Aplicaţii ale teoremei reziduurilor în calculul integralelor reale.

I Calculul integralelor de forma

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx \tag{1}$$

unde $\mathcal{R}$ este o funcţie raţională de două variabile. Uzual, în analiza reală, integrala (1) se calculează folosind substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

O metodă mai simplă este <u>schimbarea de variabilă</u>

$$e^{jx} = z \tag{2}$$

având în vedere că $x \in [\,0, 2\pi\,]$ şi atunci x se poate interpreta ca argument redus al unui număr complex z. Atunci când x parcurge intervalul $[\,0, 2\pi\,]$ (sau orice alt interval de lungime 2π), numărul complex $z = e^{jx}$ parcurge <u>cercul unitate $|z| = 1$</u>. Mai mult din (2) găsim prin diferenţiere:

$$je^{jx}\, dx = dz \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{jz}\, dz \tag{3}$$

Din formulele lui Euler avem:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \dfrac{z - z^{-1}}{2j} = \dfrac{z^2 - 1}{2jz} \\[2ex] \cos x = \dfrac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \dfrac{z + z^{-1}}{2} = \dfrac{z^2 + 1}{2z} \end{cases} \tag{4}$$

Se substituie în integrala (1) şi se obţine o integrală complexă pe cercul unitate a unei funcţii raţionale pentru calculul căreia se aplică Teorema reziduurilor.

Observaţie.
Datorită periodicităţii funcţiilor sin şi cos are loc

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx = \int_{0}^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercitiul 1 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{5+4\sin x}\, \mathrm{d}x.$$

Rezolvare:

Facem schimbarea de variabilă $z = e^{jx}$; când x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, z parcurge cercul $(\gamma): \ |z| = 1$, în sens trigonometric. Au loc

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \frac{z^2-1}{2jz},$$
$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Mai mult,

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{jz}.$$

Rezultă deci

$$I = \int_\gamma \frac{1+\frac{z^2+1}{2z}}{5+4\frac{z^2-1}{2jz}} \frac{\mathrm{d}z}{jz} = \int_\gamma \frac{z^2+2z+1}{2z(2z^2+5jz-2)}\, \mathrm{d}z.$$

Punctele singulare ale funcţiei

$$f(z) = \frac{z^2+2z+1}{2z(2z^2+5jz-2)}$$

sunt $z_0 = 0$, $z_1 = \dfrac{-j}{2}$ şi $z_2 = -2j$. Toate aceste puncte sunt poli simpli, iar în interiorul cercului unitate γ se află doar z_0 şi z_1. Prin urmare:

$$I = 2\pi j \left[\mathrm{Rez}(f, z_0) + \mathrm{Rez}(f, z_1)\right].$$

Calculăm:

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[z \frac{z^2+2z+1}{2z(2z^2+5jz-2)} \right] = -\frac{1}{4},$$
$$\mathrm{Rez}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} \left[(z+\frac{j}{2}) \frac{z^2+2z+1}{2z(2z^2+5jz-2)} \right] = \frac{3-4j}{12}.$$

Obţinem:

$$I = 2\pi j(-\frac{1}{4} + \frac{3-4j}{12}) = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercitiul 2 *Să se calculeze integrala:*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a + \sin x}, \quad a > 1.$$

Rezolvare:
Notând $z = e^{jx}$ şi folosind formulele anterioare, obţinem:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z^2-1}{2jz}} \frac{\mathrm{d}z}{jz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2ajz - 1} \mathrm{d}z$$

Considerând funcţia

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 2ajz - 1},$$

găsim că are 2 poli simpli - rădăcini ale ecuaţiei:

$$z^2 + 2ajz - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2aj \pm \sqrt{4 - 4a^2}}{2} = -aj \pm j\sqrt{a^2 - 1}.$$

Singurul pol care este în interiorul discului $|z| = 1$ este $z_1 = j(\sqrt{a^2-1} - a)$, iar reziduul funcţiei f în acest pol este dat de

$$\mathrm{Rez}(f, z_1) = \frac{1}{z_1 + aj} = \frac{1}{j\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Prin urmare

$$I = 2\pi j \frac{1}{j\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Exercitiul 3 *Să se calculeze integralele*

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{1 - 2a\cos x + a^2} \mathrm{d}x \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{1 - 2a\cos x + a^2} \mathrm{d}x,$$

unde $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$.

Rezolvare:
Vom determina cele două integrale simultan considerând integrala

$$I = I_1 + jI_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx + j\sin nx}{1 - 2a\cos x + a^2} \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{e^{jnx}}{1 - 2a\cos x + a^2} \mathrm{d}x.$$

Efectuând schimbarea de variabilă $z = e^{jx}$ obţinem:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{z^n}{1 - 2a\frac{z^2+1}{2z} + a^2} \frac{\mathrm{d}z}{jz} = j \int_{|z|=1} \frac{z^n}{az^2 - (1+a^2)z + a} \,\mathrm{d}z.$$

Funcţia

$$f(z) = j \frac{z^n}{az^2 - (1+a^2)z + a}$$

are polii simpli $z_{1,2} = \dfrac{1 + a^2 \pm (1 - a^2)}{2a}$ dintre care doar polul $z_2 = a$ se află în interiorul discului unitate. Avem, deci

$$I = 2\pi j \mathrm{Rez}(f, z_2) = 2\pi j \left(j \frac{a^n}{a^2 - 1} \right) = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}.$$

Identificând partea reală, respectiv imaginară, găsim:

$$I_1 = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}, \quad I_2 = 0.$$

Exercitiul 4 *Determinaţi integralele:*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin x}{(5 - 4\cos x)^2} \,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

II Calculul integralelor de forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx \tag{7}$$

unde P, Q sunt polinoame cu coeficienţi reali, grad $Q \geq 2 +$ grad P şi $Q(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (condiţii ce asigură convergenţa integralei (7)):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = 2\pi j \cdot \sum_{\mathbf{Im}\, a_k > 0} \mathrm{Rez}\,(f, a_k), \qquad \textbf{unde} \quad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{8}$$

Exercitiul 5 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

Rezolvare:
Punctele singulare ale funcţiei

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

sunt

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\,\frac{\sqrt{2}}{2},\\
z_1 &= \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\,\frac{\sqrt{2}}{2},\\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\,\frac{\sqrt{2}}{2},\\
z_3 &= \cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\,\frac{\sqrt{2}}{2},
\end{aligned}$$

fiecare dintre ele fiind poli simpli pentru f. În semiplanul superior $y > 0$ se află doar punctele z_0 şi z_1. Prin urmare

$$I = 2\pi j\,[\mathrm{Rez}(f, z_0) + \mathrm{Rez}(f, z_1)] = 2\pi j\left[\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3} + \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3}\right] = \ldots = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Observaţie Pentru calculul integralelor de tipul

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

în care $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ este funcţie pară, adică

$$f(-x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

vom folosi metoda anterioară, ţinând cont de relaţia

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Exercitiul 6 *Să se calculeze următoarele integrale improprii:*

$$(a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1} \quad (b)\ \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

$$(c)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^8 + 1} \quad (d)\ \int_{0}^{\infty} \frac{x^2+2}{(x^4+16)^2}\,\mathrm{d}x$$

III Calculul integralelor reale de forma

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)\cos(\omega x)}{Q(x)}\,dx, \quad \omega > 0$$

şi

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)\sin(\omega x)}{Q(x)}\,dx, \quad \omega > 0.$$

unde P, Q sunt polinoame cu coeficienţi reali, grad $Q \geq 1 +$ grad P şi $Q(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (condiţii ce asigură convergenţa integralelor).

Vom calcula

$$I = I_1 + jI_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx, \quad \omega > 0 \tag{9}$$

şi, prin identificarea părţile reale şi a celor imaginare, vom obţine valorile integralelor I_1 şi I_2.

Exercitiul 7 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Rezolvare:
Funcţia

$$f(x) = \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}$$

este pară, de aceea

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Notăm

$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

şi

$$B = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Se observă că

$$A + jB = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x + j\sin x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{jx}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Funcţia

$$g(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2}.$$

are polii dubli $z_{1,2} = \pm j$ dintre care doar $z_1 = j$ se află in semiplanul superior, şi

$$\mathrm{Rez}(g,j) = \lim_{z\to j}\left((z-j)^2\frac{e^{jz}}{(z-j)^2(z+j)^2}\right)' = \frac{e^{-1}}{2j}.$$

Rezultă deci

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{jx}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi j\mathrm{Rez}(g,j) = \pi e^{-1},$$

şi, prin urmare

$$I = \frac{\pi e^{-1}}{2}.$$

Exercitiul 8 *Să se calculeze integrala*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x.$$

Rezolvare:
Notăm integrala de mai sus cu I_1 şi considerăm integrala

$$I := I_1 + jI_2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x + j\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{jx}}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x.$$

Funcţia

$$f(z) = \frac{ze^{jz}}{z^2-6z+13},$$

are polii simpli $z_1 = 3 - 2j$, $z_2 = 3 + 2j$, dintre care doar z_2 se află în semiplanul superior. Prin urmare

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{jx}}{x^2 - 6x + 13}\, \mathrm{d}x = 2\pi j \mathrm{Rez}(f, 3 + 2j).$$

Calculăm

$$\begin{aligned} &\mathrm{Rez}(f, 3+2j) = \lim_{z \to 3+2j} \frac{ze^{jz}}{(z^2 - 6z + 13)'} = \lim_{z \to 3+2j} \frac{ze^{jz}}{2z - 6} \\ &= \frac{1}{4je^2}[3\cos 3 - 2\sin 3 + j(2\cos 3 + 3\sin 3)], \end{aligned}$$

şi găsim

$$I = \frac{\pi}{2e^2}[3\cos 3 - 2\sin 3 + j(2\cos 3 + 3\sin 3)].$$

Prin urmare

$$I_1 = \frac{\pi}{2e^2}(3\cos 3 - 2\sin 3).$$

Observăm că odată cu valoarea lui I_1 am mai găsit şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 6x + 13}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e^2}(2\cos 3 + 3\sin 3).$$

Exercitiul 9 *Calculaţi integralele:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\, \mathrm{d}x, \tag{10}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^3}\, \mathrm{d}x. \tag{11}$$