AB}$ *şi* $\overline{CD}$ *au aceaşi mărime dacă* $||\overline{AB}|| = ||\overline{CD}||$.

Definiţia 8 *Două segmente orientate se numesc echipolente dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi mărime; vom nota aceasta cu* $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

Definiţia 9 *Se numeşte vector liber o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de echipolenţă pe mulţimea segmentelor orientate din spaţiu.*

Vom nota cu $\overrightarrow{AB} = \left\{\overline{CD} : \overline{CD} \sim \overline{AB}\right\}$, şi în general, vectorii liberi cu $\vec{u}, \vec{v}$. În general vectorul liber este gândit printr-un reprezentat al tău. Dacă aplicăm vectorul liber $\vec{u}$ într-un punct A din spaţiu atunci vom obţine $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Extremitatea B este astfel unic determinată. Orice vector liber poate fi aplicat în orice punct din spaţiu. Mulţimea tuturor segmentelor nule orientate defineşte un vector ce va fi numit vectorul liber nul, notat cu $\vec{0}$. Avem deci $\vec{0} = \left\{\overline{AA} : A \in E_3\right\}$. Definim mărimea, direcţia şi sensul unui vector liber ca fiind mărimea, direcţia şi respectiv sensul unui reprezentant oarecare al lui. Vectorul liber de mărime egală cu unitatea se numeşte versor.

Vom nota cu V_3 mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu.

Definiţia 10 *Suma a doi vectori liberi se obţine prin*

- *regula triunghiului: astfel fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ şi A un punct din spaţiu. Aplic $\vec{u}$ în punctul A şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\vec{v}$ în punctul B şi obţin $\overrightarrow{BC}$. Se va forma astfel triunghiul ABC. Prin definiţie $\vec{u} + \vec{v}$ este segmentul orientat care dă cea de a treia latură a triunghiului,*

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}$$

sau

- *regula paralelogramului: astfel fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ şi A un punct din spaţiu. Aplic $\vec{u}$ în punctul A şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\vec{v}$ în punctul A şi obţin $\overrightarrow{AC}$. Pe segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ se poate forma paralelogramul $ABDC$. Prin definiţie $\vec{u} + \vec{v}$ este segmentul orientat care dă diagonala mare a paralelogramului,*

$$\vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AD}.$$

Remarca 11 *Regula de adunare a vectorilor este bine definită; astfel vectorul $\vec{u} + \vec{v}$ nu depinde de punctul de plecare A.*

Propoziţia 12 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\,, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.
*b) Există vectorul notat $\vec{0} \in V_3$, numit **vector nul**, astfel încât $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u},\ \forall\, \vec{u} \in V_3$.*
*c) Pentru orice $\vec{u} \in V_3$ există vectorul $-\vec{u} \in V_3$, numit **opusul** lui $\vec{u}$, astfel încât $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.*
d) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

Remarca 13 *Astfel $(V_3, +)$ devine grup comutativ.*

Definiţia 14 (înmulţirea cu scalari a vectorilor liberi) *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in V_3$ atunci $\alpha\, \vec{u}$ este dat de:*
a) dacă $\alpha = 0$ sau $\vec{u} = \vec{0}$, atunci $\alpha\, \vec{u} = \vec{0}$,
b) dacă $\alpha \neq 0$ şi $\vec{u} \neq \vec{0}$, atunci $\alpha\, \vec{u}$ este vectorul liber care are aceeaşi direcţie cu $\vec{u}$, acelaşi sens cu $\vec{u}$ dacă $\alpha > 0$, sens opus lui $\vec{u}$ dacă $\alpha < 0$, şi mărimea dată de $||\alpha\vec{u}|| = |\alpha|\ ||\vec{u}||$.

Propoziţia 15 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) $\alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.
b) $(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, \vec{u} \in V_3$.
c) $\alpha\,(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, \vec{u} \in V_3$.
d) $1\,\vec{u} = \vec{u}, \forall\, \vec{u} \in V_3$.

Remarca 16 *Din propoziţiile de mai sus deducem că spaţiul vectorilor liberi V_3 este un spaţiu vectorial real în raport cu adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari a vectorilor.*

Definiţia 17 *Diferenţa a doi vectori liberi se obţine astfel: fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ şi A un punct din spaţiu. Aplic $\vec{u}$ în punctul A şi vom obţine $\overrightarrow{AB}$; aplic $\vec{v}$ în acelaşi punct A şi obţin $\overrightarrow{AC}$. Vom obţine atunci*

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.$$

Prin definiţie avem că

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} := \overrightarrow{CB}.$$

1.2 Dependenţa şi independenţa liniară a vectorilor liberi

Definiţia 18 *Doi vectori liberi se numesc* ***coliniari*** *dacă au aceaşi direcţie.*

Propoziţia 19 *Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă sunt liniari dependenţi.*

Demonstraţie. Necesitatea ("$\Rightarrow$").

Fie $\vec{u}, \vec{v}$ cei doi vectori coliniari. Îi aplicăm în punctul A şi obţinem $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Presupunem $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ şi fie $\lambda = \pm\frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$, luat cu semnul plus sau minus în funcţie dacă $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ au sau nu acelaşi sens. Vom obţine $\vec{v} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow \lambda\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, ceea ce înseamnă că vectorii sunt liniar dependenţi.

Suficienţa ("$\Leftarrow$").

Presupunem că avem relaţia $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} = \vec{0}$, cu $\alpha, \beta \neq 0$. Presupunem $\beta \neq 0$ şi obţinem $\vec{v} = \frac{-\alpha}{\beta}\vec{u}$, adică $\vec{u}, \vec{v}$ au aceaşi direcţie deci sunt coliniari. ■

Definiţia 20 *Un vector liber nenul este paralel cu un plan dacă dreapta suport a oricărui reprezentant al său este paralelă cu planul (sau este conţinut în plan). Trei vectori se numesc coplanari dacă sunt paraleli cu acelaşi plan.*

Propoziţia 21 *Trei vectori liberi sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniari dependenţi.*

Demonstraţie. Demonstrăm doar suficienţa ("$\Leftarrow$").

Presupunem că avem relaţia $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, cu α, β, γ nu toţi nuli. Presupunem $\gamma \neq 0$ şi obţinem $\vec{w} = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\vec{u} + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)\vec{v}$. Dar $\frac{\alpha}{\gamma}\vec{u}$ este coliniar cu $\vec{u}$, iar $\frac{\beta}{\gamma}\vec{v}$ este coliniar cu $\vec{v}$. Am obţinut deci că $\vec{w}$ este în acelaşi plan cu vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. ■

Propoziţia 22 *Oricare patru vectori liberi sunt liniar dependenţi.*

Corolarul 23 *a) Doi vectori liberi sunt liniari independenţi dacă şi numai dacă sunt necoliniari.*
b) Trei vectori liberi sunt liniari independenţi dacă şi numai dacă sunt necoplanari.

Prin urmare, oricare trei vectori liberi necoplanari sunt indepenţi şi constituie şi sistem de generatori pentru orice alt vector liber, deci

Teorema 24 *În spaţiul vectorial al vectorilor liberi V_3 oricare trei vectori liberi necoplanari formează o bază. Deci dimensiunea spaţiului V_3 este 3.*

Propoziţia 25 *Fie planul π din spaţiul E_3 şi notăm prin V_π mulţimea tuturor vectorilor din V_3 paraleli cu planul π. Atunci V_π este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2.*

Propoziţia 26 *Fie dreapta d din spaţiul E_3 şi notăm prin V_d mulţimea tuturor vectorilor din V_3 paraleli cu dreapta d (adică dreapta suport a oricărui reprezentant al lui $\vec{u}$ este paralelă sau coincide cu d). Atunci V_d este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1.*

1.3 Expresia analitică a vectorilor liberi

În spaţiul E_3, fixăm un punct O numit origine. Trasând prin acest punct trei drepte perpendiculare două câte două, obţinem reperul cartezian de coordonate $Oxyz$ (René Descartes, 1637). Ox este axa absciselor, Oy a ordonatelor, iar Oz a cotelor.

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o **bază ortonormată** a lui $\mathbb{R}^3$, adică B este bază, iar vectorii bazei sunt versori şi sunt ortogonali doi câte doi, i.e. verifică condiţiile

$$\begin{cases} ||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1, \\ \vec{i}\perp\vec{j},\ \vec{i}\perp\vec{k},\ \vec{j}\perp\vec{k} \end{cases}$$

sau echivalent

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \quad \text{şi} \quad \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = 0.$$

Reamintim că existenţa bazelor ortonormate este asigurată de procedeul de ortonormalizare al lui Gram–Schmidt.

Pe cele 3 axe,se consideră versorii $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, cu originea în O şi având direcţiile lui Ox, Oy şi Oz respectiv.

Cum $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ reprezintă o bază ortonormată în V_3, , orice vector $\vec{v} \in V_3$ are o descompunere unică in această bază:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \tag{1}$$

unde v_x, v_y, v_z sunt coordonatele vectorului $\vec{v}$ în raport cu baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Expresia (1) se numeşte expresia analitică a vectorului $\vec{v}$ (în raport cu baza considerată).

Fie $M \in E_3$. În raport cu sistemul de coordonate considerat, M are coordonatele $M(x_M, y_M, z_M)$. Atunci

$$O\vec{M} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}.$$

Propoziţia 27 *Fie $M(x_M, y_M, z_M)$ şi $N(x_N, y_N, z_N)$ două puncte oarecare din E_3. Atunci vectorul $M\vec{N}$ are expresia analitică:*

$$M\vec{N} = (x_N - x_M)\vec{i} + (y_N - y_M)\vec{j} + (z_N - z_M)\vec{k}.$$

1.4 Produsul scalar a doi vectori liberi

Definiţia 28 *Se numeşte **produsul scalar a doi vectori liberi** numărul real notat cu $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ sau $(\vec{u}, \vec{v})$ sau cu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, şi dat de:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}, \tag{2}$$

pentru $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, şi $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, pentru $\vec{u} = \vec{0}$ sau $\vec{v} = \vec{0}$.

Are loc următoarea caracterizare a ortogonalităţii:

Propoziţia 29 ***Doi vectori sunt ortogonali (perpendiculari) dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul.***

Demonstraţie. Evident, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ dacă şi numai dacă $\|\vec{u}\| = 0$ sau $\|\vec{v}\| = 0$ sau $\cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \cos(\pi/2) = 0$, ceea ce înseamnă că cei doi vectori sunt ortogonali. ■

Luând $\vec{v} = \vec{u}$ obţinem $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$. Deci are loc următoarea egalitate (legătura dintre normă şi produs scalar)

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 \text{ sau } \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}, \text{ unde } \vec{u}^2 := \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$$

(adică pătratul mărimii unui vector liber este egal cu pătratul scalar al vectorului).

Propoziţia 30 *Au loc următoarele proprietăţi:*

a) $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

b) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

c) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

d) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Dacă $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \in V_3$ şi $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului scalar**

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{3}$$

În particular

$$\vec{u}^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 ,$$

adică

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \tag{4}$$

Din definiţia (2) deducem

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \cdot \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}} \tag{5}$$

Formulele (3), (4) şi (5) reprezintă **expresiile analitice ale produsului scalar, ale normei şi respectiv ale cosinusului** unghiului dintre doi vectori liberi.

1.5 Produsul vectorial a doi vectori liberi

Definiţia 31 *Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$. **Produsul vectorial a celor doi vectori** este notat cu $\vec{u} \times \vec{v}$ şi este dat de:*
a) dacă $\vec{u}, \vec{v}$ sunt coliniari atunci $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$,
b) dacă $\vec{u}, \vec{v}$ sunt necoliniari atunci $\vec{u} \times \vec{v}$ este un nou vector liber astfel încât:
*b_1) **direcţia lui este perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$,***
*b_2) **sensul lui este dat de regula burghiului** (sau echivalent $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ formează o bază orientată pozitiv),*
b_3) mărimea lui este aria paralelogramului format cu cei doi vectori.

Propoziţia 32 *Au loc următoarele proprietăţi:*
a) Având în vedere că, din definiţie, produsul vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ este un vector ortogonal pe ambii vectori $\vec{u}$ şi pe $\vec{v}$ obţinem că

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0 = \langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle , \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

b) Folosind formula ariei unui paralelogram deducem că

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3.$$

c) Are loc şi următoarea formulă de legătură dintre produsul vectorial şi produsul scalar, numit şi identitatea lui Lagrange:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v})^2 &= \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \left(1 - \cos^2 \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 , \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_3. \end{aligned}$$

Propoziţia 33 ***Doi vectori sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vecorial este nul.***

Demonstraţie. Necesitatea ("$\Rightarrow$").
Fie $\vec{u}, \vec{v}$ cei doi vectori coliniari. Atunci

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha) = 0,$$

unde $\alpha = 0$ sau π.
Suficienţa ("$\Leftarrow$").
Presupunem că $\vec{u} \times \vec{v} = 0$. Conform definiţiei produsului vectorial avem că $\vec{u}$ sau $\vec{v}$ sunt coliniari sau $0 = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, ceea ce înseamnă că $\vec{u} = \vec{0}$ sau $\vec{v} = \vec{0}$ sau $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 0$ sau π, deci vectorii daţi sunt coliniari. ■

Propoziţia 34 *Au loc următoarele proprietăţi:*

$a)$ *Produsul vectorial este anticomutativ, i.e.* $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

$b)$ $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda\, (\vec{u} \times \vec{v})\, , \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_3$.

$c)$ $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}, \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$. Evident, folosind definiţia produsului vectorial avem că

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \text{şi} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Dacă $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \in V_3$ şi $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului vectorial**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Propoziţia 35 *Aria unui triunghi format de doi vectori liberi $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este jumătate din aria paralelogramului format cu cei doi vectori, adică*

$$\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|\, .$$

1.6 Produsul a trei vectori liberi

Prezentăm în continuare produsul mixt şi produsul dublu vectorial a trei vectori liberi, noţiuni care folosesc produsul scalar şi produsul vectorial a doi vectori liberi şi care prezintă un interes geometric.

Definiţia 36 *Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.* ***Produsul mixt a celor trei vectori*** *este numărul real notat cu $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ şi dat de:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle := \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle\, .$$

Propoziţia 37 ***Trei vectori sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nul.***

Demonstraţie. Avem

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \, \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}}) = 0.$$

Dacă $\|\vec{u}\| = 0$ atunci $\vec{u} = \vec{0}$ care este evident coplanar cu $\vec{v}, \vec{w}$. Dacă $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 0$, atunci $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ şi deci $\vec{v}, \vec{w}$ sunt coliniari. Deci $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt coplanari. Dacă $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}}) = 0$, adică unghiul $(\widehat{\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}}) = \pi/2$, atunci $\vec{u}$ şi $\vec{v} \times \vec{w}$ sunt vectori ortogonali. Dar $\vec{v} \times \vec{w}$ este prin definiţie perpendicular pe $\vec{v}$ şi pe $\vec{w}$. deci $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aparţin aceluiaşi plan, planul ortogonal pe $\vec{v} \times \vec{w}$. ∎

Remarca 38 *Trei vectori liberi formează o bază în spaţiul V_3 dacă şi numai dacă sunt necoplanari adică dacă şi numai dacă produsul lor mixt este nenul.*

Propoziţia 39 *Valoarea absolută a produsului mixt a trei vectori liberi necoplanari reprezintă volumul paralelipipedului construit pe cu cei trei vectori ca muchii, adică*

$$\mathcal{V} = |\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle|\, .$$

Propoziţia 40 *Au loc următoarele proprietăţi:*

$a)$ *Permutările circulare nu afectează semnul produsului mixt, adică*

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \rangle\, , \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3.$$

$b)$ $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = -\langle \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Fie $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$. Dacă $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \in V_3$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \in V_3$ şi $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k} \in V_3$, atunci are loc următoarea **expresie analitică a produsului mixt**

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Într-adevăr, $\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = u_1 (v_2w_3 - v_3w_2) + u_2 (v_3w_1 - v_1w_3) + u_3 (v_1w_2 - v_2w_1)$.

Pe de altă parte, calculând determinantul obţinem (dezvoltăm după prima linie) $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 (v_2w_3 - v_3w_2) + u_2 (v_3w_1 - v_1w_3) + u_3 (v_1w_2 - v_2w_1)$, adică are loc egalitatea (7).

Prezentăm, în final, produsul dublu vectorial a trei vectori liberi.

Definiţia 41 *Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$. **Produsul dublu vectorial a celor trei vectori** este vectorul $\vec{u}\times(\vec{v} \times \vec{w})$.*

Propoziţia 42 *Are loc următoarea proprietate:*

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}.$$

Remarca 43 *Produsul dublu vectorial este un vector coplanar cu vectorii din paranteză, i.e. cu $\vec{v}$ şi $\vec{w}$. Într-adevăr, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ este, din definiţia prodului vectorial, un vector ortogonal pe $\vec{u}$ şi pe $\vec{v} \times \vec{w}$, iar $\vec{v} \times \vec{w}$ este, tot din definiţia prodului vectorial, un vector ortogonal pe $\vec{v}$ şi pe $\vec{w}$, deci vectorul $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ este în acelaşi plan cu vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{w}$. Evident are loc şi caracterizarea cu produsul mixt a coplanarităţii a trei vectori:*

$$\langle \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}), \vec{v}, \vec{w} \rangle := \langle \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}), \vec{v} \times \vec{w} \rangle = 0.$$

Remarca 44 *Produsul dublu vectorial nu este asociativ. Într-adevăr, $\vec{u}\times(\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v})\times\vec{w}$, deoarece*

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$$

iar, pe de altă parte,

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{v}.$$