Matematici Speciale - Seminar

Puncte singulare. Teorema fundamentală a lui Cauchy. Formula integrală Cauchy.

1. Puncte singulare

Definitie 1 *Fie E o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f : E \to \mathbb{C}$ o funcţie dată.*

Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte ***punct ordinar pentru*** *f, dacă există un disc deschis centrat în z_0*

$$\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z - z_0| < r\}$$

pe care f este olomorfă.

Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte ***punct singular pentru*** *f dacă z_0 nu este un punct ordinar pentru f, adică f* ***nu este olomorfă pe niciun disc*** *$\Delta(z_0, r)$.*

Definitie 2 *Fie $f : D \to \mathbb{C}$ şi fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular pentru f, punct de acumulare pentru D.*

(i) *z_0 se numeşte* ***singularitate aparentă*** *sau* ***eliminabilă*** *dacă există*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$$

(ii) *z_0 se numeşte* ***pol de ordin*** *$k \in \mathbb{N}^*$* ***pentru*** *f dacă funcţia*

$$g(z) = (z - z_0)^k \cdot f(z)$$

are în z_0 un punct ordinar. Aceasta revine la faptul că

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \text{şi} \quad \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k \cdot f(z) \in \mathbb{C}^*.$$

Ordinulul polului este cel mai mic număr natural nenul k pentru care limita anterioară este finită, nenulă. În situaţia $k = 1$ vom spune că z_0 este ***pol simplu*** *sau* ***pol de ordin*** *1. Dacă $k = 2$, atunci z_0 este* ***pol dublu sau pol de ordin*** *2, iar dacă $k = 3$, atunci vom spune că z_0 este* ***pol triplu sau de ordin*** *3.*

(iii) *z_0 se numeşte* ***punct singular esenţial*** *dacă nu este nici aparent şi nici pol, adică*

$$\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$$

Exercitiul 1 *Să se studieze singularităţile următoarelor funcţii în mulţimea $\mathbb{C}$ şi în punctul ∞.*

1. $f(z) = z^3 + 3z + 1$;
2. $f(z) = \dfrac{z - 2j}{z(z + j)^3(z^2 + 9)^2}$;
3. $f(z) = \dfrac{z^5}{z^2 + (j + 1)z + j}$;
4. $f(z) = e^z$;
5. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$;

6. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Rezolvări:

1. *Funcţia nu are puncte singulare; toate punctele din* $\mathbb{C}$ *sunt ordinare pentru* f *deci* f *este olomorfă pe* $\mathbb{C}$.
Analizând natura punctului $w = 0$ *pentru funcţia* $g(w) = f(\frac{1}{w})$, *obţinem că punctul* ∞ *este pol de ordin* 3.

2. *Găsim punctele singulare ale lui* f *din* $z(z+j)^3(z^2+9)^2 = 0$, *deci acestea sunt* $z = 0$, $z = -j$ *şi* $z = \pm 3j$.
$z = 0$ *este pol simplu,* $z = -j$ *este pol triplu iar* $z = \pm 3j$ *sunt poli dubli.*
Pentru a determina natura punctului ∞, *analizăm funcţia*
$$g(w) = f(\frac{1}{w}) = \frac{\frac{1}{w} - 2j}{\frac{1}{w}(\frac{1}{w}+j)^3(\frac{1}{w^2}+9)^2} = \frac{w^7(1-2jw)}{(1+wj)^3(1+9w^2)^2}$$
$w = 0$ *este punct ordinar pentru funcţia* g, *prin urmare punctul* ∞ *este ordinar pentru funcţia* f.

3. *- exerciţiu.*

4. *Funţia nu are puncte singulare pe* $\mathbb{C}$. *Punctul* ∞ *este singularitate esenţială.*

5. *Funcţia are punctul singular* $z = 0$, *şi cum*
$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$
acesta este singularitate aparentă.
Natura punctului ∞ *o aflăm prin analiza funcţiei:*
$$g(w) = f(\frac{1}{w}) = w \sin \frac{1}{w},$$
pentru care $w = 0$ *este singularitate esenţială, şi deci punctul* ∞ *este singularitate esenţială pentru* f.

6. *Punctul* $z = 0$ *este punct singular izolat pentru* $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. *Evaluăm*
$$\lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}.$$
Cum
$$f(z) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left(\cos \frac{y}{x^2+y^2} + j \sin \frac{y}{x^2+y^2} \right),$$
avem că
$$\begin{cases} Ref = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \\ Imf = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$
Pentru a calcula limita funcţiilor de mai sus cu $(x, y) \to (0, 0)$, *alegem două siruri diferite cu limita* $(0, 0)$ *pentru* $n \to \infty$, *pe care funcţia are limite diferite. De exemplu* $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0) \to (0, 0)$ *şi respectiv* $(x'_n, y'_n) = (-\frac{1}{n}, 0) \to (0, 0)$. *Avem:*
$$\lim_{n \to \infty} Ref(-\frac{1}{n}, 0) = \lim_{n \to \infty} e^{-n} = 0,$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} Ref(\frac{1}{n},0) = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty.$$

Rezultă deci

$$\nexists \lim_{z\to 0} f(z)$$

şi deci $z=0$ este singularitate esenţială pentru f.
Punctul ∞ este punct ordinar pentru f.

2. Integrala în complex

Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, fie curba simplă, netedă (de clasă C^1) $\gamma : [\,a,b\,] \to D$ inclusă în D, definită parametric prin

$$(\gamma)\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [\,a,b\,] \end{cases} \tag{1}$$

şi fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă, $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$.

Definim **integrala curbilinie în planul complex**

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma [u(x,y)+jv(x,y)]\cdot[dx+jdy] = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + j\int_\gamma v\,dx + u\,dy \tag{2}$$

Observaţie. Integrala (2) se poate calcula în două moduri:
(i) calculând cele două integrale curbilinii reale,
(ii) transformând-o într-o integrală definită Riemann, scriind curba parametric în $\mathbb{C}$

$$(\gamma)\ z = z(t), \quad t \in [\,a,b\,]. \tag{3}$$

Atunci

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt \tag{4}$$

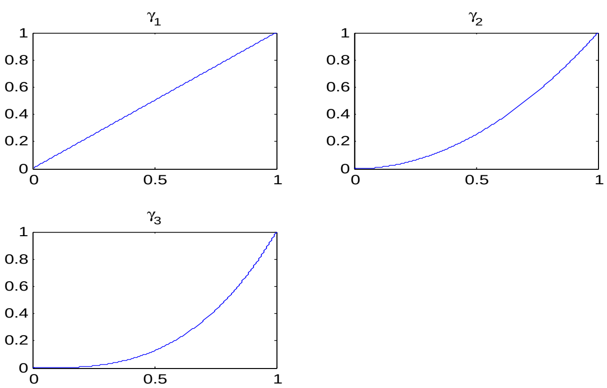
Exercitiul 2 *Fie trei arce de curbă γ_k, $k=1,2,3$ cu capetele O şi $A(z=1+j)$. Să se calculeze integralele:*

$$I_k = \int_{\gamma_k} (x^2+jy)dz,\ k=1,2,3$$

considerând curbele suport ale celor 3 arce date prin:

$$(a)\, y = x, \quad (b)\, y = x^2 \quad (c)\, y = x^3.$$

Rezolvare:



Ecuaţiile parametrice ale celor 3 arce sunt:

$$(\gamma_1)\ \begin{cases} x = t, \\ y = t, \quad t \in [0,1],. \end{cases}$$

deci $z(t) = t + j\,t$, $z'(t) = 1 + j$,

$$(\gamma_2)\ \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \quad t \in [0,1], \end{cases}$$

şi $z(t) = t + j\,t^2$, $z'(t) = 1 + 2tj$,

$$(\gamma_3)\ \begin{cases} x = t, \\ y = t^3, \quad t \in [0,1], \end{cases}$$

şi $z(t) = t + j\,t^3$, $z'(t) = 1 + 3t^2 j$.
Prin urmare:

$$I_1 = \int_0^1 (t^2 + jt)(1+j)\,\mathrm{d}t = ... = (1+j)(\frac{1}{3} + \frac{j}{2}),$$

$$I_2 = \int_0^1 (t^2 + jt^2)(1 + 2jt)\,\mathrm{d}t = ... = (1 + j)(\frac{1}{3} + \frac{j}{2}),$$

$$I_3 = \int_0^1 (t^2 + jt^3)(1 + 3t^2 j)\,\mathrm{d}t = ...$$

Teorema 1 (***Teorema fundamentală Cauchy pe <u>domenii simplu conexe</u>***)
Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomofă (şi cu f' continuă) pe un domeniu simplu conex D. Atunci

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \tag{5}$$

pe orice curbă γ închisă, simplă şi netedă sau netedă pe porţiuni inclusă în D.

Teorema 2 (***Teorema fundamentală Cauchy pe <u>domenii multiplu conexe</u>***) *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu multiplu conex de ordin de conexitate $p + 1$ şi $\Delta \subseteq D$ un domeniu multiplu conex de acelaşi ordin de conexitate, mărginit de curba γ- exterioară şi de curbele $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$- interioare. Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomofă (şi cu f' continuă) pe un domeniul D. Atunci atunci integrala lui f pe frontiera exterioară a lui Δ este egală cu suma integralelor lui f pe frontierele interioare ale lui Δ:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_p} f(z)\,dz \tag{6}$$

Teorema 3 (***Formula integrală a lui Cauchy pe <u>domenii simplu conexe</u>***)
Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomofă pe un domeniu simplu conex D şi fie γ o curbă închisă, simplă şi netedă ce mărgineşte un domeniu $\Delta = Int(\gamma) \subseteq D$.
(i) Atunci pentru orice punct $a \in Int(\gamma)$ are loc

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\,dz. \tag{7}$$

(ii) Funcţia olomorfă f admite derivate de orice ordin şi are loc

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall\ a \in Int(\gamma). \tag{8}$$

<u>Reţinem</u> că dacă f este olomorfă pe domeniul simplu conex mărginit de γ şi $a \in \mathrm{Int}(\gamma)$ atunci

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\,dz = 2\pi j \cdot f(a) \tag{9}$$

şi

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi j}{n!} \cdot f^{(n)}(a), \quad n \in \mathbf{N}^*. \tag{10}$$

Exercitiul 3 *Să se calculeze integrala:*

$$I = \int_\gamma z\,\mathrm{d}z, \quad (\gamma) : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Rezolvare:
Curba (γ) *se scrie echivalent în forma:*

$$(\gamma) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

şi reprezintă cercul de centru $C(1,1)$ *şi raza* $R = \sqrt{2}$. *Dacă aplicăm metoda de la exerciţiul precedent, putem folosi parametrizarea cercului:*

$$(\gamma) \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos t, \\ \\ y = 1 + \sqrt{2}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi), \end{cases}$$

şi, deci:

$$(\gamma) : \quad z(t) = 1 + \sqrt{2}\cos t + j\left(1 + \sqrt{2}\sin t\right),$$

iar

$$z'(t) = -\sqrt{2}\sin t + j\sqrt{2}\cos t.$$

Integrala devine deci

$$I = \int_0^{2\pi} \left[1 + \sqrt{2}\cos t + j\left(1 + \sqrt{2}\sin t\right)\right]\left[-\sqrt{2}\sin t + j\sqrt{2}\cos t\right] \mathrm{d}t.$$

Vom obţine $I = 0$.

Observaţie: *Putem folosi alternativ parametrizarea:*

$$(\gamma) : \; z = (1+j) + \sqrt{2}e^{j\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

şi urmăm aceeaşi cale ca mai sus.

Observaţie: *O altă metodă constă în aplicarea teoremei fundamentale a lui Cauchy: Remarcând că funcţia* $f(z) = z$ *este olomorfă iar* γ *este curbă simplă, închisă şi netedă, obţinem* $I = 0$.

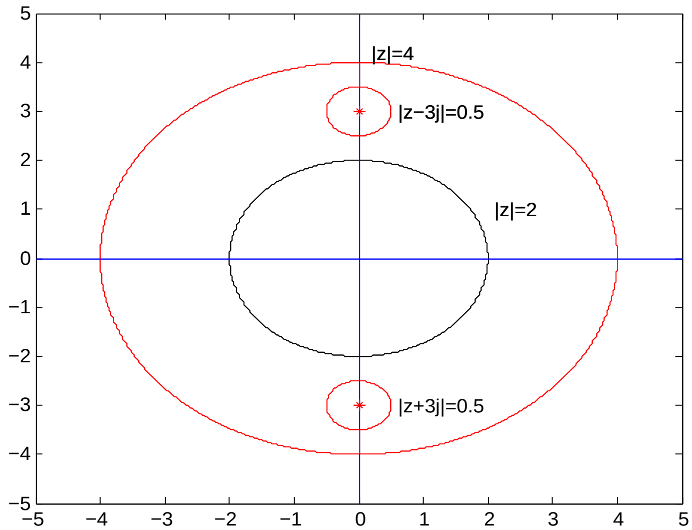
Exercitiul 4 *Să se calculeze integrala:*

$$I = \int_{|z|=R} \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z, \quad R \in (0, \infty) \setminus \{3\}.$$

Rezolvare.
Observăm că funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9}$$

are doi poli simpli în $z = 3j$ *respectiv* $z = -3j$.



Cazul $R < 3$. *Conform teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe* $I = 0$.

Cazul $R > 3$. *În acest caz, polii funcţiei* f *se află în interiorul curbei închise* γ. *Vom considera cercurile:*

$$(\gamma_1): \ z - 3j = r_1 e^{j\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

respectiv

$$(\gamma_2): \ z + 3j = r_2 e^{j\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

cu r_1 *şi* r_2 *suficient de mici.*
Conform teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii triplu conexe, putem scrie:

$$I = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z.$$

Avem, descompunând în fracţii simple:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6j}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-3j}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{6j}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z+3j}\,\mathrm{d}z$$

şi, similar:

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6j}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-3j}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{6j}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+3j}\,\mathrm{d}z.$$

Cum

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z+3j}\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-3j}\,\mathrm{d}z = 0,$$

şi cum

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-3j}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{r_1 j e^{j\theta}}{r_1 e^{j\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi j$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+3j}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{r_2 j e^{j\theta}}{r_2 e^{j\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi j,$$

obţinem:

$$I = \frac{1}{6j}\cdot 2\pi j - \frac{1}{6j}\cdot 2\pi j = 0.$$

O altă metodă utilizează formula integrală a lui Cauchy şi nu necesită descompunerea în fracţii simple:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{|z-3j|=r_1} \frac{\frac{1}{z+3j}}{z-3j}\,\mathrm{d}z = 2\pi j f_1(3j) == 2\pi j \frac{1}{6j}$$

unde $f_1(z) = \dfrac{1}{z+3j}$ *este olomorfă în* $Int(\gamma_1)$.

Analog

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{|z+3j|=r_2} \frac{\frac{1}{z-3j}}{z+3j}\,\mathrm{d}z = 2\pi j f_2(-3j) = 2\pi j \frac{1}{-6j}$$

unde $f_2(z) = \dfrac{1}{z-3j}$ *este olomorfă în* $Int(\gamma_2)$.

În concluzie

$$I == 2\pi j[\frac{1}{6j} + \frac{1}{-6j}] = 0.$$

Exercitiul 5 *Să se calculeze integralele:*

1)

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z \qquad (\gamma_1):\ |z| = \frac{1}{2};$$

2)

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z \qquad (\gamma_2):\ x^2+8y^2-2=0;$$

3)

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z \qquad (\gamma_3):\ 8x^2+y^2-2=0;$$

4)

$$I_3 = \int_{\gamma_4} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z \qquad (\gamma_4):\ |z| = 2;$$

Rezolvare:
Funcţia

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$$

are în $z=\pm 1$ doi poli simpli iar $z=\pm j$ sunt poli dubli pentru f.

1. *Deoarece f este olomorfă pentru $|z| \le \frac{1}{2}$ iar γ_1 este curba simplă închisă şi netedă, conform teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe, avem că $I_1 = 0$.*

2. *Curba γ_2 se poate rescrie ca:*

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

deci reprezintă elipsa cu centrul in O şi de semiaxe $\sqrt{2}$ şi $\frac{1}{2}$. În interiorul lui γ_2 se află doar polii $z=\pm 1$ (pentru $x=\pm 1$ şi $y=0$, se observă că $\dfrac{1}{2} + \dfrac{0}{\frac{1}{4}} < 1$; similar pentru $x=0$ şi $y=\pm 1$).

Putem scrie atunci

$$I_2 = \int_{C_1} \frac{\frac{e^{jz}}{(z-1)(z^2+1)^2}}{z+1}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{\frac{e^{jz}}{(z+1)(z^2+1)^2}}{z-1}\,\mathrm{d}z.$$

cu C_1, C_2 cercuri de rază suficient de mică astfel încât să fie în interiorul curbei γ_2.

$$C_1:\ |z+1| = r_1, \quad C_2:\ |z-1| = r_2.$$

Aplicăm formula integrală a lui Cauchy pentru fiecare din cele două integrale şi obţinem:

$$I_2 = \int_{C_1} \frac{\frac{e^{jz}}{(z-1)(z^2+1)^2}}{z+1}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{\frac{e^{jz}}{(z+1)(z^2+1)^2}}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi j f_1(-1) + 2\pi j f_2(1),$$

unde

$$f_1(z) = \frac{e^{jz}}{(z-1)(z^2+1)^2} \quad \text{este olomorfă în } Int(C_1)$$

$$f_2(z) = \frac{e^{jz}}{(z+1)(z^2+1)^2} \quad \text{este olomorfă în } Int(C_2).$$

Deci

$$I_2 = 2\pi j\left(\frac{e^{-j}}{-8} + \frac{e^{j}}{8}\right) = \pi j \frac{e^{j}-e^{-j}}{4} = \frac{\pi j}{4}\cdot 2j\sin 1 = -\frac{\pi \sin 1}{2}.$$

3. *În acest caz doar punctele $\pm j$ se află în interiorul curbei γ_3. Aplicăm din nou teorema fundamentală a lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe şi apoi formula integrală a lui Cauchy:*

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{C_1} \frac{\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z+j)^2}}{(z-j)^2}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z-j)^2}}{(z+j)^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{2\pi j}{1!} f_3'(j) + \frac{2\pi j}{1!} f_4'(-j), \end{aligned}$$

cu

$$\begin{aligned} f_3(z) &= \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z+j)^2} \quad \text{este olomorfă în } Int(C_1) \\ f_4(z) &= \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z-j)^2} \quad \text{este olomorfă în } Int(C_2). \end{aligned}$$

4. *γ_4 reprezintă cercul de rază $R = 2$, deci toţi polii funcţiei f se află în interiorul curbei. Putem deci scrie, cu ajutorul teoremei fundamentale a lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe, că:*

$$I_4 = I_2 + I_3.$$

Exercitiul 6 *Să se calculeze integrala:*

$$I = \int_\gamma \frac{\sin z}{z^3 - 1}\,\mathrm{d}z, \qquad (\gamma): \;\; x^2 + y^2 + 2x = 0. \tag{11}$$

Rezolvare: *Scriem γ în mod echivalent sub forma:*

$$(\gamma): \;\; (x-1)^2 + y^2 = 1$$

deci γ este cercul de centru $(1, 0)$ şi rază 1.
Să găsim acum soluţiile ecuaţiei

$$z^3 = 1 (= 1(\cos 0 + j\ \sin 0)).$$

Avem, deci punctele singulare, poli simpli,

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + j\sin\frac{2k\pi}{3}, \;\; k = 0, 1, 2.$$

Observăm că $z_0 = 1$ - se află în interiorul cercului;
$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ *- nu se află în interiorul cercului;*
$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ *- nu se află în interiorul cercului;*
Obţinem, deci:

$$I = \int_\gamma \frac{\sin z}{z^3 - 1}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\frac{\sin z}{z^2+z+1}}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi j f(1)$$

unde

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 + z + 1}.$$

În concluzie

$$I = 2\pi j \frac{\sin 1}{3}.$$

Exercitiul 7 *Să se calculeze următoarele integrale:*

1.

$$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z^3 - 8}\,\mathrm{d}z, \qquad (\gamma): \;\; x^2 + y^2 - 12x = 0.$$

2.

$$I = \int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,\mathrm{d}z, \quad (\gamma) : |z| = 2;$$

3.

$$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{(2z - j\pi)(z^2+8)}\,\mathrm{d}z,$$

unde γ *este pătratul* $ABCD$ *parcurs astfel* $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D$, *cu* $A(2+2j)$, $B(-2+2j)$, $C(-2-2j)$, $D(2-2j)$.

4.

$$I = \int_\gamma \frac{e^{2z}}{z^2+3z-28}\,\mathrm{d}z, \quad (\gamma) : x^2 + 5y^2 - 25 = 0;$$