

CURS X – XI

1 Geometria planului și a dreptei

1.1 Planul în spațiu

Un plan poate fi determinat în mod unic în următoarele trei moduri:

(A) printr-un punct și un vector nenul dat ce definește direcția normală la plan,

(B) printr-un punct și doi vectori necoliniari dați,

(C) prin trei puncte necoliniare date.

Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper ortonormat fixat în spațiu ($B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ este o bază ortonormată iar O este originea reperului).

(A) **Planul determinat de un punct și de un vector normal nenul dat.**

Fie P_0 un punct de vector de poziție \vec{r}_0 relativ la \mathcal{R} și $\vec{N} \in V_3$.

Definiția 1 Se numește *dreaptă normală la planul π într-un punct P_0* , dreapta ce trece prin P_0 și este perpendiculară pe planul π ; *direcția normală \vec{N} la un plan* este orice vector nenul care are direcția ortogonală planului.

Vom nota acest plan prin $\pi(P_0, \vec{N})$.

Propoziția 2 (Ecuția vectorială a planului determinat de un punct și de o direcție normală) *Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină planului $\pi(P_0, \vec{N})$ este*

$$\langle \vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0.$$

Demonstrație. Dacă $P \in \pi(P_0, \vec{N})$ atunci $\overrightarrow{P_0P}$ este vector ortogonal pe \vec{N} deci $\langle \vec{N}, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0$. Dar $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ deci obținem concluzia. ■

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N} = (A, B, C)$, putem scrie explicit produsul scalar de mai sus și obținem **ecuația generală a planului (care trece prin $P_0(x_0, y_0, z_0)$ și de normală $\vec{N} = (A, B, C)$):**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

sau echivalent

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Scalarii A, B, C sunt coordonatele normalei la plan.

Exemplul 3 (Cazuri particulare) (a) Dacă $D = 0$ obținem ecuația unui plan care trece prin origine

$$Ax + By + Cz = 0.$$

(b) Dacă $A = 0$ obținem ecuația unui plan cu normala $\vec{N} = (0, B, C)$ care este deci paralelă cu planul YOZ sau echivalent, ortogonală pe \vec{i} . Obținem deci un plan paralel cu versorul \vec{i} , adică paralel cu axa OX :

$$By + Cz + D = 0.$$

(c) Dacă $A = D = 0$ obținem ecuația unui plan cu normala $\vec{N} = (0, B, C)$ (care este ortogonal pe \vec{i}) și care trece prin origine. Obținem deci un plan care conține axa OX :

$$By + Cz = 0.$$

(d) Dacă $A = B = 0$ obținem ecuația unui plan cu normala $\vec{N} = (0, 0, C)$ care este paralelă cu axa OZ . Obținem deci un plan este perpendicular pe OZ , deci e paralel cu XOY :

$$Cz + D = 0.$$

(B) Planul determinat de un punct și de doi vectori necoliniari dați.

Fie P_0 un punct de vector de poziție \vec{r}_0 relativ la \mathcal{R} și $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ doi vectori liberi necoliniari dați. Vom nota planul determinat de P_0, \vec{u}, \vec{v} prin $\pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$.

Propoziția 4 (Ecuția vectorială a planului determinat de un punct și de doi vectori necoliniari) Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină planului $\pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ este

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Demonstrație. Dacă $P \in \pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ atunci $\overrightarrow{P_0P}$ este vector coplanar cu \vec{u} și \vec{v} , adică produsul lor mixt este nul $\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Dar $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ deci obținem concluzia. ■

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, putem scrie explicit produsul mixt de mai sus și obținem **ecuația planului determinat de un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ și de două direcții date $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$** :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(C) Planul determinat de trei puncte.

Fie P_1, P_2, P_3 trei puncte de vectori de poziție $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ relativ la \mathcal{R} . Vom nota planul determinat de P_1, P_2, P_3 prin $\pi(P_1, P_2, P_3)$.

Propoziția 5 (Ecuția vectorială a planului determinat de trei puncte) Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină planului $\pi(P_1, P_2, P_3)$ este

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \rangle = 0.$$

Demonstrație. Fie $P \in \pi(P_1, P_2, P_3)$. Propoziția se reduce la cazul precedent deoarece planul este determinat de punctul P_1 și de direcțiile $\vec{N}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{N}_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$. Obținem deci $\langle \vec{r} - \vec{r}_1, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \rangle = 0$. Dar $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ deci obținem concluzia. ■

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$, putem scrie explicit produsul mixt de mai sus și obținem **ecuația planului determinat de trei puncte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$** :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se poate demonstra, făcând calculele, că ecuația de mai sus este echivalentă cu ecuația scrisă sub forma

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Corolarul 6 (Ecuția planului prin tăieturi) Date fiind punctele de intersecție ale unui plan cu axele de coordonate ale reperului cartezian, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, (A, B, C diferite de originea sistemului cartezian), ecuația planului respectiv este dată de

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

Demonstrație. Folosind ecuațiile planului ce trece prin trei puncte date obținem:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul după prima linie, obținem:

$$bc(x-a) + acy + abz = 0,$$

de unde obținem ecuația căutată. ■

1.2 Dreapta în spațiu

O dreaptă poate fi determinată în mod unic în următoarele trei moduri:

- (A) printr-un punct și o direcție dată,
- (B) prin două puncte distincte,
- (C) printr-un punct și două direcții normale date.

Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper ortonormat fixat în spațiu ($B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ este o bază ortonormată iar O este originea reperului).

(A) **Dreapta determinată de un punct și de o direcție dată.** Fie P_0 un punct de vector de poziție \vec{r}_0 relativ la \mathcal{R} . Fie $\vec{u} \in V_3$ și să notăm cu $d(P_0, \vec{u})$ dreapta determinată de P_0 și de direcție \vec{u} .

Distanța dintre două puncte este

$$\text{dist}(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\vec{PQ}^2} = \sqrt{(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2},$$

deoarece are loc **ecuația vectorului determinat de două puncte**, folosind regula de adunare a vectorilor, $\vec{PO} + \vec{OQ} = \vec{PQ} \Leftrightarrow -\vec{r}_P + \vec{r}_Q = \vec{PQ} \Leftrightarrow$

$$\vec{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P.$$

Propoziția 7 (Ecuația vectorială a dreptei determinată de un punct și de o direcție) *Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină dreptei $d(P_0, \vec{u})$ este*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Dacă $P \in d(P_0, \vec{u})$ atunci $\vec{P_0P}$ este vector coliniar cu \vec{u} , adică există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{P_0P} = t\vec{u} \Leftrightarrow \vec{r}_P - \vec{r}_{P_0} = t\vec{u} \Leftrightarrow$

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{P_0} + t\vec{u}.$$

Luând $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, putem scrie pe coordonate ecuația de mai sus și obținem **ecuațiile parametrice ale dreptei** ■

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2, \\ z = z_0 + tu_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuațiile de mai sus obținem **ecuațiile canonice ale dreptei**

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (1)$$

În cazul în care una dintre coordonatele lui \vec{u} este zero, atunci, prin convenție, vom considera numărătorul corespunzător nul. De exemplu, dacă $u_3 = 0$ atunci obținem $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$ și $z-z_0 = 0$.

(B) **Dreapta determinată de două puncte.** Fie P_1, P_2 două puncte de vectori de poziție \vec{r}_1, \vec{r}_2 relativ la \mathcal{R} . În acest caz vectorul $\overrightarrow{P_1P_2}$ va constitui direcția dreptei, deci problema este redusă la cazul precedent A). Vom lua deci $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Vom nota cu $d(P_1, P_2)$ dreapta determinată de punctele P_1, P_2 . Din propoziția de mai sus obținem imediat

Propoziția 8 (Ecuția vectorială a dreptei determinată de două puncte) *Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină dreptei $d(P_1, P_2)$ este*

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luând, ca mai sus, $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, putem scrie pe coordonate ecuația de mai sus și obținem **ecuațiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuațiile de mai sus obținem **ecuațiile canonice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

În cazul în care unul dintre numitori este nul atunci, prin convenție, vom considera numărătorul corespunzător nul.

(C) **Dreapta determinată de un punct și de două direcții normale (direcție normală planară).** Fie P_0 un punct de vector de poziție \vec{r}_0 relativ la \mathcal{R} și \vec{N}_1, \vec{N}_2 doi vectori liberi necoliniari și ortogonali pe direcția dreptei. Vom nota cu $d(P_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ dreapta determinată de P_0 și de direcții normale \vec{N}_1, \vec{N}_2 .

Propoziția 9 (Ecuția vectorială a dreptei determinată de un punct și de două direcții normale) *Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină dreptei $d(P_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ este*

$$\begin{cases} \langle \vec{N}_1, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0, \\ \langle \vec{N}_2, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Dacă $P \in d(P_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ atunci $\overrightarrow{P_0P}$ este un vector ortogonal pe \vec{N}_1 și pe \vec{N}_2 , adică următoarele produsele scalare sunt nule

$$\langle \vec{N}_1, \overrightarrow{P_0P} \rangle = \langle \vec{N}_2, \overrightarrow{P_0P} \rangle = 0.$$

Dar $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ deci obținem concluzia. ■

Luând $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ putem scrie explicit produsele scalare de mai sus și obținem **ecuațiile dreptei dată ca intersecție de două plane**

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0, \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

sau echivalent

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

unde $D_i = -A_ix_0 - B_iy_0 - C_iz_0$, $i = \overline{1, 2}$.

Remarca 10 Dreapta determinată în acest mod este de fapt dată (vezi Planul) ca intersecție de două plane, unde $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ sunt normalele celor două plane. Direcția drepteii este ortogonală pe normalele celor două plane, adică direcția este dată de produsul vectorial $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Putem considera deci dreapta, ca în cazul A), de tipul $d(P_0, \vec{u} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2)$.

Exemplul 11 a) O dreaptă perpendiculară pe OZ are direcția perpendiculară pe OZ, deci conținută în planul XOY, adică de tipul $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$, deci are ecuația (conform (1))

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{0} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \text{ și } z = z_0$$

b) O dreaptă paralelă cu OZ are direcția paralelă cu OZ, deci de tipul $\vec{u} = (0, 0, u_3)$ deci are ecuația (conform (1))

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{u_3} \Leftrightarrow x = x_0 \text{ și } y = y_0.$$

c) Ecuațiile axei OZ sunt date de (având în vedere că $\vec{N}_1 = \vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{N}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$ sunt versori ortogonali pe OZ și ecuația (2))

$$\begin{cases} x + D_1 = 0, \\ y + D_2 = 0. \end{cases}$$

Dar originea $O(0, 0, 0)$ aparține drepteii date, deci verifică sistemul de mai sus, adică $D_1 = D_2 = 0$. Vom obține deci ecuațiile axei OZ dată ca intersecție de două plane (planul YOZ și planul XOZ):

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

1.2.1 Dreapta în plan

În cazul drepteii în plan lipsește componenta z .

Fie $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper ortonormat fixat în plan ($B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ este o bază ortonormată iar O este originea reperului).

A) **Dreapta determinată de un punct și de o direcție dată.** Fie P_0 un punct de vector de poziție \vec{r}_0 relativ la \mathcal{R} . Fie $\vec{u} \in V_2$ și să notăm cu $d(P_0, \vec{u})$ dreapta determinată de P_0 și de direcție \vec{u} .

Similar ca mai sus deducem

Propoziția 12 (Ecuația vectorială a drepteii determinată de un punct și de o direcție) Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină drepteii $d(P_0, \vec{u})$ este

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luând $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, putem scrie pe coordonate ecuația de mai sus și obținem **ecuațiile parametrice ale drepteii**

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1, \\ y = y_0 + tu_2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuațiile de mai sus obținem **ecuațiile canonice ale drepteii**

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

B) **Dreapta determinată de două puncte.** Fie P_1, P_2 două puncte de vectori de poziție \vec{r}_1, \vec{r}_2 relativ la \mathcal{R} . În acest caz vectorul $\overrightarrow{P_1P_2}$ va constitui direcția drepteii, deci problema este redusă la cazul precedent A). Vom lua deci $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Vom nota cu $d(P_1, P_2)$ dreapta determinată de punctele P_1, P_2 . Din propoziția de mai sus obținem imediat

Propoziția 13 (Ecuația vectorială a dreptei determinată de două puncte) *Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină dreptei $d(P_1, P_2)$ este*

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luând, $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, putem scrie pe coordonate ecuația de mai sus și obținem **ecuațiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând parametrul t în ecuațiile de mai sus obținem **ecuațiile canonice ale dreptei determinate de două puncte**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

C) Dreapta în plan determinată de un punct și de o direcție normală.

Fie P_0 un punct de vector de poziție \vec{r}_0 relativ la \mathcal{R} și \vec{N} un vector liber ortogonal pe direcția dreptei (vector normal). Vom nota cu $d(P_0, \vec{N})$ dreapta determinată de P_0 și de direcție normală \vec{N} .

Propoziția 14 (Ecuația vectorială a dreptei determinată de un punct și de o direcție normală) *Condiția necesară și suficientă ca punctul P de vector de poziție \vec{r} să aparțină dreptei $d(P_0, \vec{N})$ este*

$$\langle \vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = 0.$$

Luând $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{N} = (A, B)$ putem scrie explicit produsul scalar de mai sus și obținem **ecuația generală a dreptei în plan**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

sau echivalent

$$Ax + By + C = 0,$$

unde $C = -Ax_0 - By_0$.

1.3 Probleme referitoare la drepte și plane

1.3.1 Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie dreapta $d(P_0, \vec{u})$ și punctul $P_1 \notin d(P_0, \vec{u})$. Aplicăm vectorul \vec{u} în punctul P_0 și obținem vectorul $\vec{u} = \overrightarrow{P_0R}$. Să notăm cu Q piciorul perpendicularei din P_1 pe dreaptă. Obținem deci că distanța de la P_1 la $d(P_0, \vec{u})$ este

$$\text{dist}(P_1, d) = \|\overrightarrow{P_1Q}\|.$$

Avem pe de o parte că $\mathcal{A}_{\Delta P_0 P_1 R} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P_0R}\| \cdot \|\overrightarrow{P_1Q}\| = \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \cdot \text{dist}(P_1, d)$. Pe de altă parte (din definiția mărimii unui produs vectorial) $\mathcal{A}_{\Delta P_0 P_1 R} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0R}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}\|$. Deci are loc următoarea **formulă de calcul a distanței de la un punct la o dreaptă:**

$$\text{dist}(P_1, d) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

1.3.2 Distanța de la un punct la un plan

Fie planul $\pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ și punctul $P_1 \notin \pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$. Aplicăm vectorii \vec{u}, \vec{v} în punctul P_0 și obținem vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{P_0R}$, $\vec{v} = \overrightarrow{P_0S}$. Să notăm cu Q piciorul perpendicularei din P_1 pe planul vectorilor $\overrightarrow{P_0R}$ și $\overrightarrow{P_0S}$. Obținem deci că distanța de la P_1 la $\pi(P_0, \vec{u}, \vec{v})$ este

$$\text{dist}(P_1, \pi) = \|\overrightarrow{P_1Q}\|.$$

Avem pe de o parte că volumul paralelipipedului format cu vectorii $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0S}$ și $\overrightarrow{P_0R}$ este (vezi definiția produsului mixt)

$$V_{\text{paralelipiped}} = \left| \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0S}, \overrightarrow{P_0R} \rangle \right| = \left| \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u}, \vec{v} \rangle \right|$$

Pe de altă parte (din definiția volumului unui paralelipiped) $V_{\text{paralelipiped}} = (\text{aria paralelogramului de la bază} \cdot \text{înălțimea}) = \|\overrightarrow{P_0S} \times \overrightarrow{P_0R}\| \cdot \|\overrightarrow{P_1Q}\| = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \text{dist}(P_1, \pi)$. Deci are loc următoarea **formulă de calcul a distanței de la un punct la un plan**:

$$\text{dist}(P_1, \pi) = \frac{\left| \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u}, \vec{v} \rangle \right|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

În cazul în care planul este de tipul $\pi(P_0, \vec{N})$, adică are ecuația $Ax + By + Cz + D = 0$, atunci ținând cont că normala $\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v}$, și că $\langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u}, \vec{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{N} \rangle$, obținem, echivalent,

$$\text{dist}(P_1, \pi) = \frac{\left| \langle \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{N} \rangle \right|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Deci are loc următoarea **formulă de calcul a distanței de la un punct la un plan**:

$$\text{dist}(P_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Remarcăm că numărătorul l-am obținut înlocuind, în ecuația planului, coordonatele curente cu coordonatele lui P_1 .

1.4 Exerciții

1. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_0(1, 2, -3)$ și este perpendicular pe segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$, unde $M_1(1, -2, 3)$ și $M_2(-3, 2, 5)$.

Rezolvare:

În cazul nostru vectorul normal este

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-4, 4, 2).$$

Ecuația planului care trece prin punctul $M_0(1, 2, -3)$ și are normala $\vec{N} = (-4, 4, 2)$ este

$$-4(x-1) + 4(y-2) + 2(z+3) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y + 2z + 2 = 0.$$

2. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_0(1, 2, -3)$ și este paralel cu planul $2x - y + 5 = 0$.

Rezolvare:

Vectorul normal al planului $2x - y + 5 = 0$ este

$$\vec{N} = (2, -1, 0).$$

Deoarece planul cerut este paralel cu cel dat rezultă că cele două plane au aceeași normală \vec{N} .

Ecuația planului care trece prin punctul $M_0(1, 2, -3)$ și are normala $\vec{N} = (2, -1, 0)$ este

$$2(x-1) - (y-2) + 0(z+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0.$$

Remarcăm că planul obținut trece prin originea $O(0, 0, 0)$ și are normala ortogonală pe versorul \vec{k} , deoarece $\langle \vec{N}, \vec{k} \rangle = 0$.

Deci planul cerut conține axa OZ .

3. Să se scrie ecuația planului care este perpendicular pe segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$ prin mijlocul lui (se numește plan mediator al segmentului orientat), unde $M_1(1, -2, 3)$ și $M_2(3, 4, 5)$.

Rezolvare:

Ecuația unui plan care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are normala $\vec{N} = (A, B, C)$ este

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

În cazul nostru vectorul normal este

$$\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (2, 6, 2).$$

Evident se poate scrie și cu ajutorul vectorilor de poziție:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1} = (3, 4, 5) - (1, -2, 3) = (2, 6, 2).$$

Dacă notăm cu P mijlocul segmentului orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$, atunci are loc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1P} &= \overrightarrow{PM_2} \Leftrightarrow \vec{r}_P - \vec{r}_{M_1} = \vec{r}_{M_2} - \vec{r}_P \Leftrightarrow \vec{r}_P = \frac{1}{2}(\vec{r}_{M_1} + \vec{r}_{M_2}) \\ &= \frac{1}{2}[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right). \end{aligned}$$

Deci mijlocul unui segment este punctul de coordonate

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

În cazul nostru obținem $P(2, 1, 4)$.

Ecuția planului care trece prin punctul $P(2, 1, 4)$ și are normala $\vec{N} = (2, 6, 2)$ este

$$2(x - 2) + 6(y - 1) + 2(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y + 2z - 18 = 0 \Leftrightarrow x + 3y + z - 9 = 0.$$

4. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctele $A_1(3, -1, 0)$, $A_2(4, 1, 1)$, $A_3(2, 0, 1)$.

Rezolvare:

Ecuția planului determinat de cele trei puncte este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + 3z - 5 = 0$$

5. Să se verifice dacă următoarele patru puncte sunt coplanare:

(a) $A_1(3, 1, 0)$, $A_2(0, 7, 2)$, $A_3(-1, 0, -5)$, $A_4(4, 1, 5)$;

(b) $A_1(1, -1, 1)$, $A_2(0, 2, 4)$, $A_3(1, 3, 3)$, $A_4(4, 0, -3)$.

Rezolvare:

Scriem mai întâi ecuația planului determinat de trei puncte și apoi verificăm dacă cel de-al patrulea punct aparține sau nu planului determinat de celelalte trei puncte.

(a) Ecuția unui plan determinat de trei puncte date A_1, A_2 și A_3 este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

În cazul nostru obținem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pentru a-l calcula putem dezvolta după prima linie sau, mai simplu, putem crea zerouri adunând ultima linie înmulțită cu -1 la celelalte linii. Astfel obținem

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = -28(x+1) - 23y + 27(z-5)$$

$$\Leftrightarrow -28x - 23y + 27z + 107 = 0.$$

Verificăm acum dacă punctul $A_4(4, 1, 5)$ aparține planului anterior, adică dacă coordonatele lui verifică ecuația planului. Avem că

$$-28 \cdot 4 - 23 \cdot 1 + 27 \cdot 5 + 107 = 0 \Leftrightarrow 107 = 0,$$

deci s-a obținut o contradicție, prin urmare punctul A_4 nu aparține planului determinat de celelalte trei puncte.

6. Să se determine unghiul dintre planele $(\pi_1) : 2x - 3y + z - 5 = 0$ și $(\pi_2) : -3x - y + z - 5 = 0$.

Rezolvare:

Unghiul dintre cele două plane este unghiul dintre normalele la plane.

Dar $\vec{N}_1 = (2, -3, 1)$ și $\vec{N}_2 = (-3, -1, 1)$ deci

$$\cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = \frac{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}{\|\vec{N}_1\| \cdot \|\vec{N}_2\|} = \frac{-6 + 3 + 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{11}}.$$

7. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_0(1, -2, -3)$ și este paralel cu planul XOY .

Rezolvare:

Vectorul normal al planului XOY este $\vec{N} = \vec{k} = (0, 0, 1)$. Deoarece planul cerut este paralel cu cel dat rezultă că cele două plane au aceeași normală $\vec{N} = \vec{k}$.

Ecuația planului care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are normala $\vec{N} = (0, 0, 1)$ este

$$0(x - x_0) + 0(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow z - z_0 = 0 \Leftrightarrow z = z_0.$$

Deci planul cerut este

$$z = -3.$$

- 8.

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = -28(x+1) - 23y + 27(z-5)$$

$$\Leftrightarrow -28x - 23y + 27z + 107 = 0.$$