Matematici Speciale - Seminar

Funcţii olomorfe.

Definitie 1 Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime de numere complexe. O funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ se numeşte **funcţie complexă de variabilă complexă** sau pe scurt **funcţie complexă**. Pentru fiecare $z = x + jy \in D$, scriem sub formă algebrică numărul complex $f(z)$ sub forma

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) \tag{1}$$

punând astfel în evidenţă funcţiile reale de două variabile reale

$$u, v : D \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ u = \mathrm{Re}\ f,\ v = \mathrm{Im}\ f.$$

Teorema 1 (***Cauchy-Riemann***) *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, fie $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$ şi fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă, $f = u + jv$.*

*Funcţia f este monogenă în punctul z_0 dacă şi numai dacă funcţiile u şi v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0) şi au loc **condiţiile Cauchy-Riemann***

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} \tag{2}$$

În plus, în acest caz, derivata în z_0 este dată de

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + j\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -j\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + j\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \tag{3}$$

Exemplul 1 *Să se determine punctele în care funcţia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + z\bar{z} - \bar{z}^2 + 2z - \bar{z}$ este monogenă. Să se calculeze derivata sa în punctele găsite.*

Rezolvare:

Pentru $z = x + jy$, prin calcul direct găsim:

$$f(z) = x^2 + y^2 + x + j(4xy + 3y), x, y \in \mathbb{R}.$$

Deci

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 + y^2 + x \\ \\ v(x, y) = 4xy + 3y. \end{cases}$$

Impunând condiţiile Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}u(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}v(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y}u(x, y) = -\dfrac{\partial}{\partial x}v(x, y) \end{cases}$$

este echivalent, deci, cu:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 4x + 3 \\ \\ 2y = -4y. \end{cases}$$

Soluţia sistemului de mai sus este $(x, y) = (-1, 0)$, de unde rezultă că functia f este monogenă doar in punctul $(-1, 0)$.

Derivata funcţiei în acest punct este:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(-1,0) + j\,\frac{\partial v}{\partial x}(-1,0) = -1.$$

Exemplul 2 *Să se determine punctele în care funcţia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $f(x, y) = x^2+axy+by^2+j(cx^2+dxy+y^2)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ este monogenă.*
Rezolvare:

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 + axy + by^2 \\ v(x,y) = cx^2 + dxy + y^2. \end{cases}$$

Derivatele parţiale sunt deci date de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x + ay \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = ax + 2by \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2cx + dy \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = dx + 2y. \end{cases}$$

Punând acum condiţiile Cauchy-Riemann, obţinem:

$$\begin{cases} 2x + ay = dx + 2y \\ ax + 2by = -(2cx + dy). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-d)x + (a-2)y = 0 \\ (a+2c)x + (2b+d)y = 0. \end{cases}$$

Sistemul de mai sus este liniar si omogen, prin urmare dacă:

$$\begin{vmatrix} 2-d & a-2 \\ a+2c & 2b+d. \end{vmatrix} \neq 0$$

sistemul va avea doar soluţia banală $(x, y) = (0, 0)$. In cazul

$$\begin{vmatrix} 2-d & a-2 \\ a+2c & 2b+d. \end{vmatrix} = 0$$

dar rangul matricei sistemului este egal cu 1, sistemul este compatibil nedeterminat, şi vom avea o infinitate de soluţii, iar în aceste puncte funcţia este monogenă.
În cazul $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 2$, sistemul este satisfăcut pentru orice $(x, y) \in \mathbb{C}$, deci funcţia este olomorfă.

Definitie 2 *Fie $D \subseteq \mathcal{C}$ un domeniu. Funcţia $f : D \to \mathcal{C}$ se numeşte* ***olomorfă*** *pe D dacă f este monogenă în fiecare punct din D.*

Teorema 2 (*Teorema Cauchy-Riemann, varianta globală*) *Fie $D \subseteq \mathcal{C}$ un domeniu şi fie funcţia $f : D \to \mathcal{C}$, $f = u + jv$. Dacă u, v admit derivate parţiale pe D şi au loc condiţiile Cauchy-Riemann pe D*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y), \quad \forall\ (x,y) \in D \end{cases} \tag{4}$$

atunci f este olomorfă pe D, $f \in \mathcal{O}(D)$.

Definitie 3 *O funcţie reală de două variabile reale $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***funcţie armonică pe*** *D dacă u admite derivate parţiale de ordinul 2 în raport cu x şi în raport cu y şi dacă*

$$\Delta u = 0,$$

unde prin Δ am notat laplacianul, adică

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5}$$

Teorema 3 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un* ***domeniu simplu conex*** *şi fie $u : D \to \mathbf{R}$ o funcţie reală de clasă C^2 şi armonică pe D.*

Atunci există o funcţie $f \in \mathcal{O}(D)$ astfel încât $u = \mathrm{Re} f$; funcţia f este unic determinată până la o constantă aditivă pur imaginară şi $v = Im\, f$ este dată de

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt, \quad (x,y) \in D, \tag{6}$$

unde $(x_0, y_0) \in D$ este arbitrar ales.

Teorema 4 *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un* ***domeniu simplu conex*** *şi fie $v : D \to \mathbf{R}$ o funcţie reală de clasă C^2 şi armonică pe D.*

Atunci există o funcţie $f \in \mathcal{O}(D)$ astfel încât $v = Im\, f$; funcţia f este unic determinată până la o constantă aditivă reală şi $u = Re\, f$ este dată de

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(t, y_0)\, dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\, dt, \quad (x,y) \in D, \tag{7}$$

unde $(x_0, y_0) \in D$ este arbitrar ales.

În ambele situaţii se determină $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$. Găsim expresia funcţiei f ca funcţie de z dacă punem

$$\begin{cases} x \rightsquigarrow z \\ y \rightsquigarrow 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x \rightsquigarrow 0 \\ y \rightsquigarrow -jz \end{cases} \tag{8}$$

Exemplul 3 *Să se determine punctele în care funcţia* $f : \mathbb{C} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{C} | x = 0\} \mapsto \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + j \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ *satisface condiţiile Cauchy-Riemann.*
Rezolvare:

$$\begin{cases} u(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) \\ \\ v(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

prin urmare:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\frac{-y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

Punând condiţiile C-R obţinem, deci, sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ \\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Prin urmare, funcţia este monogenă pe tot domeniul său de definiţie.

Să îi calculăm derivata pe acest domeniu; cum

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + j\, \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -j\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + j\, \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\right) \tag{9}$$

avem că

$$f'(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Exemplul 4 *Să se arate că funcţia* $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $u(x, y) = e^x \cos y$ *este funcţie armonică.*

Rezolvare.

Trebuie să verificăm condiţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y, \end{cases}$$

şi, mai departe:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y, \end{cases}$$

şi, deci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

prin urmare, funcţia u este armonică.

Exemplul 5 *Se dă funcţia* $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $u(x,y) = e^x \cos y$. *Să se determine funcţia* v *astfel încât funcţia* $f = u + jv$ *să fie olomorfă şi să satisfacă condiţia* $f(0) = 1$.
Rezolvare.
Funcţia u *este armonică, după cum am văzut mai sus, prin urmare există funcţia* v *aşa încât* $f = u + jv$ *este olomorfă.*

Pentru determinarea lui v*, folosim condiţiile Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Avem, deci, derivatele parţiale ale lui v*:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y. \end{cases}$$

Vom da trei metode de aflare a funcţiei necunoscute din condiţiile C-R:

Metoda I.
Integrăm prima ecuaţie din sistemul anterior în raport cu y *şi obţinem:*

$$v(x,y) = e^x \sin y + \varphi(x)$$

unde φ *este o funcţie necunoscută de argument* x. *Pentru a determina* φ*, punem condiţia ca acest* v *să satisfacă şi cea de-a doua relaţie, adică*

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y,$$

adică,

$$e^x \sin y + \varphi'(x) = e^x \sin y$$

de unde obţinem $\varphi'(x) = 0$*, şi deci* $\varphi = c = constant$. *Deci:*

$$f(z) = e^x \cos y + je^x \sin y + jc,\ c \in \mathbb{R}.$$

Din $f(0) = 1$ *rezultă* $c = 0$*, deci*

$$f(z) = e^x \cos y + je^x \sin y.$$

Pentru a obţine expresia funcţiei f *în argumentul* z*, facem trecerea:*

$$\begin{cases} x \longrightarrow z \\[2ex] y \longrightarrow 0 \end{cases}$$

în expresia sa, şi obţinem $f(z) = e^z$.

Metoda II.

Deoarece se cunosc la acest moment derivatele parţiale ale lui v în raport cu ambele variabile, putem scrie diferenţiala funcţiei v:

$$\mathrm{d}v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y = e^x \sin y\,\mathrm{d}x + e^x \cos y\,\mathrm{d}y$$

Cum

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right),$$

rezultă că $\mathrm{d}v(x,y)$ este o diferenţială totală exactă, deci putem obţine funcţia v integrând diferenţiala sa - integrală curbilinie de speţa a II-a - pe un drum convenabil ales, integrala nedepinzând de drum; fie, deci $M_0(x_0,y_0)$ arbitrar dar fixat, si $M(x,y)$ arbitrar. Vom integra $\mathrm{d}v$ între punctele M_0, M_1 pe un drum paralel cu axele de coordonate:

$$M_0(x_0,y_0) \longrightarrow M_1(x,y_0) \longrightarrow M(x,y).$$

Avem, deci:

$$\int_{M_0M} \mathrm{d}v(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{M_0M_1} \mathrm{d}v(x,y) + \int_{M_1M} \mathrm{d}v(x,y).$$

Pe segmentul M_0M_1 avem parametrizarea $x=t$, $t \in [x_0,x]$ iar $y=y_0$, iar pe M_1M, $y=t$, $t\in[y_0,y]$ iar x este fixat. Obţinem, deci:

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} e^t \sin y_0\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} e^x \cos t\,\mathrm{d}t$$

Prin integrare, se obţine:

$$v(x,y) = e^x \sin y_0 - e^{x_0}\sin y_0 + e^x \sin y - e^x \sin y_0 = e^x \sin y - e^{x_0}\sin y_0.$$

Cum M_0 a fost arbitrar ales, putem scrie:

$$v(x,y) = e^x \sin y + C, C \in \mathbb{R},$$

şi $f(x,y) = e^x \cos y + je^x \sin y + jC$, iar determinarea constantei C şi găsirea lui f ca funcţie de z decurge ca la Metoda I.

Metoda III.

Din definiţia derivatei

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + j\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -j\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + j\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \tag{10}$$

şi condiţiile C-R, putem scrie:

$$f'(x,y) = e^x \cos y + je^x \sin y.$$

Facem trecerea:

$$\begin{cases} x \longrightarrow z \\ y \longrightarrow 0 \end{cases}$$

şi obţinem:

$$f'(z) = e^z$$

şi integrând funcţia $f'(z)$ în raport cu z, rezultă că

$$f(z) = e^z + c,\ c \in \mathbb{C},$$

iar constanta $c=0$ o obţinem din condiţia $f(0)=1$.

Exemplul 6 *Se dă funcţia* $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $v(x,y) = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$. *Să se determine funcţia u astfel încât funcţia* $f = u + jv$ *să fie olomorfă şi să satisfacă condiţia* $f(1) = 0$.
Rezolvare.
I. *Trebuie să verificăm ca funcţie v este armonică* **(exerciţiu)**.
II. *Impunem condiţiile C-R; derivatele de ordin I ale lui v sunt:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 1 - \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{cases}$$

şi impunând condiţiile C-R obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 + \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases}$$

Putem scrie, deci:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + j\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + j\,\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Facem, din nou, trecerea:

$$\begin{cases} x \longrightarrow z \\ \\ y \longrightarrow 0 \end{cases}$$

şi obţinem:

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2},$$

prin urmare,

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + c,\ c \in \mathbb{C}.$$

Punem condiţia $f(1) = 0$ *de unde rezultă* $c = -2$; *deci:*

$$f(z) = z + \frac{1}{z} - 2.$$

Exercitiul 1 *Să se determine* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$u(x,y) = ax^2 - y^2 - e^{-by}\sin x$$

să reprezinte partea reală a unei funcţii olomorfe pe $\mathbb{C}$.
Să se determine funcţia olomorfă pentru $a = 1$, $b = \pm 1$.
Rezolvare:
Punem condiţia ca u sĭie funcţie armonică:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{11}$$

Cum

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2ax - e^{-by}\cos x \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y + be^{-by}\sin x \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = 2a + e^{-by}\sin x \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -2 - b^2 e^{-by}\sin x \end{cases}$$

Punând acum condiţia (11), obţinem $2a - 2 = 0$ *şi* $1 - b^2 = 0$, *ceea ce e echivalent cu* $a = 1$ *iar* $b = \pm 1$.

Cazul $a = 1$**,** $b = 1$**:**
Avem, deci, $u = x^2 - y^2 - e^{-y}\sin x$*; punând condiţiile C-R, obţinem:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x - e^{-y}\cos x = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y + e^{-y}\sin x = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Putem scrie acum

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + j\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2x - e^{-y}\cos x + j\,(2y - e^{-y}\sin x)$$

Făcând $x \longrightarrow z$, $y \longrightarrow 0$, *obţinem:*

$$f'(z) = 2z - \cos z - j\,\sin z,$$

ceea ce implică:

$$f(z) = z^2 - \sin z + j\,\cos z + c,\; c \in \mathbb{C}.$$

Cazul $a = 1$**,** $b = -1$ **- exerciţiu**.

Exercitiul 2 *Să se determine funcţia olomorfă a cărei parte reală (imaginară) este dată de:*

1. $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ $(f(0) = 0)$*;*
2. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$*;*
3. $u(x,y) = e^x \sin y + \frac{x}{x^2+y^2}$, $f(\frac{j\pi}{2}) = -\frac{2j}{\pi}$*;*
4. $u(x,y) = e^x[(x^2 - y^2)\cos y - 2xy\sin y]$*;*
5. $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{4(x^2+y^2)}$.