Dezvoltarea în serie Taylor. Dezvoltarea în serie Laurent.

Serii de puteri

Fie $a \in \mathbb{C}$. Se numeşte **serie de puteri** ale lui $z-a$ o serie de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \tag{1}$$

unde $c_n \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Observaţie. Mulţimea de convergenţă a seriei de puteri ale lui $z-a$ este cel puţin discul deschis $\Delta(a,R)$ de centru a şi rază R. Pentru z situat pe cercul $|z-a| = R$ se studiază separat convergenţa seriei.

Rază de convergenţă se determină după formula

$$R = \frac{1}{\ell}, \qquad \ell = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{2}$$

cu convenţia $R = 0$ dacă $\ell = +\infty$ şi $R = +\infty$ dacă $\ell = 0$.

Avem şi

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \tag{3}$$

dacă acestea există.

Serii Taylor

Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii olomorfe $f : D \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, D- simplu conex, în jurul punctului $a \in D$:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots, \quad \forall\ z,\ \text{cu } |z-a| < R. \tag{4}$$

Exemple:

1. $f(z) = e^z$ în interiorul unui cerc cu centrul în $a = 0$.
Deoarece $f(z) = e^z$ este olomorfă în tot planul complex şi $f^{(n)}(z) = e^z$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, putem dezvolta $f(z)$ în serie Taylor pe orice disc centrat într-un punct $a \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^a \left[1 + \frac{z-a}{1!} + \frac{(z-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!} + \ldots\right], \quad \forall\ z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

În particular, cum $f^{(n)}(0) = 1$, găsim dezvoltarea în serie Taylor

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall\ z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

2. $f(z) = \sin z$, $f(z) = \cos z$ într-o vecinătate a originii.
Putem folosi definiţiile

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j},$$
$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2},$$

şi folosim dezvoltările funcţiilor e^{jz} respectiv e^{-jz} în vecinătatea originii:

$$e^{jz} = 1 + \frac{jz}{1!} + \frac{(jz)^2}{2!} + \ldots + \frac{(jz)^n}{n!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jz)^n}{n!}$$

$$e^{-jz} = 1 + \frac{-jz}{1!} + \frac{(-jz)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-jz)^n}{n!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-jz)^n}{n!}.$$

În plus:

$$j^n + (-j)^n = \begin{cases} 0, \;\; n = 2k+1, \\ \\ 2(-1)^k, \;\; n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Obţinem astfel:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \;\; z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

3. Seria binomială:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \qquad |z| < 1. \tag{7}$$

4. Seria geometrică alternantă: (vezi curs)

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \;\; \text{pentru } |z| < 1, \tag{8}$$

5. Seria geometrică:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \;\; \text{pentru } |z| < 1, \tag{9}$$

Exercitiul 1 *Să se dezvolte în serie Taylor în vecinătatea originii şi în vecinătatea punctului $a = 1$ funcţia:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}.$$

Rezolvare:

Funcţia f este olomorfă pe întreg planul cu excepţia punctelor $z = \pm j$ care sunt poli simpli pentru f. Conform teoremei Taylor, funcţia poate fi dezvoltată in serie de puteri pe orice disc din planul complex ce nu conţine polii funcţiei.

Pentru a dezvolta in serie Taylor în jurul lui $a = 0$, vom considera un disc de raza $R < 1$, unde funcţia f este este olomorfă; atunci putem considera $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ ca suma unei serii geometrice de raţie $-z^2$ - subunitară în modul. Deci putem scrie:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Raza de convergenţă a seriei de mai sus este $R = 1$. Geometric $R = 1$ reprezintă distanţa de la centrul discului $a = 0$ până la punctele singulare $\pm j$, astfel încât $|z| < 1$ reprezintă discul deschis de centru 0 şi de rază maximă pe care f este olomorfă.

În cazul $a = 1$, putem dezvolta f în serie Taylor pe un disc centrat în 1 şi de rază maximă

$$\sqrt{2} = |1 - (\pm j)| = dist(1; \pm j).$$

Observăm că putem scrie, descompunând în fracţii simple:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{z-j} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{z+j}.$$

Folosind derivata de ordin n a funcţiei $g(z) = \dfrac{1}{z-a}$:

$$\begin{aligned}
&g'(z) = -\frac{1}{(z-a)^2} \\
&g''(z) = \frac{2}{(z-a)^3} \\
&\cdots\cdots \\
&g^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{n!}{(z-a)^{n+1}}
\end{aligned}$$

putem scrie pe discul $|z-1| < \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-j} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-j)^{n+1}} (z-1)^n \\
\frac{1}{z+j} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+j)^{n+1}} (z-1)^n.
\end{aligned}$$

O altă metodă constă în utilizarea seriei geometrice de raţie $z-1$. Pentru aceasta forţăm la numitor expresia $z-1$ astfel:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-j} &= \frac{1}{z-1+1-j} = \frac{1}{1-j} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{z-1}{1-j}} = \frac{1}{1-j} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{1-j}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1-j)^{n+1}} (z-1)^n, \quad \left|\frac{z-1}{1-j}\right| < 1 \ \Leftrightarrow |z-1| < |1-j| = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Analog, vom scrie

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+j} &= \frac{1}{z-1+1+j} = \frac{1}{1+j} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{z-1}{1+j}} = \frac{1}{1+j} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{1+j}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(1+j)^{n+1}} (z-1)^n, \quad \left|\frac{z-1}{1+j}\right| < 1 \ \Leftrightarrow |z-1| < |1+j| = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Urmează că

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{(1-j)^{n+1}} - \frac{1}{(1+j)^{n+1}}\right) (z-1)^n \tag{10}$$

Putem scrie acum, folosind:

$$\begin{aligned}
1-j &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{j\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
1+j &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

că

$$\frac{1}{(1-j)^{n+1}}-\frac{1}{(1+j)^{n+1}}=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}\frac{(e^{j\frac{\pi}{4}})^{n+1}-(e^{-j\frac{\pi}{4}})^{n+1}}{(e^{j\frac{\pi}{4}})^{n+1}(e^{-j\frac{\pi}{4}})^{n+1}}=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}\left(e^{j\frac{(n+1)\pi}{4}}-e^{-j\frac{(n+1)\pi}{4}}\right).$$

Înlocuind în (10) şi folosind definiţia funcţiei sin, *obţinem:*

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{2^{(n+1)/2}}(z-1)^n.$$

Exercitiul 2 *Să se dezvolte în serie Taylor:*

1. $z^2\sin z$;
2. $\cos^2 z$.

Exercitiul 3 *Pentru următoarele serii de puteri, să se determine mulţimile de convergenţă şi funcţiile sumă:*

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$;

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$;

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$;

iv) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n+1}$.

Rezolvare:
i) Cunoscând suma seriei geometrice de raţie subunitară

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n,\ \ |z|<1,$$

putem scrie, aplicând teorema de derivabilitate termen cu termen a unei serii de puteri:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1},\ \ |z|<1.$$

Înmulţind ultima relaţie cu z, obţinem:

$$\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n,\ \ |z|<1.$$

ii) Integrăm termen cu termen seria geometrică

$$\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n,\quad |w|<1$$

pe orice curba arbitrară ce uneşte 0 şi z şi inclusă în discul unitate (domeniu pe care suma seriei este olomorfă):

$$\int_0^z\frac{\mathrm{d}w}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z w^n\,\mathrm{d}w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}.$$

Alegem determinarea principală a logaritmului, care verifică $\ln 1 = 0$ *şi găsim:*

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

iii)- exerciţiu.
iv) Raza de convergenţă este $R = 1$*. Fie* f *suma seriei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

Înmulţim ambii membri cu z*:*

$$zf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

Prin derivare obţinem:

$$(zf(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}, \quad |z| < 1.$$

Integrând acum egalitatea obţinută pe o curba ce uneşte originea cu un punct arbitrar z*,*

$$zf(z) = \operatorname{arctg} z,$$

şi deci

$$f(z) = \frac{\operatorname{arctg} z}{z}, \quad |z| < 1,\ z \neq 0.$$

Pentru $z = 0$ *avem evident* $f(0) = 1 = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} z}{z}$.

În concluzie

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} z}{z}, & |z| < 1,\ z \neq 0 \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

Serii Laurent.

Teorema 1 *Fie cercurile concentrice*

$$\gamma_1 : |z-a| = r, \quad r \in [0, +\infty)$$

şi

$$\gamma_2 : |z-a| = R, \quad R \in (0, +\infty]$$

cu $r < R$ *şi fie* Δ*- coroana circulară deschisă cuprinsă între ele,*

$$\Delta = \{z \mid r < |z-a| < R\} \text{ şi } \overline{\Delta} = \Delta \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 = \{z \mid r \le |z-a| \le R\}$$

Fie D *un domeniu multiplu conex astfel încât* $\overline{\Delta} \subseteq D$ *şi fie* $f : D \to \mathbb{C}$ *olomorfă pe* D*.*
Atunci, are loc dezvoltarea în ***serie Laurent*** *a funcţiei* f *pe coroana* Δ*:*

$$f(z) = \underbrace{\ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a}}_{\text{partea principală}} + \underbrace{c_0 + c_1(z-a) + \ldots + +c_n(z-a)^n + \ldots}_{\text{partea regulată}}, \quad r < |z-a| < R, \tag{11}$$

unde coeficienţii sunt daţi de:

$$c_k = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

şi $r < \rho < R$.

O serie Laurent este suma a două serii de puteri:

(i) o serie în puterile pozitive ale lui $z - a$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \tag{13}$$

convergentă pentru $|z - a| < R$ şi numită **partea tayloriană** sau **partea regulată**;

(ii) o serie în puterile negative ale lui $z - a$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k = \ldots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \ldots + c_{-2}(z-a)^{-2} + c_{-1}(z-a)^{-1} \tag{14}$$

convergentă pentru $|z - a| > r$, numită **partea principală**. Ea este tot o serie de puteri, anume ale variabilei $w = 1/(z - a)$.

Putem scrie pe scurt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \quad r < |z-a| < R \tag{15}$$

Exercitiul 4 *Fie funcţia*

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}.$$

Sa se dezvolte $f(z)$ *în serie Laurent*

a) în jurul punctului $a = 1$*;*

b) în exteriorul discului închis $\{z \in \mathbb{C};\ |z-1| \leq 2\}$.

Rezolvare:
Funcţia f *are un pol simplu în* $z = -1$ *şi un pol triplu în* $z = 1$.
a)Considerăm domeniul maximal de olomorfie a funcţiei în jurul singularităţii $a = 1$ *şi obţinem discul punctat*

$$0 < |z-1| < 2.$$

Izolăm singularitatea $a = 1$ *scriind*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} \cdot g(z) \quad cu \quad g(z) = \frac{z}{z+1}$$

şi dezvoltăm $g(z)$ *în serie Taylor în jurul punctului* $z_0 = 1$ $\left(\frac{1}{(z-1)^3}\right.$ *fiind putere a lui* $z - 1$)*:*

$$g(z) = \frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1} = 1 - \frac{1}{2+(z-1)} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}}.$$

Cum $|z-1|<2$, *putem scrie ultima fracţie ca suma unei serii geometrice de raţie* $-\dfrac{z-1}{2}$*:*

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}-\ldots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}\ldots$$

$g(z)$ *devine, deci:*

$$g(z)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=1-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n},\quad |z-1|<2$$

şi, înlocuind în $f(z)$*, găsim dezvoltarea acesteia în serie Laurent pe coroana circulară considerată:*

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{2^4}-\frac{z-1}{2^5}+\frac{(z-1)^2}{2^6}-\ldots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+4}}\ldots,\quad 0<|z-1|<2$$

Partea prinicpală a dezvoltării conţine un număr finit de termeni, cea mai mică putere este -3*,* 3 *fiind ordinul polului în jurul căruia s-a făcut dezvoltarea.*

b) Pentru $|z-1|>2$ *scriem:*

$$g(z)=\frac{z}{1+z}=1-\frac{1}{2+(z-1)}=1-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}.$$

Cum $|z-1|>2$*, rezultă că* $\left|\dfrac{2}{z-1}\right|<1$ *şi, deci, putem scrie ultima fracţie ca suma unei serii geometrice de raţie* $\dfrac{2}{z-1}$*:*

$$g(z)=\frac{z}{1+z}=1-\frac{1}{z-1}\left(1-\frac{2}{z-1}+\frac{2^2}{(z-1)^2}-\ldots+(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^n}\ldots\right)$$

Se obţine astfel dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$*:*

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^3}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{2}{(z-1)^5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^n}{(z-1)^{n+4}}\ldots$$

pentru orice z *ce satisface* $|z-1|>2$.

Exercitiul 5 *Să se reprezinte ca serie de puteri funcţia:*

$$f(z)=\frac{2z^2+3z-1}{z^3+z^2-z-1},$$

în jurul punctelor $a=0$ *şi* $a=-1$.

Rezolvare: *Scriem mai întâi funcţia* $f(z)$ *în mod echivalent:*

$$f(z)=\frac{2z^2+3z-1}{z^3+z^2-z-1}=\frac{2z^2+3z-1}{z^2(z+1)-(z+1)}=\frac{2z^2+3z-1}{(z-1)(z+1)^2}$$

şi descompunem în fracţii simple:

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}.$$

Funcţia are doi poli: $z_1 = 1$ *-pol simplu şi* $z_2 = -1$ *- pol dublu.*
Considerând discul deschis $|z| < 1$*, acesta este inclus în domeniul de olomorfie a lui* f *şi deci putem dezvolta în serie Taylor în jurul originii pe discul respectiv:*

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$
$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Din ultima egalitate, prin derivarea seriei termen cu termen, deducem:

$$-\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}, \quad |z| < 1.$$

Putem deci scrie funcţia $f(z)$ *pe discul centrat în* $a = 0$, $|z| < 1$ *ca suma unei serii Taylor:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-1 + (-1)^n + (-1)^n n\right] z^n, \quad |z| < 1.$$

Pentru dezvoltarea în jurul punctului $a = -1 = z_2$*, considerăm domeniul maximal din jurul lui* -1 *pe care funţia este olomorfă,* $0 < |z+1| < 2$*, unde putem scrie:*

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z+1)-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}},$$

şi cum pe domeniul considerat $\left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$*, putem scrie:*

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2}\right)^n.$$

Prin urmare:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z+1)^n,$$

pe coroana circulară considerată.
Observăm că partea principală a seriei Laurent are un număr finit de termeni, $c_{-2} = 1 \neq 0$ *fapt ce confirmă că* 2 *este ordinul de multiplicitate al polului* $z_2 = -1$ *pentru funcţia* f.

Exercitiul 6 *Să se scrie funcţia*

$$f(z) = \frac{2 + \pi j}{(z + \pi j)(z - 2)}$$

ca serie de puteri în:

a) discul $|z| < 2$*;*

b) coroana circulară $2 < |z| < \pi$*;*

c) jurul punctului $\infty : \ |z| > \pi$.

Exercitiul 7 *Să se dezvolte funcţia*

$$f(z) = \frac{z^2 + 3z + 2}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

într-o serie de puteri în jurul punctelor $0, 1, 2, 3j$ *precizând domeniile pe care au loc dezvoltările. Apoi să se dezvolte funcţia pe domeniul* $|z| > 3$.