Matematici Speciale - Seminar

Teorema reziduurilor.

Definitie 1 *Numărul complex* c_{-1} *care reprezintă coeficientul lui* $\frac{1}{z-a}$ *din dezvoltarea Laurent pe discul punctat* $0 < |z-a| < R$ *se numeşte* ***reziduul** funcţiei* f *în punctul* a *şi se notează*

$$\mathrm{Rez}\,(f,a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz, \quad 0 < \rho < R. \tag{1}$$

Exercitiul 1 *Să se determine reziduurile funcţiei*

$$f(z) = z^k e^{\frac{1}{z}}, \;\; k \in \mathbb{Z},$$

în punctele singulare izolate ale sale.

Rezolvare:
Vom dezvolta funcţia în serie Laurent în jurul punctului $a = 0$ care este singularitate esenţială pentru funcţia $e^{\frac{1}{z}}$; cum, într-o vecinătate a lui 0 putem scrie

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

trecând pe w în $\frac{1}{z}$ obţinem dezvoltarea în serie Laurent

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}, \;\; |z| > 0.$$

Înmulţim acum ambii membri cu z^k, si găsim:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-k}}, \;\; |z| > 0.$$

Observăm că partea principală a seriei de mai sus are o infinitate de termeni indiferent de valoarea lui k, deci $a = 0$ este singularitate esenţială izolată pentru $f(z)$.

Prin definiţie, reziduul funcţiei este atunci coeficientul c_{-1} al lui $\frac{1}{z}$ din seria Laurent a funcţiei, care se obţine pentru $n = k + 1$.
Deoarece $n > 0$, pentru $k < -1$, coeficientul respectiv este 0, iar pentru $k \geq -1$, acesta este $\frac{1}{(k+1)!}$.
Prin urmare:

$$\mathrm{Rez(f,0)} = \begin{cases} 0, & k < -1 \\ \\ \dfrac{1}{(k+1)!}, & k \geq -1. \end{cases}$$

Reziduul unei funcţii f într-un punct singular a se determină astfel:

- Dacă $z = a$ este **punct singular aparent** atunci

$$\text{Rez}\,(f, a) = c_{-1} = 0 \tag{2}$$

- Dacă $z = a$ este **pol simplu** atunci

$$\text{Rez}\,(f, a) = c_{-1} = \lim_{z \to a} ((z - a) \cdot f(z)) \tag{3}$$

- Dacă $z = a$ este **pol simplu** pentru o funcţie de forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

atunci reziduul în punctul a se poate calcula şi cu formula

$$\text{Rez}\,(f, a) = \left. \frac{g(z)}{h'(z)} \right|_{z=a} = \frac{g(a)}{h'(a)} \tag{4}$$

- Dacă $z = a$ este **pol de ordin** k atunci

$$\text{Rez}\,(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \left((z - a)^k \cdot f(z) \right)^{(k-1)} \tag{5}$$

- Dacă $z = a$ este **punct singular esenţial** atunci

$$\text{Rez}\,(f, a) = c_{-1} \;\; \text{se citeşte din dezvoltarea Laurent în domeniul } 0 < |z - a| < R. \tag{6}$$

Exercitiul 2 *Să se determine reziduurile funcţiilor:*

- $f_1(z) = \dfrac{z}{z^3 - 1}$;
- $f_2(z) = \dfrac{z}{(z + j)(z - 1)^3}$.

Teorema 1 (***Teorema reziduurilor***)

Fie γ o curbă simplă, închisă, fie punctele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Int(\gamma)$. Fie

$$f : \gamma \cup Int(\gamma) \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to \mathbb{C}$$

o funcţie olomorfă pe domeniul $Int(\gamma) \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (punctele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt puncte singulare izolate pentru f).

Atunci are loc formula:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \text{Rez}\,(f, a_k) \tag{7}$$

Teorema 2 (***Teorema semireziduurilor***)

Fie γ o curbă simplă, închisă şi netedă, şi fie $a_1, a_2 \ldots, a_n \in Int(\gamma)$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \gamma$. Fie

$$f : (\gamma \cup Int(\gamma)) \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m\} \to \mathbb{C}$$

o funcţie olomorfă având

1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *puncte singulare izolate situate în interiorul curbei, Int*(γ)

2) $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *poli simpli situaţi pe curba* γ.

Atunci are loc formula:

$$v.p. \int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \text{Rez}\,(f, a_k) + \pi j \sum_{l=1}^{m} \text{Rez}\,(f, b_l) \tag{8}$$

Exercitiul 3 *Să se calculeze integralele:*

$$I_k = \int_{\gamma_k} \frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\, \mathrm{d}z, \tag{9}$$

unde

$$\begin{aligned}
&(\gamma_1)\ |z| = \frac{1}{2},\\
&(\gamma_2)\ x^2 + 8y^2 - 2 = 0,\\
&(\gamma_3)\ 8x^2 + y^2 - 2 = 0,\\
&(\gamma_4)\ |z| = 5.
\end{aligned}$$

Rezolvare:
Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm j\} \mapsto \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{e^{jz}\, \mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^2+1)^2},$$

este olomorfă. Punctele $a = \pm 1$ *sunt poli simpli pentru* f, *iar* $a = \pm j$ *sunt poli dubli.*

Mai mult:

$$\begin{aligned}
\text{Rez(f, 1)} &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{e^{jz}}{(z+1)(z^2+1)^2} = \frac{e^{j}}{8},\\
\text{Rez(f, }-1) &= \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{e^{jz}}{(z-1)(z^2+1)^2} = -\frac{e^{-j}}{8},\\
\text{Rez(f, j)} &= \lim_{z\to j}\left[(z-j)^2\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\right]' = \lim_{z\to j}\left[\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z+j)^2}\right]' = \frac{3je^{-1}}{8},\\
\text{Rez(f, }-\text{j)} &= \lim_{z\to -j}\left[(z+j)^2\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}\right]' = \lim_{z\to -j}\left[\frac{e^{jz}}{(z^2-1)(z-j)^2}\right]' = \frac{-je}{8}.
\end{aligned}$$

- *Funcţia nu are puncte singulare în interiorul cercului* γ_1 *(cerc de centru* 0 *şi rază* $\frac{1}{2}$*). Conform teoremei fundamentale a lui Cauzhy pentru domenii simplu conexe:*

$$I_1 = 0.$$

- *În interiorul elipsei* γ_2 *se află polii* $a = 1$ *şi* $a = -1$*; deci*

$$I_2 = 2\pi j\left[\text{Rez(f, 1)} + \text{Rez(f, }-1)\right].$$

- *În interiorul elipsei γ_3 se află polii $a = j$ şi $a = -j$; deci*

$$I_3 = 2\pi j\left[\mathrm{Rez(f,j)} + \mathrm{Rez(f,-j)}\right].$$

- *În interiorul cercului γ_4 se află toţi cei 4 poli; prin urmare*

$$I_4 = 2\pi j\left[\mathrm{Rez(f,1)} + \mathrm{Rez(f,-1)} + \mathrm{Rez(f,j)} + \mathrm{Rez(f,-j)}\right] = I_2 + I_3.$$

Exercitiul 4 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_\gamma z^4 e^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z,\ (\gamma):\ |z| = 3. \tag{10}$$

Rezolvare:
Funcţia $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ are singularitate esenţială în $a = 0$, care se află în interiorul curbei γ.
Cum dezvoltarea în serie Taylor în jurul originii a funcţiei exponenţiale este dată de

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!}\ldots\frac{z^n}{n!}\ldots,$$

pentru $z \longrightarrow \frac{1}{z}$ are loc dezvoltarea în serie Laurent:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}\ldots\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\ldots,\quad 0 < |z|.$$

Înmulţind ultima relaţie cu z^4, obţinem:

$$z^4 e^{\frac{1}{z}} == z^4 + \frac{1}{1!}z^3 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z}\ldots\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-4}}\ldots,\quad 0 < |z|,$$

şi remarcăm că în dezvoltarea anterioară $c_{-1} = \dfrac{1}{5!} = \mathrm{Rez(f,0)}$. Prin urmare

$$I = 2\pi j\mathrm{Rez(f,0)} = \frac{2\pi j}{5!}.$$

Exercitiul 5 *Să se calculeze integrala:*

$$\int_\gamma e^{jz}\operatorname{tg} z\,\mathrm{d}z, \tag{11}$$

unde γ este conturul parcurs în sens direct format din segmentul $[BA]$, unde $A(0,-2)$, $B(0,2)$, şi semicercul $\widehat{AB}$ de ecuaţie $|z| = 2$ având $x > 0$.
Rezolvare:
Funcţia

$$f(z) = e^{jz}\operatorname{tg} z = e^{jz}\frac{\sin z}{\cos z}$$

are poli simpli în toate punctele $\pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. În interiorul curbei γ se află doar polul simplu $z = \dfrac{\pi}{2}$. Deci

$$\int_\gamma e^{jz}\operatorname{tg} z\,\mathrm{d}z = 2\pi j\mathrm{Rez}(\mathrm{f},\frac{\pi}{2}),$$

şi

$$\mathrm{Rez}(\mathrm{f},\frac{\pi}{2}) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{jz}\sin z}{(\cos z)'} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{jz}\sin z}{-\sin z} = -e^{j\pi/2} = -j,$$

şi deci

$$\int_\gamma e^{jz}\operatorname{tg} z\,\mathrm{d}z = 2\pi.$$

Exercitiul 6 *Să se calculeze integrala:*

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2-5z+6)}\,\mathrm{d}z, \tag{12}$$

unde γ este dată de $|z+1|=3$.

Rezolvare:

Funcţia

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2-5z+6)}$$

are polii dubli $z_{1,2}=\pm j$ şi poli simpli în $z_3=2$ respectiv $z_4=3$. Polii dubli $z_{1,2}=\pm j$ se află în interiorul cercului $|z+1|=2$, polul simplu $z_3=2$ se află pe cercul γ iar $z_4=3$ în exteriorul său. Conform teoremei semireziduurilor avem:

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z+1)^2(z^2-5z+6)}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\mathrm{Rez(f,-j)}+2\pi j\mathrm{Rez(f,j)}+\pi j\mathrm{Rez(f,2)}.$$

Aplicând formulele de calcul pentru reziduuri, obţinem:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rez(f,-j)} &= \lim_{z\to -j}\left((z+j)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2-5z+6)}\right)' = \lim_{z\to -j}\left(\frac{z^2}{(z-j)^2(z^2-5z+6)}\right)'\\
\mathrm{Rez(f,j)} &= \lim_{z\to j}\left((z-j)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2-5z+6)}\right)' = \lim_{z\to j}\left(\frac{z^2}{(z+j)^2(z^2-5z+6)}\right)'\\
\mathrm{Rez(f,2)} &= \lim_{z\to 2}\left((z-2)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-2)(z-3)}\right) = \lim_{z\to 2}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-3)}\right)
\end{aligned}$$

Exercitiul 7 *Să se calculeze integrala:*

$$I=\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\sin\frac{\pi}{z}\,\mathrm{d}z, \tag{13}$$

unde γ este elipsa de ecuaţie $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, în cazurile $0<b<1$ şi $b>1$.

Rezolvare:

Funcţia

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}\sin\frac{\pi}{z}$$

are singularităţile $z_0=0$ - punct singular esenţial şi $z_{1,2}=\pm j$ - poli simpli.
Pentru calculul reziduului în $z_0=0$, dezvoltăm funcţia f în serie Laurent în jurul acestui punct.
Astfel, pe coroana $0<|z|<1$, f are expresia

$$f(z)=(1-z^2+z^4-\ldots+(-1)^n z^{2n}+\ldots)\left(\frac{1}{1!}\frac{\pi}{z}-\frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{z^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{\pi^{2n+1}}{z^{2n+1}}+\ldots\right).$$

Coeficientul termenului $\dfrac{1}{z}$ din seria de mai sus este dat de

$$\frac{\pi}{1!}+\frac{\pi^3}{3!}+\ldots+\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

serie convergentă cu suma $\mathrm{sh}\pi$.
Pentru calculul reziduurilor în polii simpli $z_{2,3}=\pm j$,folosim:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rez(f,j)} &= \lim_{z\to j}\frac{\sin(\pi/z)}{2z}=\frac{\sin(-j\pi)}{2j}=-\frac{\mathrm{sh}\pi}{2},\\
\mathrm{Rez(f,-j)} &= \lim_{z\to -j}\frac{\sin(\pi/z)}{2z}=\frac{\sin j\pi}{-2j}=-\frac{\mathrm{sh}\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Pentru $0 < b < 1$ *doar* $z_0 = 0$ *se află în interiorul elipsei, şi*

$$I = 2\pi j \mathrm{Rez}(\mathrm{f}, 0),$$

iar pentru $b > 1$*, toate cele 3 puncte singulare se află în interiorul elipsei, şi deci:*

$$I = 2\pi j[\mathrm{Rez}(\mathrm{f}, 0) + \mathrm{Rez}(\mathrm{f}, \mathrm{j}) + \mathrm{Rez}(\mathrm{f}, -\mathrm{j})].$$

Teorema 3 *Dacă funcţia* f *are un număr finit de singularităţi* $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ *în planul complex, atunci suma tuturor reziduurilor în punctele finite şi în punctul de la* ∞ *este nulă*

$$\sum_{k=a}^{p} \mathrm{Rez}\,(f, a_k) + \mathrm{Rez}\,(f, \infty) = 0 \tag{14}$$

Exercitiul 8 *Să se calculeze integrala:*

$$\int_\gamma \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2}\,\mathrm{d}z, \tag{15}$$

unde γ *este de ecuaţie* $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Funcţia de sub integrală are următoarele singularităti izolate:

- $z = 2$ *- pol de ordin* 4*;*
- $z_k = \sqrt[5]{3}\left(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{5} + j\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$*, care sunt poli dubli pentru* f.

Cum toate punctele singulare ale funcţiei se află în interiorul elipsei

$$(\gamma): \ \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

putem scrie

$$\int_\gamma \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2}\,\mathrm{d}z = -2\pi j \mathrm{Rez}(\mathrm{f}, \infty).$$

Cum, prin definiţie

$$\mathrm{Rez}(\mathrm{f}, \infty) = \mathrm{Rez}(\mathrm{g}, 0), \quad g(w) = -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right),$$

şi

$$g(w) = -\frac{1}{w(1-2w)^4(1+3w^5)^2}$$

obţinem că

$$\mathrm{Rez}(\mathrm{g}, 0) = -\lim_{w \to 0}\left(w \cdot \frac{1}{w(1-2w)^4(1+3w^5)^2}\right) = -1.$$

În concluzie, $\mathrm{Rez}(\mathrm{f}, \infty) = -1$ *şi*

$$\int_\gamma \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j.$$

Exercitiul 9 *Să se calculeze integralele:*

$$I_k = \int_{\gamma_k} \frac{\sin z}{(z^2 + \pi^2)(z^3 - 1)} \, \mathrm{d}z$$

pentru curbele:

1. $(\gamma_1): \ |z| = \dfrac{3}{4}$;
2. $(\gamma_2): \ |z| = 2$;
3. $(\gamma_3): \ |z| = 4$.