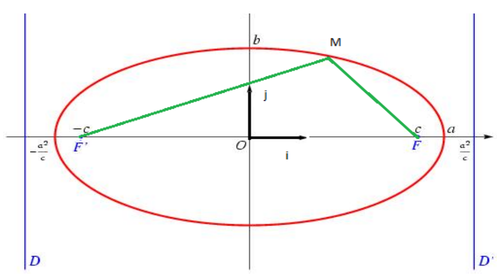
Capitolul 10

CONICE ŞI CUADRICE

10.1 Conice pe ecuaţii reduse

10.1.1 Elipsa

Definiţia 10.1 **Elipsa** *este locul geometric al punctelor din plan cu proprietatea că suma distanţelor la două puncte fixe,* F *şi* F' *(numite focare), este constantă şi egală cu* $2a, a \in \mathbb{R}_+$.



$\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = 2a, a > 0$ fixat.

Rezultă $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Prin calcul şi dacă notăm $c^2 = a^2 - b^2$ dacă $a > b$, sau $c^2 = b^2 - a^2$ dacă $b > a$, şi obţinem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{10.1}$$

Ecuaţia (10.1) reprezintă **ecuaţia elipsei de semiaxe** a **şi** b.

$e = \frac{c}{a}$, $e < 1$ $(a > c)$, în cazul elipsei ($a > c$ deoarece $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| > \left\|\overrightarrow{FF'}\right\|$).

Dreaptele de ecuaţie $x = \pm\frac{a}{e}$ se numesc drepte **directoare** ale elipsei. **Elipsa are două drepte directoare** de ecuaţii $x = -\frac{a}{e}$ şi $x = \frac{a}{e}$ iar punctele elipsei se găsesc între aceste drepte, $x \geq -a > -\frac{a}{e}$ şi $x \leq a < \frac{a}{e}(\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} > a)$.

Observaţia 10.1 Axa Ox intersectează elipsa în punctele $(-a, 0)$ şi $(a, 0)$ numite vârfurile elipsei. Axa Oy intersectează elipsa tot în vârfuri, $(0, b), (0, -b)$. Axele Ox şi Oy sunt axe de simetrie pentru elipsă. Punctul $(0, 0)$ numit centrul elipsei este centru de simetrie.

Reprezentarea grafică a elipsei:

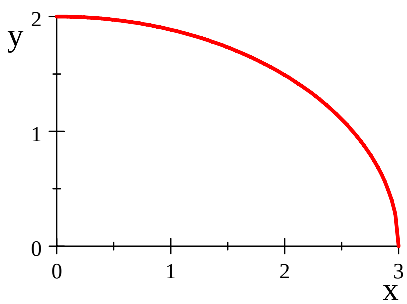
Deoarece elipsa este simetrică faţă de axele de coordonate e suficient să reprezentăm grafic funcţia

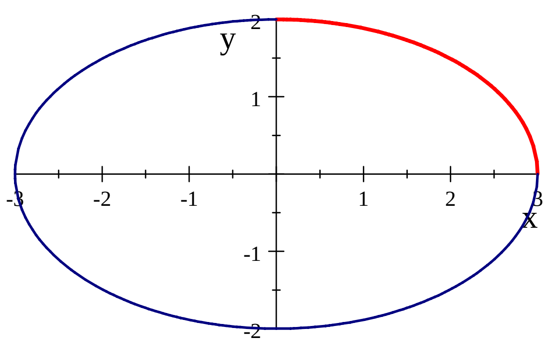
$f : [0, a] \to [0, b]$

$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

$f'(x) = \frac{b}{a}\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} < 0$,

$f'(x) = -\frac{ab}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} < 0$,





Tangenta la elipsă

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{10.2}$$

Ecuaţia (10.2) a tangentei la elipsă dusă printr-un punct (x_0, y_0) de pe elipsă se obţine prin dedublare.

Reprezentarea paramertică a elipsei:

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$.

Exerciţiul 10.1 *Fie elipsa de ecuaţie*

$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0.$

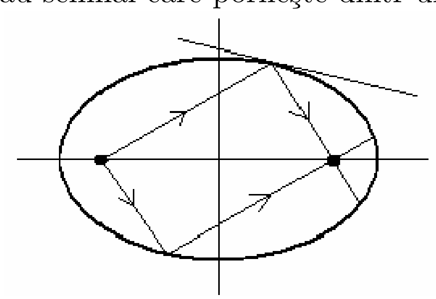
Să se determine: vârfurile elipei, semiaxele elipsei, focarele elipsei, ecuaţiile dreptelor directoare, excentricitatea elipsei, ecuaţiile paramerice ale elipsei, ecuaţiile tangentelor la elipsă prin punctele $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right), N\left(1,3\right)$.

Vîrfurile $A(\sqrt{6},0), A'(-\sqrt{6},0), B(0,\sqrt{3}), B'(0,-\sqrt{3})$,
$a^2=6 \Rightarrow a=\sqrt{6}, b^2=3, b=\sqrt{3}, c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$,
focarele $F\left(\sqrt{3},0\right), F'\left(-\sqrt{3},0\right)$,
excentricitatea $e=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}, x=\pm 2\sqrt{3}$ ecuaţiile dreptelor directoare.
Verificăm dacă punctul $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ se găseşte pe elipsă.
$\dfrac{2}{6}+\dfrac{2}{3}-1=0.$
Deducem tangenta la elipsă printr-un punct al ei prin dedublare:
$\dfrac{x\sqrt{2}}{6}+\dfrac{y\sqrt{2}}{3}-1=0.$
Verificăm dacă punctul $N\left(1,3\right)$ se găseşte pe elipsă.
$\dfrac{1}{6}+\dfrac{9}{3}-1\neq 0.$
Ducem tangenta la elipsă printr-un punct exterior ei.
Intersectăm dreapta $y-3=m\left(x-1\right)$ cu elipsa şi punem condiţia ca să intersecteze elipsa într-un singur punct

$$\begin{cases} y-3=m\left(x-1\right) \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}-1=0 \end{cases}$$

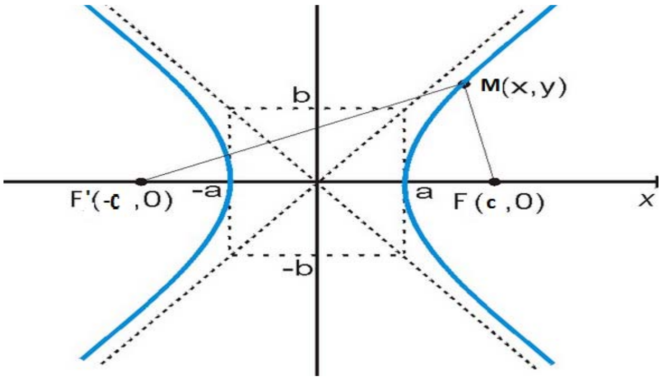
$\left(2m^2+1\right)x^2+4x\left(3m-m^2\right)+2m^2-12m+12=0 \Rightarrow$
$\Delta=10m^2+12m-12$
$10m^2+12m-12=0,\ m\in\left\{\frac{1}{5}\sqrt{39}-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{39}-\frac{3}{5}\right\}$
$y-3=\left(\frac{1}{5}\sqrt{39}-\frac{3}{5}\right)\left(x-1\right)$,
$y-3=\left(-\frac{1}{5}\sqrt{39}-\frac{3}{5}\right)\left(x-1\right)$.

Proprietatea optică a elipsei: reflectă lumina şi undele sonore. Orice rază de lumină sau semnal care porneşte dintr-un focar este reflectat în celălalt focar.



10.1.2 Hiperbola

Definiţia 10.2 **Hiperbola** *este locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că diferenţa distanţelor la două puncte fixe,* F *şi* F' *(numite* **focare***), este constantă şi egală cu* $2a, a\in\mathbb{R}_+$.



Deducerea ecuaţiei hiperbolei.

$\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF}\right\| = 2a$, $a > 0$ fixat, dacă $\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| > \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$
sau $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = 2a$, dacă $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| > \left\|\overrightarrow{MF'}\right\|$.

Rezultă două ecuaţii cărora le corespund cele două ramuri ale hiperbolei,
$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ şi $\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$.

Notăm $c^2 = a^2 + b^2$ şi obţinem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{10.3}$$

Ecuaţia (10.3) reprezintă **ecuaţia hiperbolei de semiaxe** a **şi** b.

Notăm $e = \dfrac{c}{a}$, numită **excentricitatea hiperbolei.** Observăm că $e > 1$, în cazul hiperbolei ($a < c$ deoarece $\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF}\right\| < \left\|\overrightarrow{FF'}\right\|$).

Hiperbola are două drepte directoare de ecuaţii $x = -\dfrac{a}{e}$ şi $x = \dfrac{a}{e}$ iar punctele hiperbolei se găsesc în exteriorul acestor drepte, $x \le -a < -\frac{a}{e}$ şi $x \ge a > \frac{a}{e}(\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} < a)$.

Observaţia 10.2 Axa Ox intersectează hiperbola în punctele $(-a, 0)$ şi $(a, 0)$ numite vârfurile hiperbolei. Axa Ox se numeşte axă transversă. Axa Oy nu intersectează hiperbola. Axele Ox şi Oy sunt axe de simetrie pentru hiperbolă. Punctul $(0, 0)$ numit centrul hiperbolei este centru de simetrie.

Reprezentarea grafică a hiperbolei:

Din ecuaţia (10.3) a hiperbolei obţinem: $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ sau $y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

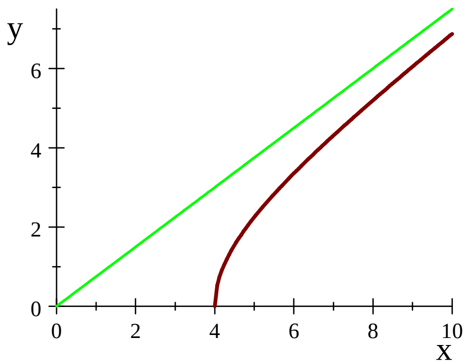
Deoarece hiperbola este simetrică faţă de axele de coordonate e suficient să reprezentăm grafic funcţia

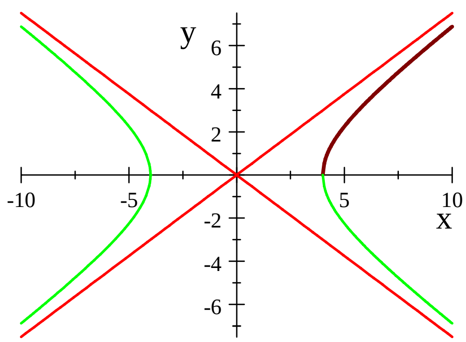
$f : [0, a] \to [0, b]$
$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$,
$f'(x) = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} > 0$,
$f'(x) = -\frac{ab}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}} < 0$.

Dreptele $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ sunt asimptote.

Într-adevăr, $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a}$ şi
$n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x\right) = 0.$

Dreptele $y = \pm\frac{b}{a}x$ se numesc **asimptotele hiperbolei.**





Tangenta la hiperbolă

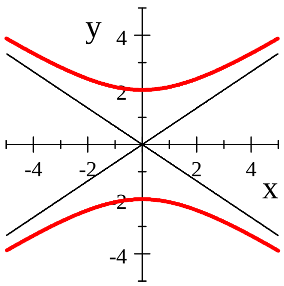
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0. \tag{10.4}$$

Ecuaţia (10.4) a tangentei la hiperbolă dusă printr-un punct (x_0, y_0) de pe hiperbolă se obţine prin dedublare.

Observaţia 10.3 Hiperbola

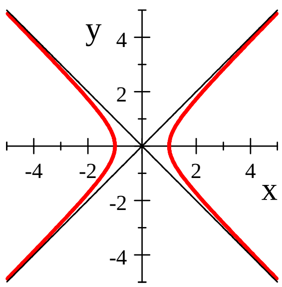
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0. \tag{10.5}$$

este numită şi **hiperbola conjugată** hiperbolei (10.3). Are aceleaşi asimptote, aceleaşi axe. Exemplu de hiperbolă conjugată: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} + 1 = 0$



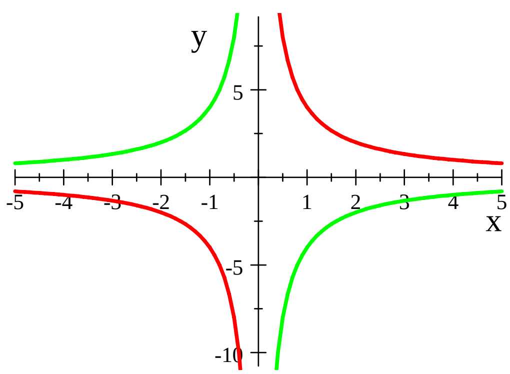
Dacă $a = b$, **hiperbola se numeşte echilateră** şi are ecuaţia $x^2 - y^2 = a^2$. Asimptotele sale sunt bisectoarele axelor, $x = y$ şi $x = -y$.

Exemplu de hiperbolă echilateră: $x^2 - y^2 = 1$



Tot hiperbolă echilateră este $xy = \pm a^2$. În acest caz asimptotele hiperbolei sunt axele de coordonate.

Exemple: $xy = 2^2$ *(roşu) şi respectiv* $xy = -2^2$*(verde).*



Reprezentarea paramertică a hiperbolei:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

10.1.3 Parabola

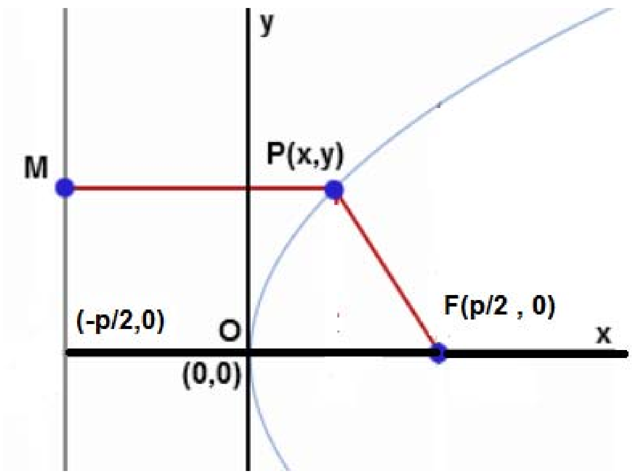
Definiţia 10.3 **Parabola** *este locul geomertic al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, F, numit numit* **focar**, *şi o dreaptă dată, numită dreaptă* **directoare**.

Deducerea ecuaţiei parabolei.

Pentru a deduce ecuaţia parabolei alegem un reper preferenţial: originea O a reperului se alege în vârful parabolei, versorul $\overrightarrow{i}$ este versorul vectorului $\overrightarrow{OF}$ iar versorul $\overrightarrow{j}$ se alege perpendicular pe $\overrightarrow{i}$ în O.

Din felul în care am ales reperul $\mathcal{R}$ deducem că $\overrightarrow{OF} = \frac{p}{2}\overrightarrow{i}$ şi dreapta directoare de ecuaţie $x = -\frac{p}{2}$. Trebuie să avem $x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow$

$$y^2 = 2px. \tag{10.6}$$



Tangenta la parabolă

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{10.7}$$

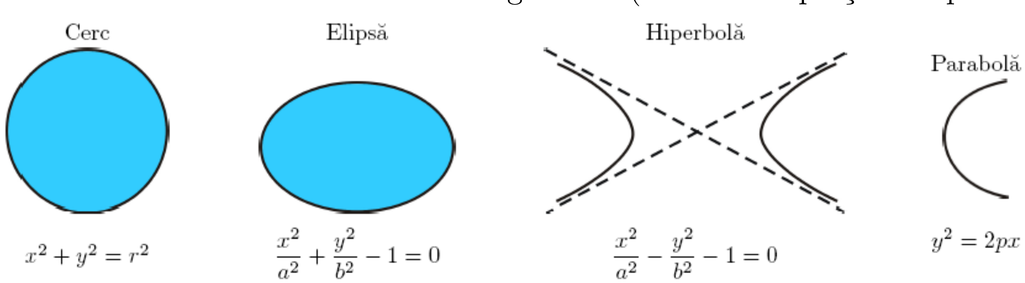
Ecuaţia (10.7) a tangentei la parabolă dusă printr-un punct (x_0, y_0) de pe parabolă se obţine prin dedublare.

Observaţia 10.4 Excentricitatea parabolei este $e = 1$.

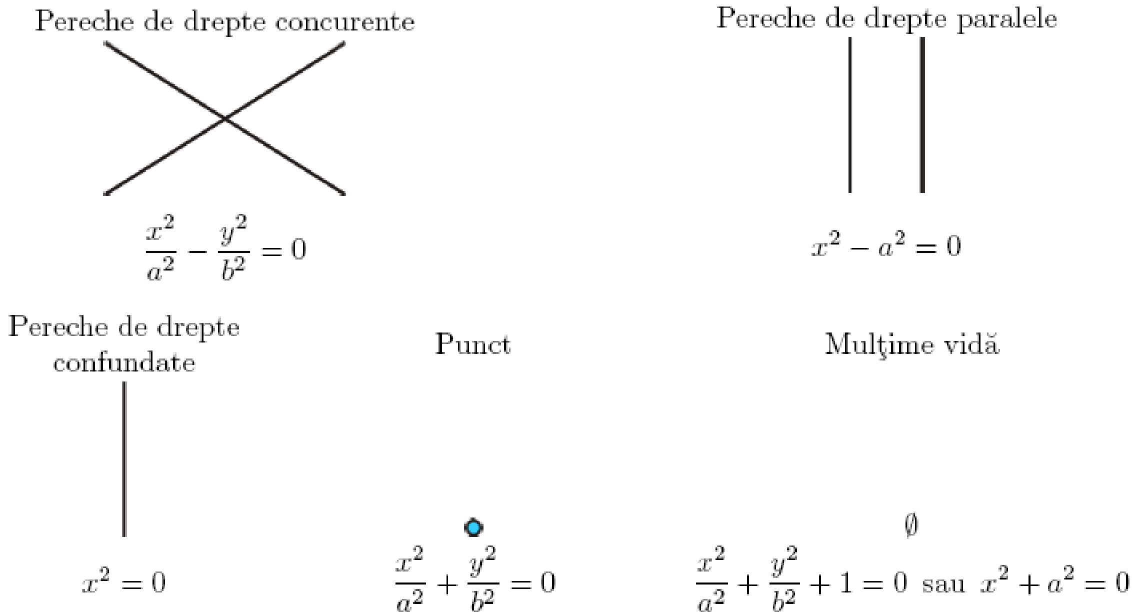
Razele care pornesc din focar sunt reflectate de parabolă într-un fascicul paralel cu axa Ox a parabolei. Această proprietate este folosită la construcţia farurilor.

O reprezentare parametrică a parabolei este $y = t, x = t^2/(2p)$.

Aceste curbe se mai numesc conice nedegenerate (focarul nu aparţine dreptei directoare).



Conicele degenerate sunt:



10.2 Conice pe ecuaţii generale

Fie reperul $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ într-un plan (π).

Definiţia 10.4 Conica *este locul georetric* (Γ) *al punctelor* M *din planul* (π) *ale căror coordonate* (x, y)*, în raport cu reperul ortonormat* $\mathcal{R}$*, satisfac ecuaţia:*

$$\begin{array}{l}(\Gamma) : f(x,y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \\ \text{unde } a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0, a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \{0, 1, 2\}.\end{array} \tag{10.8}$$

Matriceal, ecuaţia conicei se scrie:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0$$

Utilizând rotaţia şi translaţia realizăm o schimbare de reper de la reperul $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la un reper adecvat orientat pozitiv, numit reper canonic, faţă de care conica (10.8) să aibă cea mai simplă formă posibilă, numită forma canonică.

10.2.1 Algoritmul de aducere la forma canonică a unei conice.

Pasul I. Se realizează **rotaţia** sistemului de axe, $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \to \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, astfel:

Fie $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Calculăm ecuaţia caracteristică
$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \tag{10.9}$$

Corespunzător valorilor proprii λ_1 şi λ_2 avem vectorii proprii $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. Fie $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u_1}\|}\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u_2}\|}\overrightarrow{u_2}$ versorii vectorilor proprii. $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dau direcţiile noilor axe Ox' şi respectiv Oy'.

Dacă $\overrightarrow{e_1} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{e_2} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j}$ atunci matricea de rotaţie
$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$
trebuie să indeplinească condiţia ca $\det \mathbf{R} = 1$ (avem în vedere posibilitatea înlocuirii unuia din versori prin opusul său sau renumerotarea acestora) pentru a fi la fel orientată cu baza canonică.

Facem schimbarea de coordonate
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Ecuaţia conicei după rotaţie devine
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0.$

Observăm că în urma rotaţiei dispare termenul în $x'y'$.

<u>Pasul II.</u>

Efectuăm **translaţia reperului,** $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) \to \mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$**.**

Dacă $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ conica va fi o conică cu centru.

Restrângem pătratele şi efectuăm o translaţie

$$\lambda_1\left(x'^2 + 2\frac{a'_{10}}{\lambda_1}x' + (\frac{a'_{10}}{\lambda_1})^2\right) + \lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{a'_{20}}{\lambda_2}y' + (\frac{a'_{20}}{\lambda_2})^2\right) + a'_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a'_{00} - \frac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0$$

Notăm

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{10}}{\lambda_1} \\ Y = y' + \dfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$

şi obţinem: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_{00} - \dfrac{(a'_{10})^2}{\lambda_1} - \dfrac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} = 0$ care reprezintă forma canonică a conicei. Centrul conicei va fi

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{a'_{10}}{\lambda_1} \\ y' = -\dfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$

în reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Coordonatele centrului conicei raportate la reperul iniţial,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{a_{10}^{'}}{\lambda_1} \\ -\dfrac{a_{20}^{'}}{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

reprezintă originea reperului $\mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $C(x_0, y_0)$

Discuţia tipului conicei

λ_1	λ_2	$a'_{00} - \dfrac{(a_{10}^{'})^2}{\lambda_1} - \dfrac{(a'_{20})^2}{\lambda_2}$	Tipul conicei
+	+	+	elipsă imaginară
+	+	-	elipsă reală
+	-		hiperbolă
+	+		hiperbolă
+	+	0	un punct
+	-	0	două drepte concurente
-	+		două drepte concurente

Desenăm graficul conicei în noul sistem de axe. (exemplele 10.1,10.2). Algoritmul se opreşte.

<u>Pasul III</u> Dacă $\lambda_1\lambda_2 = 0$**.** În acest caz o valoare proprie este nulă deoarece.(ambele valori proprii nu pot fi nule). Presupunem că $\lambda_2 \neq 0$.

Vom obţine $\lambda_2(y')^2 + 2a_{10}^{'}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0$. Restrângem pătratele şi efectuăm o translaţie

$$\lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{a'_{20}}{\lambda_2}y' + \left(\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2\right) = \frac{(a'_{20})^2}{\lambda_2} - a_{00}^{'} - 2a_{10}^{'}x' \Leftrightarrow$$

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 = -2a_{10}^{'}\left(x' + \frac{a_{00}^{'} - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}}{a_{10}^{'}}\right)$$

Notăm

$$\begin{cases} Y = y' + \dfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \\ X = x' + \dfrac{a_{00}^{'} - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}}{a_{10}^{'}} \end{cases}$$

iar forma canonică va fi:

$$\lambda_2 Y^2 = -2a_{10}^{'}X \Leftrightarrow Y^2 = -\frac{2a_{10}^{'}}{\lambda_2}X.$$

Dacă $a_{10}^{'} = 0$ conica se reduce la două drepte confundate. Dacă $a_{10}^{'} \neq 0$ conica este o parabolă.

Vîrful parabolei va fi şi originea noului reper. Coordonatele originii în sistemul rotit vor fi: $y' = -\dfrac{a'_{20}}{\lambda_2}, x' = -\dfrac{a_{00}^{'} - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}}{a_{10}^{'}}$. În sistemul iniţial coordonatele originii se obţin aplicînd rotaţia:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \\ -\dfrac{a'_{00} - \frac{a'_{20}}{\lambda_2}}{a'_{10}} \end{pmatrix}.$$

Se desenează parabola. Algoritmul se opreşte. (Exemplul 10.3)

10.2.2 Exemple

Exemplul 10.1 *Să se aducă la forma canonică conica*
$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$
şi să se reprezinte grafic.

Rezolvare: Matriceal, ecuaţia conicei se scrie
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 9 = 0$

Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.

Vectorii proprii se obţin rezolvând sistemele:

$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \right)$

$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \right).$

Matricea de rotaţie este:

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \det \mathbf{R} = 1.$

Transformarea coordonatelor este dată de

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} -$

$-2 \begin{pmatrix} 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 9 = 0$

$(x')^2 + 9(y')^2 - 18y'\sqrt{2} + 9 = 0 \Leftrightarrow (x')^2 + 9\left[(y')^2 - 2y'\sqrt{2} + 2\right] - 9 = 0 \Leftrightarrow$
$(x')^2 + 9(y' - \sqrt{2})^2 - 9 = 0$

Conica este o elipsă. Notăm

$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' - \sqrt{2} \end{cases}.$

Forma canonică este $X^2 + 9Y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{9} + Y^2 - 1 = 0.$

Originea reperului în care conica are forma canonică este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trasarea graficului:

-rotaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ trece în reperul $\mathcal{R}' = (O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Sensul axelor (Ox', Oy') este dat de vectorii $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right), \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.

$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \Rightarrow \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

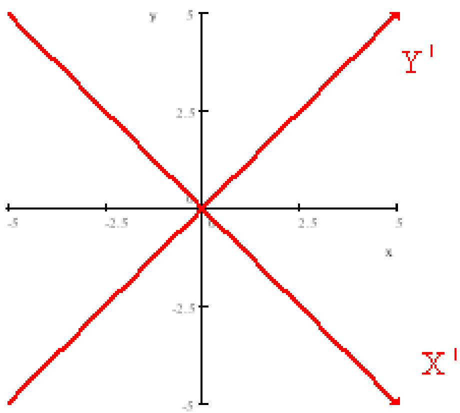
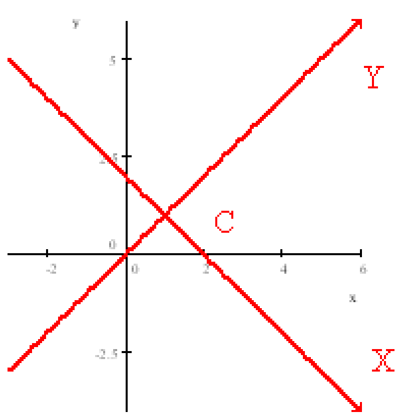


Figura 8.7.

-translaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ trece în reperul $\mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ unde $C(1, 1)$



în acest ultim reper trasăm **graficul** elipsei:

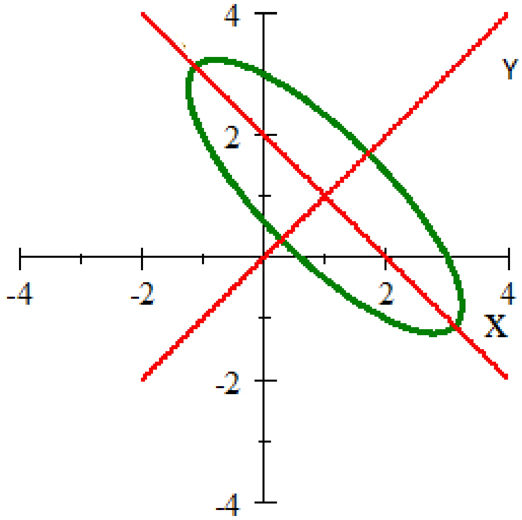


Fig. 8.8

Exemplul 10.2 *Să se aducă la forma canonică conica*

$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$

şi să se traseze graficul.

Rezolvare: Matriceal, ecuaţia conicei se scrie

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0$

Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$.

Vectorii proprii se obţin rezolvând sistemele:

$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right)$

$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{R} = 1$.

Transformarea coordonatelor este dată de

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$

$+2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$4(y')^2 - (x')^2 + \frac{6}{5}x'\sqrt{5} + \frac{8}{5}y'\sqrt{5} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$4\left((y')^2+\frac{2}{5}y'\sqrt{5}+\frac{1}{5}\right)-\left((x')^2-\frac{6}{5}x'\sqrt{5}+\frac{9}{5}\right)-2=0 \Leftrightarrow$

$4\left(y'+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(x'+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-2=0.$

Conica este o hiperbolă. Notăm

$$\begin{cases} X = x' - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ Y = y' + \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}.$$

Forma canonică este $4Y^2 - X^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{X^2}{2} + 2Y^2 - 1 = 0.$

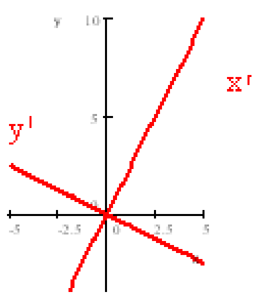
Originea reperului în care conica are forma canonică este

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

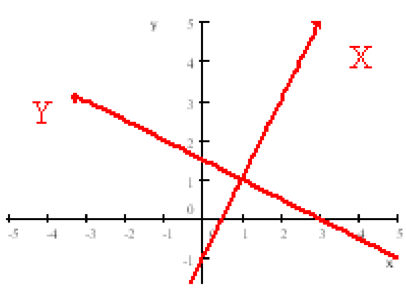
Trasarea graficului:

-rotaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ trece în reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Sensul axelor (Ox', Oy') este dat de vectorii $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right)$ şi $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.

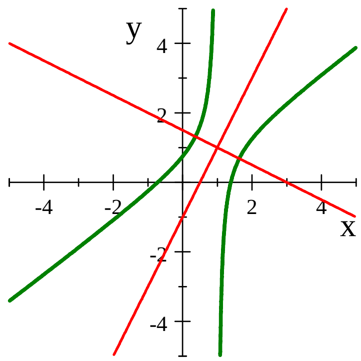
$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \Rightarrow \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$



-translaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ trece în reperul $\mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.unde $C(1,1)$



în acest ultim reper trasăm **graficul**:



Exemplul 10.3 *Să se aducă la forma canonică şi să se deseneze conica:*
$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

Rezolvare: Matriceal, ecuaţia conicei se scrie
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$

Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$.

Vectorii proprii se obţin rezolvând sistemele: pentru $\lambda_1 = 0$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$

pentru $\lambda_2 = 5$

$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 1x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}\right)$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \det \mathbf{R} = -1$

Pentru ca $\det \mathbf{R} = 1$ schimbăm sensul vectorului $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right)$, deci matricea de rotaţie va fi

$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Transformarea coordonatelor este dată de

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$

$+2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$5(y')^2 - 2x'\sqrt{5} + 2y'\sqrt{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow 5\left((y')^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5}\right) - 2x'\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow$

$5\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2x'\sqrt{5} = 0.$

Notăm

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Forma canonică este $Y^2 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}X = 0$

Vârful parabolei va fi în punctul $C(0, -1/\sqrt{5})$, coordonatele punctului fiind în sistemul rotit. În sistemul iniţial coordonatele vârfului parabolei vor fi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

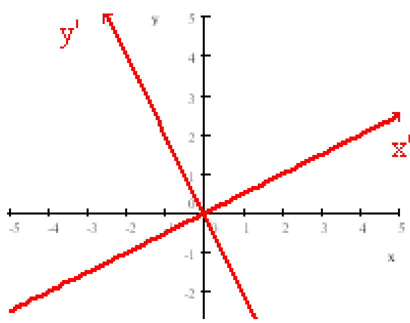
$C(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5})$

Trasarea graficului:

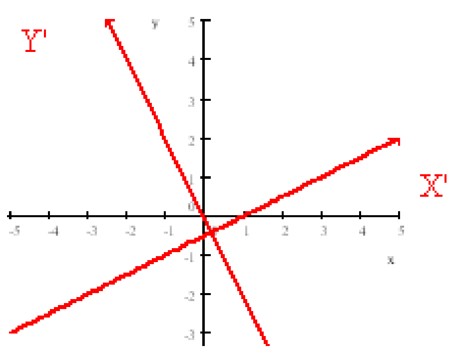
-rotaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ trece în reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Sensul axelor (Ox', Oy') este dat de vectorii $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right), \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}\right)$.

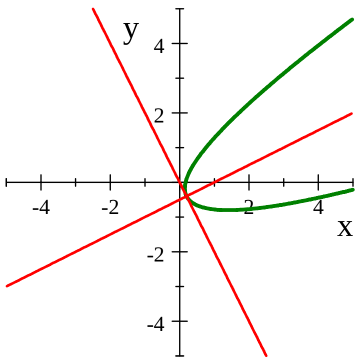
$\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \Rightarrow \mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$



-translaţia sistemului de axe: reperul $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ trece în reperul $\mathcal{R}'' = (C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, unde C va fi vârful parabolei.



în acest ultim reper trasăm **graficul** parabolei:



Exemplul 10.4 *Să se aducă la forma canonică şi să se deseneze conica:*
$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

Rezolvare: Matriceal, ecuaţia conicei se scrie
$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 = 0$

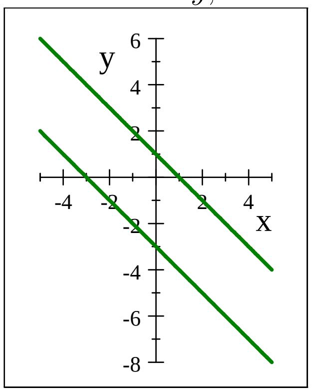
Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$

Vectorii proprii se obţin rezolvând sistemele: pentru $\lambda_1 = 0$
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} \right)$
pentru $\lambda_2 = 5$
$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \Rightarrow \overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \right)$
$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \det \mathbf{R} = 1$

Transformarea coordonatelor este dată de
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} +$
$+2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 3 = 0,$

$2y'^2 + 2y'\sqrt{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y'^2 + 2y'\sqrt{2} + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\left(y'\sqrt{2} + 1\right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(y'\sqrt{2} - 1\right)\left(y'\sqrt{2} + 3\right) = 0 \Rightarrow$conica reprezintă două drepte paralele
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x\sqrt{2} - \frac{1}{2}y\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}x\sqrt{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{2} \end{pmatrix}$
$y'\sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow (\frac{1}{2}x\sqrt{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{2})\sqrt{2} - 2 = 0 \Rightarrow x + y - 1$

$y'\sqrt{2}+3=0 \Rightarrow (\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y\sqrt{2})\sqrt{2}+3=0 \Rightarrow x+y+3=0$
$x=-3-y, x=1-y$



10.3 CUADRICE PE ECUAŢII REDUSE

Numim **cuadrice nedegenerate** suprafeţele: sfera, elipsoidul, hiperboloidul cu o pânză, hiperboloidul cu două pânze, paraboloidul eliptic şi paraboloidul hiperbolic. Deoarece ele admit într-un reper ortonormat reprezentări analitice pe ecuaţii algebrice de gradul doi, ele sunt suprafeţe algebrice de ordinul al doilea.

10.3.1 Sfera

Fie reperul $\mathcal{R}=(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ şi punctele $M_i(x_i,y_i,z_i), i=1,2,3$. Reamintim formula distanţei dintre două puncte:
$\text{dist}(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Definiţia 10.5 *Locul geometric al punctelor din spaţiu $M(x,y,z)$ cu proprietatea că distanţa lor la un punct fix $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este constantă se numeste* **sferă (suprafaţă sferică)**.

Dacă $\overline{r}$ respectiv $\overline{r}_0$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor M şi M_0, atunci

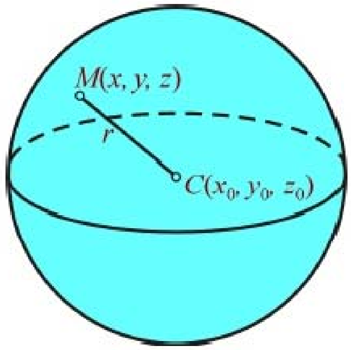
$$\|\overline{r}-\overline{r}_0\|=R. \tag{10.10}$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ se numeşte **centrul** *sferei, iar r este* **raza** *sferei.*

Teorema 10.1 *Punctul $M(x,y,z)$ aparţine sferei de centru $C(x_0,y_0,z_0)$ şi rază R dacă şi numai dacă*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{10.11}$$

Demonstraţie. $M\in$sferei$\Leftrightarrow \|M_0M\|=R \Leftrightarrow \|\overline{r}-\overline{r}_0\|=R \Leftrightarrow$
$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$♦



Observaţia 10.5 Ecuaţia (10.10) se numeşte **ecuaţia vectorială a sferei**. Ecuaţia (10.11) se numeşte **ecuaţia carteziană implicită a sferei.**

Ecuaţia sferei este un polinom de grad doi în x, y, z, termenul de grad doi fiind $x^2+y^2+z^2$. Aceasta ne sugerează să cercetăm ecuaţia

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

şi să stabilim în ce caz ea reprezintă ecuaţia unei sfere. Această ecuaţie se mai poate scrie de forma

$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.$

De aici observăm că dacă

a) $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ecuaţia reprezintă o sferă de centru $(-a, -b, -c)$ şi rază $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

b) $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ ecuaţia reprezintă un punct de coordonate $(-a, -b, -c)$;

c) $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ ecuaţia reprezintă o sferă imaginară.

Ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ cu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ reprezintă **ecuaţia carteziană generală a sferei.**

Ecuaţia sferei cu centru în origine şi de rază R este

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

Observaţia 10.6 Sfera este o mulţime mărginită şi închisă, deci compactă. Punctele de pe suprafaţa sferică sun în interiorul unui pătrat deoarece din ecuaţia $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$ rezultă că $(x - x_0)^2 \leq R^2 \Rightarrow x_0 - R \leq x \leq x_0 + R$. Analog şi pentru y şi z.

Ecuaţiile parametrice ale sferei cu centrul în $M_0(x_0, y_0, z_0)$**:**

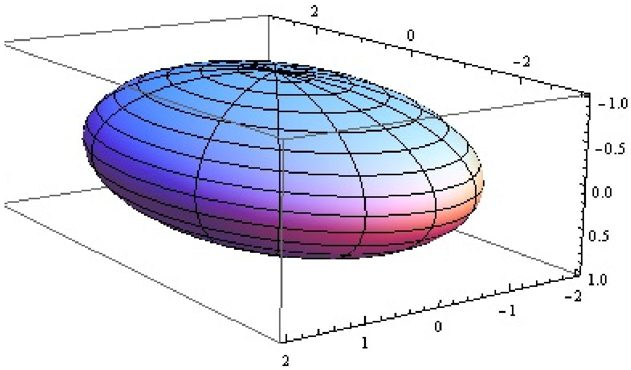
$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi\sin\psi \\ y = y_0 + R\sin\varphi\sin\psi \\ z = z_0 + R\cos\psi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

10.3.2 Elipsoidul

Definiţia 10.6 *Locul geometric al punctelor* $M(x, y, z)$ *din spaţiu care satisfac ecuaţia*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c \in \mathbb{R}_+, \tag{10.12}$$

se numeşte **elipsoid.**



Studiem forma acestei suprefeţe plecând de la ecuaţia (10.12). Deoarece coordonatele x, y, z apar în ecuaţia (10.12) la pătrat, rezultă că dacă punctul $M(x,y,z)$ aparţine elipsoidului, atunci şi punctele $M_1(-x,y,z), M_2(x,-y,z), M_3(x,y,-z)$ aparţin elipsoidului. Dar aceste puncte sunt simetricele punctului M faţă de planele de coordonate. Deci planele de coordonate (xOy, yOz, xOz) sunt plane de simetrie ale suprafeţei. Analog şi punctele $M_4(-x,-y,z), M_5(-x,y,-z), M_6(x,-y,-z)$, simetricele faţă de axele de coordonate ale punctului M, aparţin elipsoidului, deci acesta admite trei axe de simetrie. Punctul $M_7(-x,-y,-z)$, simetricul faţă de origine a punctului$M$, se află pe suprafaţă, deci elipsoidul admite un centru de simetrie.

În concluzie elipsoidul admite

-trei plane de simetrie,

-trei axe de simetrie şi

-un centru de simetrie.

Punctele în care axele de coordonate intersectează suprafaţa se numesc **vârfurile** elipsoidului şi ele sunt: $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$, $C(0,0,c)$, $C'(0,0,c)$. Numerele a, b, c se numesc **semiaxele** elipsoidului.

Pentru a ne da seama de forma acestei suprafeţe, o intersectăm cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu planele de coordonate.

Intersecţiile elipsoidului cu planele de coordonate sunt elipse şi anume:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Intersectând elipsoidul cu plane paralele cu xOy obţinem elipse:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z^2}{c^2} \\ z=k \end{cases} \quad \text{pentru } k \in [-c,c].$$

Analog cu plane paralele cu xOz, yOz,

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2} \\ x=k \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}.$$

Teorema 10.2 *Elipsoidul este o mulţime mărginită şi închisă, deci compactă.*

Demonstraţie. Din ecuaţia elipsoidului rezultă
$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c \Rightarrow$
toate punctele elipsoidului sunt cuprinse în interiorul unui paralelipiped cu laturi de lungimi finite.♦

Ecuaţia **planului tangent la elipsoid printr-un punct al elipsoidului** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe elipsoidul de ecuaţie (10.12). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este
$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$

O **reprezentare parametrică** a elipsoidului se obţine de forma:
$\begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\psi \\ y = b\sin\varphi\sin\psi \\ z = c\cos\psi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

Suprafaţa reprezentată prin ecuaţia:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, a, b, c > 0$
se numeşte **elipsoid imaginar**.

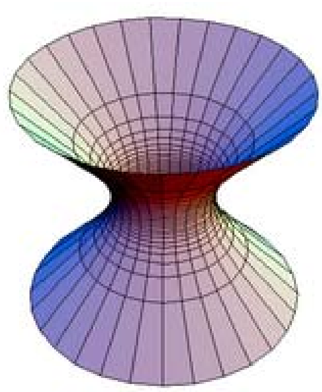
10.3.3 Hiperboloidul cu o pânză

Definiţia 10.7 *Locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a, b, c \in \mathbb{R}_+, \quad (10.13)$$

se numeşte **hiperboloid cu o pânză.** *Numerele a, b, c se numesc* **semiaxele hiperboloidului**.

Observaţia 10.7 Tot hiperboloizi cu o pânză reprezintă ecuaţiile:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$



Hiperboloidul cu o pânză are aceleaşi simetrii ca şi elipsoidul. Are patru vârfuri, $A(a,0,0)$, $A'(-a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $B'(0,-b,0)$. Intersecţiile cu planele $x=0$ şi $y=0$ sunt hiperbole, $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ respectiv $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$ iar cu planul $z=0$ intersecţia este o elipsă $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Intersecţiile cu plane paralele cu xOy, $z=k$, sunt elipse reale, oricare ar fi $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}.$$

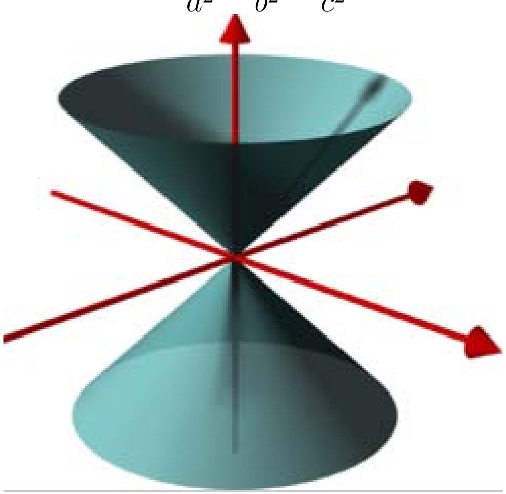
Intersecţiile cu plane paralele cu planele xOz şi respectiv yOz sunt hiperbole,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}.$$

Rezultă că hiperboloidul cu o pânză este o suprafaţă nemărginită .

Dacă $a=b$ elipsele de intersecţie ale suprafeţei cu plane paralele cu planul xOy sunt cercuri.

Cuadrica $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ se numeşte **conul asimptotic** al hiperboloidului cu o pânză.



Ecuaţia **planului tangent la hiperboloidul cu o pânză printr-un punct al său** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un punct de pe hiperboloidului cu o pânză de ecuaţie (10.13). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

O reprezentare parametrică a hiperboloidului cu o pânză este:

$$\begin{cases} x=a\dfrac{\cos\varphi}{\cos\psi} \\ y=b\dfrac{\sin\varphi}{\cos\psi} \\ z=c\operatorname{tg}\psi \end{cases}, \varphi \in [0,2\pi), \psi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

O a doua reprezentare parametrică a hiperboloidului cu o pânză se obţine, ţinînd seama că $1+\operatorname{sh}^2\psi=\operatorname{ch}^2\psi$, luând $z=c\operatorname{sh}\psi$. Avem:

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi\operatorname{ch}\psi \\ y=b\sin\varphi\operatorname{ch}\psi \\ z=c\operatorname{sh}\psi \end{cases},\varphi\in[0,2\pi)\,,\psi\in\mathbb{R}.$$

10.3.4 Hiperboloidul cu două pânze

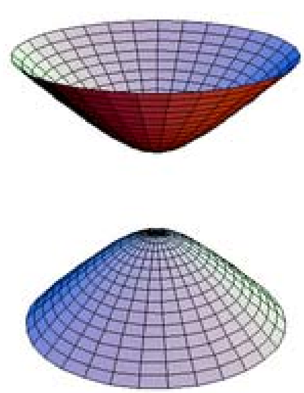
Definiţia 10.8 *Locul geometric al punctelor $M(x,y,z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,a,b,c\in\mathbb{R}_+ \tag{10.14}$$

se numeşte **hiperboloid cu două pânze.** *Numerele a,b,c se numesc* **semiaxele** *hiperboloidului.*

Observaţia 10.8 *Tot hiperboloizii cu o pânză reprezintă ecuaţiile:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0,-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0,-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$



Hiperboloidul cu două pânze are aceleaşi simetrii ca şi elipsoidul. Are două vârfuri $C(0,0,c),C'(0,0,c)$. Intersecţiile cu planele $x=0$ şi $y=0$ sunt hiperbole

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases},\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Intersecţiile cu plane paralele cu $yOz, x=k$, sunt elipse:

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{a^2}-1 \\ x=k \end{cases},k\in(-\infty,a]\cup[a,\infty).$$

Intersecţiile cu plane paralele cu planele xOy şi xOz sunt hiperbole

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}.$$

Hiperboloidul cu două pânze este o mulţime nemărginită.

Cuadrica $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ se numeşte **conul asimptotic** al hiperboloidului cu două pânze.

Ecuaţia **planului tangent la hiperboloidul cu două pânze printr-un punct al său** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe hiperboloidului cu două pânze de ecuaţie (10.14). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

O reprezentare parametrică a hiperboloidului cu două pânze este:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \operatorname{sh}\psi \\ y = b\sin\varphi \operatorname{sh}\psi \\ z = c\operatorname{ch}\psi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi), \psi \in \mathbb{R}_+.$$

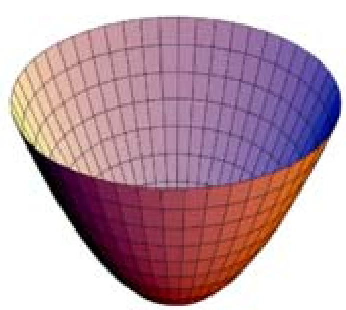
10.3.5 Paraboloidul eliptic

Definiţia 10.9 *Locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, a, b > 0 \tag{10.15}$$

se numeşte **paraboloid eliptic.**

Observaţia 10.9 Tot paraboloizi eliptici reprezintă ecuaţiile:
$\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2x, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2y.$



Planele de coordonate yOz şi xOz sunt plane de simetrie, iar axa Oz este axă de simetrie a suprafeţei. Paraboloidul eliptic nu are centru de simetrie.

Din relaţia (10.15) rezultă că $z \geq 0$, deci paraboloidul eliptic esta situat deasupra planului xOy.

Intersecţiile cu planele $z = k, k \geq 0$, sunt curbele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = k \end{cases}$$

care reprezintă pentru $k > 0$ elipse reale ale căror semiaxe cresc odată cu k. Pentru $k = 0$ obţinem $x = y = z = 0$, adică originea reperului. Punctul O este singurul vârf al suprafeţei. Intersecţiile cu celelalte plane de coordonate sunt parabole.

Intersecţiile cu plane paralele cu xOz şi yOz sunt parabole
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 2z - \dfrac{x^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

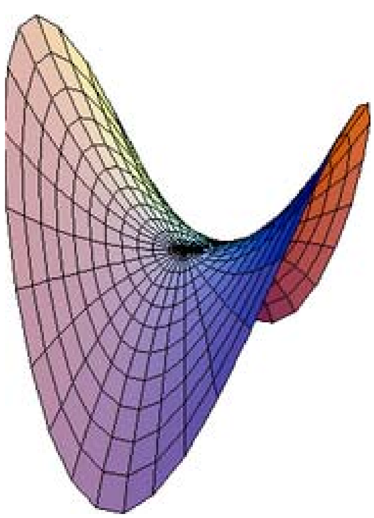
Ecuaţia planului **tangent la paraboloidul eliptic printr-un punct al său** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe paraboloidului eliptic de ecuaţie (10.15). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = z + z_0.$$

O **reprezentare parametrică** a paraboloidului eliptic se obţine luând $2z = v^2$:
$$\begin{cases} x = a\psi \cos\varphi \\ y = b\psi \sin\varphi \\ z = \dfrac{1}{2}\psi^2 \end{cases}, (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \infty).$$

10.3.6 Paraboloidul hiperbolic

Definiţia 10.10 *Locul geometric al punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu care satisfac ecuaţia*
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, a, b > 0 \tag{10.16}$$
se numeşte **paraboloid hiperbolic.**

Observaţia 10.10 Tot paraboloizi hiperbolici reprezintă ecuaţiile:
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x, \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2y.$$



Planele de coordonate yOz şi xOz sunt plane de simetrie, iar axa Oz este axă de simetrie a suprafeţei. Paraboloidul hiperbolic nu are centru de simetrie.

Intersecţiile cu planele $z = k$ sunt curbele
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = k \end{cases}$$
care reprezintă hiperbole. Pentru $k = 0$ obţinem $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, adică o pereche de drepte secante prin origine. Punctul O este singurul vârf al suprafeţei. Intersecţiile suprafeţei cu plane paralele cu planul yOz sunt parabole
$$\begin{cases} y^2 = -2b^2 z + \dfrac{b^2 z^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$
iar intersecţiile suprafeţei cu plane paralele cu planul xOz sunt parabole
$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z + \dfrac{a^2 z^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$
Ecuaţia **planului tangent la paraboloidul hiperbolic printr-un punct al său** se obţine prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe paraboloidului hiperbolic de ecuaţie (10.16). Ecuaţia planului tangent prin acest punct este
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = z + z_0.$$
O **reprezentare parametrică** a paraboloidului eliptic se obţine luând:
$$\begin{cases} x = a\varphi \\ y = b\psi \\ z = \dfrac{1}{2}(\varphi^2 - \psi^2) \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

10.4 Cuadrice degenerate

Numim **cuadrice degenerate** următoarele suprafeţe: suprafaţa determinată de o pereche de plane, cilindrul pătratic, conul pătratic.

10.4.1 Cilindri pătratici

Cilindrii pătratici sunt de trei tipuri:

a) **cilindrul eliptic** are ecuaţia canonică
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, a, b > 0. \tag{10.17}$$

Intersectând această suprafaţă cu plane paralele cu planul $xOy, z = k$, obţinem elipsele de semiaxe a şi b, pentru orice $k \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \\ z = k \end{cases}.$$

Observaţia 10.11 Tot cilindrii eliptici au ecuaţiile

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, a,c>0. \frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, c,b>0.$

b) **cilindrul hiperbolic** are ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0, a,b>0. \tag{10.18}$$

Intersectând această suprafaţă cu plane paralele cu planul xOy, $z=k$, obţinem hiperbole de semiaxe a şi b, pentru orice $k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0\\ z=k\end{cases}.$$

Tot cilindrii hiperbolici sunt

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, a,c>0; \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0, c,b>0.$

c) **cilindrul parabolic** are ecuaţia canonică

$$x^2=2py. \tag{10.19}$$

Intersectând această suprafaţă cu plane paralele cu planul xOy, $z=k$, obţinem parabolele, pentru orice $k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}x^2=2py\\ z=k\end{cases}.$$

Tot cilindrii parabolici sunt

$z^2=2py, x^2=2pz, y^2=2px, y^2=2pz, z^2=2px.$

10.4.2 Conul pătratic

Conul pătratic este suprafaţa de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, a,b,c\in\mathbb{R}_+. \tag{10.20}$$

Intersectând această suprafaţă cu plane paralele cu planul xOy, $z=k$, obţinem elipsele pentru orice $k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{k^2}{c^2} = 0 \\ z = k \end{cases} .$$

Observaţia 10.12 Tot conuri pătratice reprezintă ecuaţiile
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0, a, c > 0. - \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0, a, b, c > 0.$