Matematici Speciale - Seminar

NUMERE COMPLEXE.

1 Forma algebrică si trigonometrică a numerelor complexe

Mulţimea numerelor complexe reprezintă mulţimea perechilor ordonate de numere reale:

$$\mathbb{C} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

- **Forma algebrică** a unui număr complex z este

  $$z = x + jy$$

  unde x este partea reală a lui z: Re(z) = x iar y partea imaginară a lui z: Im(z) = y.

- **Forma trigonometrică** a unui număr compex z este

  $$z = r\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right),$$

  unde numărul $r \in [0, \infty)$ este definit prin

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  se numeşte modulul numărului complex z şi se notează cu $|z|$ iar θ este soluţia sistemului

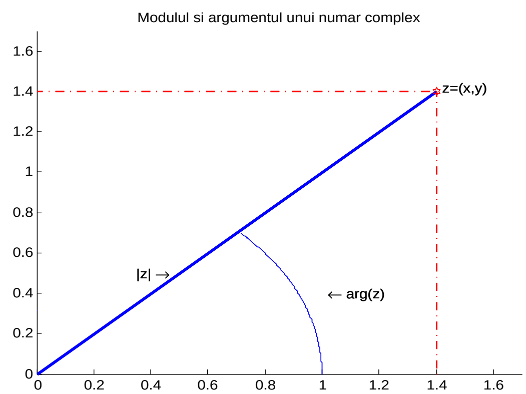
  $$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

  în intervalul $(0, 2\pi]$, şi se numeşte argumentul principal al numărului complex z. Se mai notează $\arg_0(\mathrm{z})$. Mulţimea tuturor soluţiilor acestui sistem este dată de:

  $$\mathrm{Arg(z)} = \{\arg_0(\mathrm{z}) + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

Observaţie.

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0, y \geq 0 \\ \pi - \operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|, & x < 0, y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|, & x < 0, y < 0, \\ 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|, & x > 0, y < 0, \\ \pi/2, & x = 0, y > 0, \\ 3\pi/2, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



2 Aplicaţii

Exemplul 1 *Sa se determine forma algebrica/trigonometrica, modulul si argumentul (faza) urmatoarelor numere complexe:*

1. $\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(1 + 0j) = \sqrt{2}\,(\cos 0 + j \sin 0)$;
2. $\pi j = \pi\,(\cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2))$
3. $z = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$
$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$
si, deci
$$z = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\,(\cos(3\pi/4) + j \sin(3\pi/4))$$
4. $z = -j = (\cos(3\pi/2) + j \sin(3\pi/2)$;

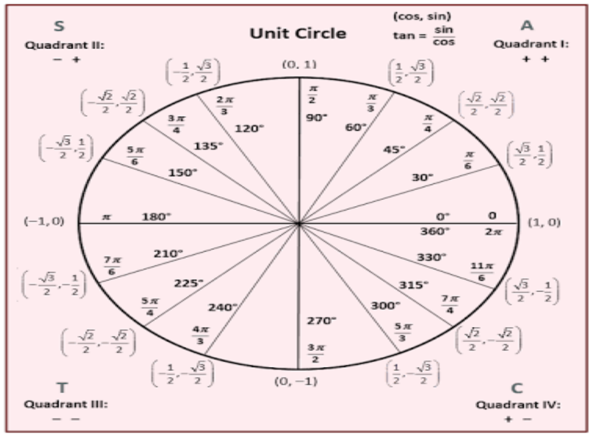


Figure 1: Source: http.socratic.org

5. $z = -1 - j = \sqrt{2}\,(\cos(5\pi/4) + j\sin(5\pi/4))$;

6. $z = -\sqrt{3} + j = 2\,(\cos(5\pi/6) + j\sin(5\pi/6))$;

7. $z = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}j\right) = \cos(\pi/3) + j\sin(\pi/3)$;

8. $\dfrac{1+j}{1-j}-\dfrac{1-j}{1+j}$; *Deoarece:*

$$\frac{1+j}{1-j}-\frac{1-j}{1+j}=\frac{(1+j)^2}{(1-j)(1+j)}-\frac{(1-j)^2}{(1+j)(1-j)}=\frac{1+2j+j^2-(1-2j+j^2)}{2}=2j$$

obţinem:

$$z=2(\cos(\pi/2)+j\sin(\pi/2))$$

Exercitiul 1 *Sa se determine forma algebrica/trigonometrica, modulul si argumentul (faza) urmatoarelor numere complexe:*

1. $\frac{4-2j}{1+j}+\frac{2+5j}{1-j}$;

Exemplul 2 *Să se determine modulul numărului complex:*

$$1+j+j^2+j^3+j^4+....+j^{2020}$$

Rezolvare:
Se observă că:

$$j^n=\begin{cases}1, & n=4k\\ j, & n=4k+1\\ -1, & n=4k+2\\ -j, & n=4k+3, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Astfel

$$1+j+j^2+j^3+j^4+....+j^{2020}=1+j-1-j+1+....-j+1=1$$

şi, deci, $|z|=1$.

Observaţie:

a) dacă $z=r\,(\cos\theta+j\sin\theta)$, $z\neq 0$ atunci

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r\,(\cos\theta+j\sin\theta)}=\frac{1}{r}\,(\cos\theta-j\sin\theta)=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+j\sin(-\theta)], \tag{1}$$

iar pentru mulţimile argumentelor avem $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\operatorname{Arg}(z)$;

b) dacă $z_i=r_i\,(\cos\theta_i+j\sin\theta_i)\,,\ i=\overline{1,2}$ atunci

$$\begin{cases} z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1+\theta_2)],\\[2mm] \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)], \quad z_2\neq 0\,,\end{cases} \tag{2}$$

c) dacă $z=r\,(\cos\theta+j\sin\theta)$, $z\neq 0$ şi $n\in\mathbb{N}$ atunci

$$z^n=r^n\,(\cos n\theta+\sin n\theta) \tag{3}$$

d) dacă $z=r\,(\cos\theta+j\sin\theta)$, $z\neq 0$ şi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ atunci

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+j\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k=\overline{0,n-1} \tag{4}$$

Exemplul 3 *Cu ajutorul formulelor de mai sus, să se găsească forma trigonometrică a numerelor complexe:*

1. $\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;
   Are loc
$$\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (\cos(2\pi/3)+j\sin(2\pi/3))^2 = \cos(4\pi/3)+j\sin(4\pi/3)$$
   Deci $|z| = 1$ *iar* $\theta = 4\pi/3$.

2. $(1-j)(-1-j\sqrt{3})$;
   În primă fază, trebuie să rescriem:
$$1-j = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(7\pi/4)+j\sin(7\pi/4)\right)$$
   şi,
$$(-1-j\sqrt{3}) = 2\left(\cos(4\pi/3)+j\sin(4\pi/3)\right).$$
   Folosind (2), obţinem:
$$\begin{aligned}&(1-j)(-1-j\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}(\cos(7\pi/4+4\pi/3)+j\sin(7\pi/4+4\pi/3))\\&= 2\sqrt{2}(\cos(37\pi/12)+j\sin(37\pi/12) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/12)+j\sin(13\pi/12)\end{aligned}$$

3. $\frac{1+j\sqrt{3}}{2(1-i)}$;
   Similar, scriem:
$$1+j\sqrt{3} = 2\left(\cos(\pi/3)+j\sin(\pi/3)\right)$$
   şi
$$2(1-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos(7\pi/4)+j\sin(7\pi/4)\right)$$
   Prin urmare:
$$\begin{aligned}&\frac{1+j\sqrt{3}}{2(1-i)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\pi/3-7\pi/4)+j\sin(\pi/3-7\pi/4)\right)\\&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(-17\pi/12)+j\sin(-17\pi/12)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(7\pi/12)+j\sin(7\pi/12)\right)\end{aligned}$$

4. $(-1+j)^6(-\sqrt(3)+j)^6$;
   Avem
$$\begin{aligned}&(-1+j)^6(-\sqrt(3)+j)^6 = \left[\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4)+j\sin(3\pi/4)\right)\right]^6\cdot\left[2\left(\cos(5\pi/6)+j\sin(5\pi/6)\right)\right]^6\\&\left[2^3\left(\cos(9\pi/2)+j\sin(9\pi/2)\right)\right]\cdot\left[2^6\left(\cos(5\pi)+j\sin(5\pi)\right)\right]\\&= 2^9\left(\cos(9\pi/2+5\pi)+j\sin(9\pi/2+5\pi)\right)\\&= 2^9\left(\cos(3\pi/2)+j\sin(3\pi/2)\right) = -2^9 j\end{aligned}$$

5. $\sqrt[3]{j}$;
   Scriem mai întâi numerele de sub radical în forma trigonometrică; astfel
$$j = \cos(\pi/2)+j\sin(\pi/2)$$
   şi, deci, conform (4),
$$\sqrt[3]{j} = \cos\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right)+j\sin\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2$$

6. $\sqrt[4]{-1}$;

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos(\pi) + j\sin(\pi)} = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Exemplul 4 *Să se determine radacinile complexe ale ecuatiilor:*

1. $z^2 - (2+j)z + (-1+7j) = 0$;
Calculam

$$\Delta = (2+j)^2 - 4(-1+7j) = 4 + 4j - 1 + 4 - 28j = 7 - 24j$$

Pentru a extrage radicalul de ordin 2 din Δ*, cautam numarul complex* $a + jb$ *al carui patrat sa coincida cu* $7 - 24j$*. Altfel spus:*

$$a^2 - b^2 + 2abj = 7 - 24j \Longrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ \\ b = -\dfrac{12}{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{144}{a^2} = 7 \\ \\ b = -\dfrac{12}{a} \end{cases}$$

Rezolvăm prima ecuaţie:

$$a^4 - 7a^2 - 144 = 0$$

şi obţinem $a^2 = 16$ *(ignoram radacina negativa), si deci:*

$$a_1 = 4 \Longrightarrow b_1 = -3$$
$$a_2 = -4 \Longrightarrow b_2 = 3$$

şi deci:

$$\sqrt{\Delta} = 4 - 3j \Longrightarrow z_{1,2} = \frac{2 + j \pm (4 - 3j)}{2},$$

sau

$$\sqrt{\Delta} = -4 + 3j \Longrightarrow z_{3,4} = \frac{2 + j \pm (-4 + 3j)}{2}$$

şi obţinem: $z_1 = 3 - j$, $z_2 = -1 + 2j$.

2. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$;
Remarcăm faptul că putem scrie echivalent:

$$z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 + 6z + 9) + 100 = 0$$
$$\Leftrightarrow [z(z+3)]^2 - (10j)^2 = 0 \Leftrightarrow [z(z+3) + 10j][z(z+3) - 10j] = 0$$

Avem, deci, situaţiile:

$$(i)\ z^2 + 3z + 10j = 0 \quad sau \quad (ii)\ z^2 + 3z - 10j = 0$$

În cazul (i):

$$\Delta = 9 - 40j \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(5 - 4j),$$

obţinem soluţiile $z_1 = \dfrac{3 + 5 - 4j}{2} = 4 - 2j$, $z_2 = \dfrac{3 - 5 + 4j}{2} = -1 + 2j$. *În cazul (ii):*

$$\Delta = 9 + 40j \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(5 + 4j),$$

obţinem soluţiile $z_3 = \dfrac{3 + 5 + 4j}{2} = 4 + 2j$, $z_4 = \dfrac{3 - 5 - 4j}{2} = -1 - 2j$.

3. $z^3 - 8 = 0$;
   Scriem echivalent:

$$z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 = 8(\cos(0) + j\sin(0)) \Leftrightarrow z_k = 2\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right], k = 0, 1, 2.$$

   $k = 0 \Longrightarrow z_0 = 2$
   $k = 1$:

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -1 + j\sqrt{3}$$

   $k = 2$:

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = -1 - j\sqrt{3}$$

4. $z^4 = 1 - j$
   Ca in cazul anterior, scriem:

$$1 - j = \sqrt{2}\left(\cos(7\pi/4) + j\sin(7\pi/4)\right)$$

   şi rezultă:

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi/4 + 2k\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi/4 + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

   Pentru k=0, obţinem:

$$z_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(7\pi/16) + j\sin(7\pi/16)\right),$$

   pentru $k = 1$:

$$z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(15\pi/16) + j\sin(15\pi/16)\right),$$

   pentru $k = 2$:

$$z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(23\pi/16) + j\sin(23\pi/16)\right),$$

   iar pentru $k = 3$:

$$z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos(31\pi/16) + j\sin(31\pi/16)\right),$$

5. $z^2 + 2z + 4 = 0$ *(exerciţiu)*;

6. $z^8 + (1 - j)z^4 - 1 = 0$ *(exerciţiu)*.

Exemplul 5 *Să se determine numerele complexe care verifică:*

a) $|z| = 5$; $|z - a| = 5$, $a \in \mathbb{C}$; $|z - j| = 1$;

b) $arg z = \pi/4$, $arg(z - j) = \pi/3$, $Re(z) = 2$;

c) $|z - a| + |z - b| = c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}_+$;

d) $|z - z_0| < R$, $|z - z_0| > R$, $R \in \mathbb{R}_+$.

e) $Re(z^2) = 4$.

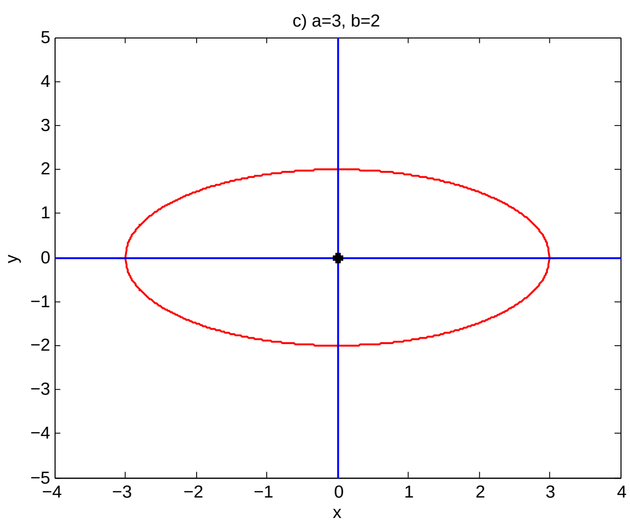
Rezolvări:
a)*Se observă că, pentru* $z = x + jy$,

$$|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

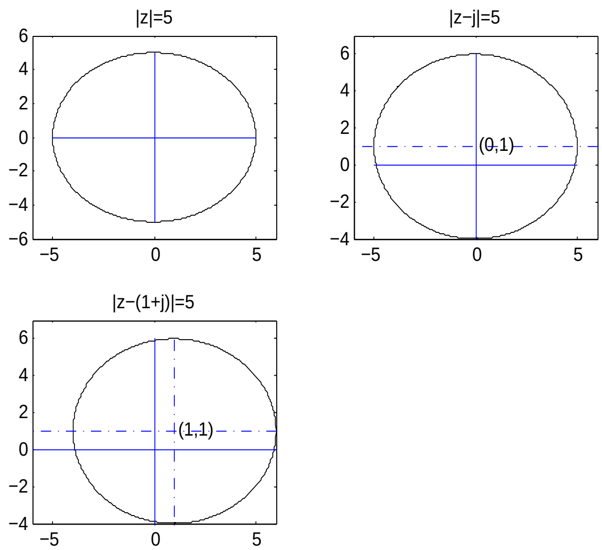
şi deci, numerele complexe ce verifică proprietatea $|z| = 5$ *sunt punctele de pe cercul de centru* $(0,0)$ *şi rază* $R = 5$.
Similar, pentru $z = x + jy$, $a = a_1 + ja_2$,

$$|z - a| = 5 \Leftrightarrow (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = 25$$

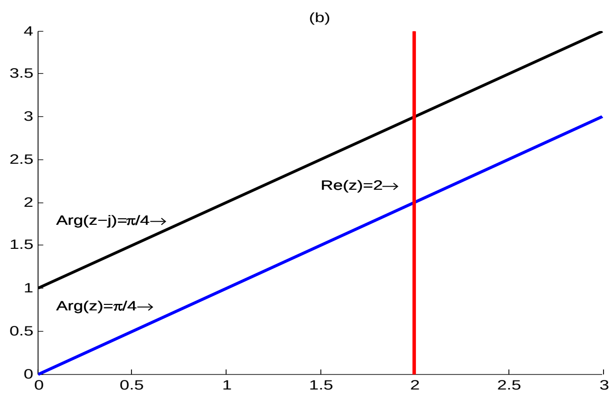
ce reprezintă ecuaţia cercului de centru (a_1, a_2) *şi rază* $R = 5$.
$|z - j| = 1$ - *ecuaţia cercului de centru* $(0,1)$ *şi rază* $R = 1$.



b) $argz = \pi/4$ *reprezintă semidreapta ce porneste din* $(0,0)$ *şi face unghiul* $\pi/4$ *cu axa* Ox*;*
$arg(z-j) = \pi/3$ *- semidreapta ce porneste din* $(0,1)$ *şi face unghiul* $\pi/3$ *cu axa* Ox*;*
$Rez = 2$ *reprezintă dreapta de ecuaţie* $x = -3$*, deci dreapta paralelă cu axa* Oy *şi care intersectează axa* Ox *în punctul* $(2,0)$*.*
c) Interpretarea geometrica a ecuaţiei c) este următoarea: mulţimea punctelor din plan cu proprietatea că suma distanţelor de la punctul respectiv la 2 puncte fixe a, b *din plan este constantă (şi egală cu c) - elipsa cu focarele* a *şi* b*.*



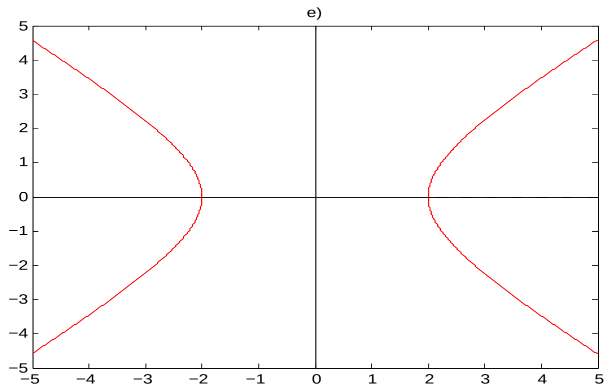
d) Interiorul, respectiv exteriorul cercului de centru z_0 *şi rază* R.



e)

$$Re(z^2) = 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

ce reprezintă hiperbola echilateră de semiaxe egale cu 2.



Forma exponenţială a unui număr complex.
Pentru un număr complex scris sub forma trigonometrică $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$, are loc:

$$z = re^{j\theta}.$$

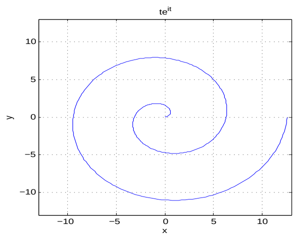


Figure 2: Graficul functiei xe^{iy} cu $x = y$.

Exemplul 6 *Să se calculeze cu ajutorul formei exponenţiale:*

$$(1+j)^7$$

Scriind forma trigonometrică

$$1 + j = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{\pi j/4}$$

obţinem imediat că

$$(1+j)^7 = \sqrt{2}^7 (e^{\pi j/4})^7 = \sqrt{2}^7 e^{7\pi j/4} = 8\sqrt{2}\,(\cos(7\pi/4) + j\sin(7\pi/4))\,.$$

II. Fie $z = x + jy \in \mathbb{C}$. Definim **exponenţiala** sa prin

$$e^z = e^x(\cos y + j\sin y). \tag{5}$$

Atunci are loc

$$\overline{e^z} = e^x(\cos y - j\sin y) = e^{\overline{z}}. \tag{6}$$

Avem

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Arg} e^z = \operatorname{Im} z.$$

Definim

$$\text{cosinus}: \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \tag{7}$$

$$\text{sinus}: \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \tag{8}$$

$$\text{tangenta}: \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{2jz} - 1}{j(e^{2jz} + 1)} \tag{9}$$

$$\text{cotangenta}: \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{j(e^{2jz} + 1)}{e^{2jz} - 1} \tag{10}$$

$$\text{cosinus hiperbolic :} \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{11}$$

$$\text{sinus hiperbolic :} \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{12}$$

$$\text{tangenta hiperbolică :} \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \tag{13}$$

$$\text{cotangenta hiperbolică :} \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} \tag{14}$$

Fie $z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = r\, e^{j\theta} \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$. Definim **logaritmul complex** al numărului nenul z ca fiind acel număr $w \in \mathbb{C}$, notat $\operatorname{Ln} z$ cu proprietatea

$$e^w = z.$$

Dacă scriem $w = x + jy$, atunci

$$e^w = e^x(\cos y + j\sin y)$$

şi găsim

$$e^x(\cos y + j\sin y) = r(\cos\theta + j\sin\theta).$$

Dacă luăm modulele celor doi membri găsim

$$e^x = r \quad \Rightarrow \quad x = \ln r \text{ (logaritmul natural).}$$

Rezultă

$$\cos y + j\sin y = \cos\theta + j\sin\theta$$

şi identificând părţile reale şi cele imaginare, deducem

$$\cos y = \cos\theta \ \text{ şi } \ \sin y = \sin\theta \implies y = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Prin urmare

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + j(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Exemplul 7 *Să se calculeze:*

1. j^j;
   Scriind $j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$, *obţinem imediat:*

$$j^j = e^{j\operatorname{Ln} j} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}$$

2. $2^{\sqrt{3}}$

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\operatorname{Ln} 2} = e^{\sqrt{3}(\ln 2 + 2k\pi j)}$$

3. $\operatorname{th}(\ln 2 + j\frac{\pi}{4})$
   Din definiţie avem:

$$\begin{aligned}\operatorname{th} z &= \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = \frac{e^{2(\ln 2 + j\pi/4)} - 1}{e^{2(\ln 2 + j\pi/4)} + 1} = \frac{e^{\ln 4 + j\pi/2} - 1}{e^{\ln 4 + j\pi/2} + 1} \\ &= \frac{4[(\cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2)] - 1}{4[(\cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2)] + 1} = \frac{-1 + 4j}{1 + 4j} = \frac{-15 - 8j}{17}\end{aligned}$$

Exemplul 8 *Să se rezolva ecuaţiile:*

1. $\sin z = 10$;

Rezolvare: *Scriem echivalent, folosind definiţia:*

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j},$$

deci ecuaţia devine:

$$\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = 10 \Longrightarrow e^{jz} - e^{-jz} = 20j \Longrightarrow e^{jz} - \frac{1}{e^{jz}} = 20j.$$

Aducand la acelaşi numitor:

$$e^{2jz} - 20je^{jz} - 1 = 0$$

Să notăm $w = e^{jz}$; ecuaţia devine:

$$w^2 - 20jw - 1 = 0$$

$$\Delta = -400 + 4 = -396 \Longrightarrow w_{1,2} = (10 \pm \sqrt{99})j.$$

Deci

$$e^{jz} = (10 \pm \sqrt{99})j \Leftrightarrow jz + 2k\pi j = \operatorname{Ln}((10 \pm \sqrt{99})j)$$

Primul caz:

$$jz = \ln(10 + \sqrt{99}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) j$$

si deci

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \ln(10 + \sqrt{99})j = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + \ln(10 - \sqrt{99})j$$

Din cel de-al doilea caz, rezultă:

$$jz = \ln(10 - \sqrt{99}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) j$$

şi, deci:

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + \ln(10 + \sqrt{99})j$$

2. $\sin z - \cos z = j$;

Rezolvare: *Folosim, din nou, definiţia, şi ecuaţia devine:*

$$\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} - \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = j,$$

care poate fi scrisă echivalent:

$$e^{jz}(1 - j) - e^{-jz}(1 + j) = -2.$$

Notăm din nou $w = e^{jz}$, care satisface:

$$w^2(1 - j) + 2w - (1 + j) = 0$$

care are soluţiile:

$$w_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})(1 + j).$$

Din

$$e^{jz} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3})(1 + j),$$

obţinem

$$jz = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3})(1 + j)\right),$$

şi, deci

$$z_k = \frac{1}{j}\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{3}) + j(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\right] = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - j\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ \ k \in \mathbb{Z},$$

iar din

$$e^{jz} = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})(1+j),$$

obţinem:

$$jz = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3})(1+j)\right),$$

ce implică

$$z_k = \frac{1}{j}\left[\ln\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}) + j(\frac{5\pi}{4}+2k\pi)\right] = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi - j\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Exercitiul 2 *Să se rezolve ecuaţiile:*

1. $\sin z = j$;
2. $\sin z = \cos z$;
3. $\operatorname{th} z = \dfrac{1+j\sqrt{3}}{2}$.