Algebră Liniară, Geometrie Analitică și Diferențială

Suport de curs

Curs V-VI

III. Transformări liniare. (Operatori linari).

http://math.etc.tuiasi.ro/otarniceriu/

Fie V, W două K–spații vectoriale.

Definition

O aplicație $T : V \to W$ se numește **transformare liniară** (sau **operator liniar**) dacă satisface condițiile:

(a) $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$, $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V$ (aditivitatea aplicației liniare);

(b) $T(\lambda \vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$, $\forall\ \lambda \in K$, $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V$ (omogenitatea aplicației liniare).

Vom nota cu $\mathcal{L}(V, W)$ mulțimea aplicațiilor liniare de la V la W, i.e.

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W : T \text{ este transformare liniară}\}.$$

Propozitie

Dacă $T \in \mathcal{L}(V, W)$ *atunci:*
(a) $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, *unde* $\vec{0}_V$ *este vectorul nul din* V *și* $\vec{0}_W$ *este vectorul nul din* W;
(b) $T(-\vec{x}) = -T(\vec{x})$, $\forall\ \vec{x} \in V$.

Propozitie

O aplicație $T : V \to W$ *este liniară dacă și numai dacă are loc*

$$T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}),\ \forall\ \lambda, \mu \in K,\ \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V$$

Definition

(a) Se numește **nucleul unei transformări liniare** $T \in \mathcal{L}(V, W)$ notat cu $Ker\,(T)$, contraimaginea prin T a subspațiului vectorial nul $\{\vec{0}_W\}$ al lui W, i.e.

$$Ker\,(T) := T^{-1}(\vec{0}_W) = \left\{\vec{v} \in V : T\,(\vec{v}) = \vec{0}_W\right\} \subseteq V;$$

(b) Dimensiunea lui $\mathrm{Ker}\,(T)$ se numește **defectul transformării liniare** $T \in \mathcal{L}(V, W)$ și se notează cu $\mathrm{def}\,(T)$ (deci $\mathrm{def}\,(T) := \dim\,(Ker\,(T))$);
(c) Se numește **imaginea transformă rii liniare** $T \in \mathcal{L}(V, W)$, și se notează cu $Im\,(T)$, mulțimea

$$T\,(V) := \{\vec{w} \in W : \exists\ \vec{v} \in V,\ T\,(\vec{v}) = \vec{w}\};$$

(d) Dimensiunea lui $Im\,(T)$ se numește **rangul transformării liniare** $T \in \mathcal{L}(V, W)$ și se notează cu $rang\,(T)$ (deci $rang\,(T) := \dim\,(Im\,(T))$);

Example

Fie V un K–spațiu vectorial și $\lambda \in K$ fixat. Definim $T : V \to V$, prin $T(\vec{x}) := \alpha \vec{x}$. Evident $T \in \mathcal{L}(V, V)$ deoarece

$$T(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \alpha \cdot (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda(\alpha \vec{x}) + \mu(\alpha \vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}).$$

Example

Definim aplicația $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ prin

$$T(\vec{x}) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_3, x_2, 3x_1 - x_2 + x_3), \forall\, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Arătați că $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

Proprietăți generale ale transformărilor liniare:

Propozitie

Fie V, W două K–spații vectoriale și $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Transformarea liniară T este injectivă;

(ii) $Ker(T) = \{\vec{0}_V\}$;

(iii) Pentru orice sistem de vectori liniar independent $S \subset V$ avem că $T(S) \subset W$ este un sistem de vectori liniar independent.

Propozitie

Fie V, W două K–spații vectoriale, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ și $S \subset V$ un sistem de generatori al lui V. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Transformarea liniară T este surjectivă;

(ii) Imaginea $T(S) \subset W$ este un sistem de generatori al lui W.

Definition

O aplicație $T \in \mathcal{L}(V, W)$ se numește **izomorfism de spații vectoriale** dacă aplicația T este bijectivă.

Fie în continuare V_n un K–spațiu vectorial n–dimensional și considerăm spațiul vectorial aritmetic K^n.

Propozitie

Orice spațiu vectorial V_n care este n-dimensional este izomorf cu K^n.

Proof.

Fie B o bază $B = \{e_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ o bază în V_n. Pentru orice $\vec{x} \in V$ are loc descompunerea unică

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i}$$

unde $\lambda_i \in K$, $i \in \overline{1,n}$. Definim aplicația

$$T(\vec{x}) := (\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Se poate verifica că această aplicație este transformare liniară bijectivă, adică T este izomorfism.

$\square$

Theorem

V_n este izomorf cu K–spațiul vectorial W dacă și numai dacă $\dim W = n$ (adică W are aceeași dimensiune cu V_n).

Reamintim Definiția 2

$$rang\, T = \dim (Im\, T)\,,\ \operatorname{def} T = \dim (Ker\, T)$$

Theorem

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W)$. Atunci are loc

$$rang\, T + \operatorname{def} T = n$$

(numită relația dimensiunilor).

Corollary

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$. *Atunci au loc:*

$$(i) \quad T \text{ este aplicație injectivă} \Leftrightarrow \operatorname{rang} T = n, \; n \leq m$$

$$(ii) \quad T \text{ este aplicație surjectivă} \Leftrightarrow \operatorname{rang} T = m, \; m \leq n$$

$$(iii) \quad T \text{ este aplicație bijectivă} \Leftrightarrow \operatorname{rang} T = n = m$$

Corollary

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_n)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

$$\begin{array}{ll} (i) & T \text{ este aplicație injectivă} \\ (ii) & T \text{ este aplicație surjectivă} \\ (iii) & T \text{ este aplicație bijectivă} \end{array}$$

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$, $B = \{e_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ o bază în V_n și $B' = \{f_j\}_{j \in \overline{1,m}}$ bază în W_m.

Theorem

Aplicația $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m) \Leftrightarrow$ pentru orice $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \in V_n$, vectorul $T(\vec{x}) \in W_m$ are în baza B' coordonatele $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i$, $j \in \overline{1,m}$, unde $A = (a_i^j)_{i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m}} \in \mathcal{M}_{mn}(K)$.

Matricea

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}$$

se numește **matricea transformării liniare T în raport cu bazele B și B'**.
Această matrice are drept coloane coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_i)$ în baza B'.

Ecuațiile

$$\begin{cases} y_i = a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n \\ y_2 = a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n \end{cases}$$

se numesc ecuațiile transformării liniare T în raport cu bazele B și B'. Dacă notăm cu X matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x} \in V_n$ în baza B, și cu Y matricea coloană a coordonatelor vectorului $T(\vec{x}) \in W_m$ în baza B', atunci ecuațiile de mai sus se rescriu sub formă matriceală

$$Y = A \cdot X$$

(numită **ecuația matriceală a transformării liniare** T).

Propozitie

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$. Atunci $\operatorname{rang} T = \operatorname{rang} A$, unde A este matricea transformării liniare T.

Theorem

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$, $B, \bar{B}$ două baze în V_n și $B', \bar{B}'$ două baze în W_m. Presupunem că $B \xrightarrow{S} \bar{B}$ și $B' \xrightarrow{S'} \bar{B}'$. Atunci are loc relația

$$\bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} = (S')^{-1} \cdot A_{BB'} \cdot S, \tag{1.1}$$

unde $A_{BB'}$ și $\bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'}$ sunt matricile transformării liniare în raport cu bazele B și B', respectiv $\bar{B}$ și $\bar{B}'$.

Observație

Formula (1.1) de mai sus, se numește **formula matriceală de schimbare a matricei unei transfromări liniare la schimbări de baze.**

Proof.

Am văzut mai sus că ecuația matriceală a lui T în raport cu perechea de baze B, B' este $Y = A_{BB'} \cdot X$, și similar ecuația matriceală a lui T în raport cu perechea de baze $\bar{B}, \bar{B}'$ este $\bar{Y} = \bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} \cdot \bar{X}$. Pe de altă parte conform formulei matriceale de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze (vezi Cursul 1) avem următoare ecuații de legătură

$$X = S \cdot \bar{X}\ ,\ \ Y = S' \cdot \bar{Y}$$

Deci

$$\begin{aligned} Y &= S' \cdot \bar{Y} = A_{BB'} \cdot X = A_{BB'} \cdot S \cdot \bar{X} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{Y} = \left[\left(S'\right)^{-1} A_{BB'}\ S \right] \cdot \bar{X} \end{aligned}$$

Dar $\bar{Y} = \bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} \cdot \bar{X}$ deci, identificând matricile obținem

$$\bar{A}_{\bar{B}\bar{B}'} = \left(S'\right)^{-1} \cdot A_{BB'} \cdot S$$

□

Corollary

În cazul particular în care luăm endomorfismul $T \in \mathcal{L}(V_n, V_n)$ *și* $\bar{B}$ *o altă bază în* V_n *cu* $B_c \xrightarrow{S} \bar{B}$, *are loc relația*

$$\bar{A} = (S)^{-1} \cdot A \cdot S, \tag{1.2}$$

unde A *și* $\bar{A}$ *sunt matricile transformării liniare în raport cu vechea bază canonică* B_c *și respectiv cu noua bază* $\bar{B}$.

Definition

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$. Spunem că vectorul $\vec{x} \neq \vec{0}_V$ din V_n este vector propriu pentru T dacă $\exists\ \lambda \in K$ astfel încât

$$T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}.$$

În acest caz $\lambda \in K$ se numește valoare proprie corespunzătoare vectorului propriu $\vec{x}$.

Suntem interesați să găsim bazele lui V_n în raport cu care matricea endomorfismului $T \in \mathcal{L}(V_n)$ să aibă forma cea mai simplă.

Theorem

Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ admite n vectori proprii liniar independenți dacă și numai dacă există o bază $B = \{\vec{e}_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ a lui V_n astfel încât să avem că matricea A a transformării liniare T să fie

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = diag\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right).$$

Definition

Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V_n)$ se numește diagonalizabil dacă există o bază B în V_n formată numai din vectori proprii pentru T.

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$, $B = \{\vec{e}_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ bază a lui V_n și $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i \neq \vec{0}$ un vector propriu pentru T. Fie $A = (a_i^j)_{i\in\overline{1,n},\ j\in\overline{1,m}}$ matricea lui T.

Vectorul $\vec{x}$ este propriu $\Leftrightarrow T\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i\right) = \lambda\sum\limits_{j=1}^{n} x_i\vec{e}_i \Leftrightarrow$

$\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i^j\right)\vec{e}_j = \lambda\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i^j = \lambda x_j$, $j \in \overline{1,n}$ ceea ce înseamnă că

$$(A - \lambda I_n)\cdot X = O \tag{1.3}$$

unde X este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$ în baza B, I_n este matricea unitate de ordin n.

Propozitie

Vectorul $\vec{x}$ este propriu dacă și numai dacă matricea coloană X a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza B este soluție nebanală pentru sistemul liniar și omogen (1.3).

Deci T admite vectori proprii $\Leftrightarrow \lambda$ este soluție a ecuației algebrice de grad n

$$\det\left(A - \lambda I_n\right) = 0$$

Polinomul $p\left(\lambda\right) = \det\left(A - \lambda I_n\right)$ se numește **polinomul caracteristic asociat matricei** A, iar ecuația $p\left(\lambda\right) = 0$ se numește **ecuația caracteristică a matricei** A.

Propozitie

Fie $\lambda \in K$ o rădăcină a ecuației caracteristice $p(\lambda) = 0$ asociată lui $T \in \mathcal{L}(V_n)$. Atunci λ este valoare proprie pentru T. Invers dacă λ este valoare proprie pentru T atunci λ este rădăcină a ecuației caracteristice $p(\lambda) = 0$

Dacă luăm λ o valoare proprie oarecare atunci să notăm cu

$$V(\lambda) := \{\vec{x} \in V_n : T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$$

adică mulțimea tuturor vectorilor proprii pentru T corespunzătoare valorii proprii λ.

Teorema de diagonalizare a unui endomorfism

Operatorul $T \in \mathcal{L}(V_n)$ este diagonalizabil dacă și numai dacă următoarele două condiții sunt satisăcute:
(i) rădăcinile ecuației caracteristice sunt toate valori proprii pentru T (sunt toate din K)
(ii) ordinul de multiplicitate al fiecărei valori proprii λ_i este egal cu dimensiunea subspațiului propriu $V(\lambda_i)$.

Algoritmul practic de diagonalizare a unui endomorfism (a unei matrici pătratice)

Fie $T \in \mathcal{L}(V_n)$ un endomorfism și o bază B în V_n. Să notăm cu A matricea lui T în baza B. Se va rezolva ecuația caracteristică $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$. Dacă această ecuație are rădăcini care nu sunt din K atunci condiția (i) din teorema precedentă nu este satisfăcută deci endomorfismul T nu este diagonalizabil. Dacă toate rădăcinile sunt din K atunci pentru fiecare valoare λ_i se va determina subspațiul propriu $V(\lambda_i)$. Pentru aceasta se va identifica orice vector $u \in V_n$ cu matricea coloană X a coordonatelor sale în baza considerată B a lui V_n, și, pentru fiecare valoare proprie λ_i considerăm sistemul liniar și omogen

$$(A - \lambda_i I_n) X = 0$$

Se va determina apoi subspațiu propriu $V(\lambda_i) := \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) : (A - \lambda_i I_n) X = 0\}$ și se va pune în evidență câte o bază în fiecare subspațiu propriu $V(\lambda_i)$ determinând astfel $\dim V(\lambda_i)$. Dacă există o valoare proprie λ_i pentru care $\dim V(\lambda_i)$ este mai mică strict decât ordinul de multiplicitate al lui λ_i atunci condiția (ii) din teorema precedentă nu este satisfăcută deci endomorfismul T nu este diagonalizabil. Dacă $\dim V(\lambda_i)$ este egală cu ordinul de multiplicitate al lui λ_i atunci condiția (ii) din teorema precedentă este satisfăcută deci endomorfismul T este diagonalizabil. În acest caz baza $\bar{B}$, formată din reuniunea bazelor tuturor subspațiilor proprii determinate anterior, este bază a lui V_n în raport cu care matricea endomorfismului T are forma diagonală $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, unde valoarea proprie λ_i se repetă de atâtea ori cât este ordinul ei de multiplicitate.

Exercițiu

Să se verifice că endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat de

$$T(\vec{x}) = (4x_1 + 6x_2, -3x_1 - 5x_2, -3x_1 - 6x_2 + x_3), \ \forall \, \vec{x} = (x_1, x_1, x_3) \in \mathbb{R}$$

este diagonalizabil și să se determine o bază $\bar{B}$ a lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu care matricea lui T are forma diagonală.

Rezolvare:
Fie B baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, i.e. $B_c := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Calculăm $T(\vec{e}_i)$ și obținem

$$T(\vec{e}_1) = (4, -3, -3), \;\; T(\vec{e}_2) = (6, -5, -6), \;\; T(\vec{e}_3) = (0, 0, 1)$$

deci matricea endomorfismului în baza B, care se formează punând coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_i)$ în baza B pe coloană, este

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică a matricei A este $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$ adică, efectuând calculele,

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) = 0$$

Deci rădăcinile caracteristice ale lui T sunt $\lambda_1 = 1$, rădăcină multiplă de ordin 2, și $\lambda_2 = -2$, rădăcină simplă. Deoarece valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ obținem că este satisfăcută condiția (i) din teoremă. Vom calcula acum subspațiile proprii $V(1)$ și $V(2)$ corespunzătoare celor două valori proprii găsite. Avem $V(1) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A - I_3) X = 0\}$ și dacă rezolvăm sistemul liniar și omogen $(A - I_3) X = 0$ obținem soluția

$$X = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Deci $V(1)$ este generat de vectorii liniari independenți $\vec{f_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ și prin urmare bază în $V(1)$ este $B_1 = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ adică $\dim V(1) = 2$.

Analog $V(-2) := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(K) : (A + 2I_3) X = 0\}$ și dacă rezolvăm sistemul liniar și omogen $(A + 2I_3) X = 0$ obținem soluția

$$X = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Deci $V(-2)$ este generat vectorul nenul $\vec{f_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, și prin urmare bază în $V(-2)$ este $B_2 = \{\vec{f_3}\}$ adică $\dim V(-2) = 1$.

Deci $\dim V(1) = 2 =$ ordinul de multiplicitate al lui λ_1 și $\dim V(-2) = 1 =$ ordinul de multiplicitate al lui λ_2. deci și condiția (ii) este îndeplinită.

Prin urmare endomorfismul este diagonalizabil și baza $\bar{B} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ este cea în raport cu care matricea lui T are forma diagonală deoarece $T(\vec{f_1}) = \vec{f_1}$, $T(\vec{f_2}) = \vec{f_2}$, $T(\vec{f_3}) = -\vec{f_3}$. Matricea schimbării de baze de la baza canonică la baza $\bar{B}$ este

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

iar matricea lui T în raport cu noua bază $\bar{B}$ este dată de

$$\bar{A} = S^{-1} \cdot A \cdot S$$