LABORATOR 11 - INTEGRAREA NUMERICĂ

1. Formule Newton-Cotes

Prin *formulă de integrare numerică (cuadratură numerică)* se înţelege o formulă de tipul:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = A_1 f(x_1) + ... + A_n f(x_n) + R(f), \tag{1.1}$$

unde (x_i) se numesc *noduri,* iar (A_i) se numesc *coeficienţi.* Nu se presupune că nodurile aparţin intervalului $[a, b]$. Funcţia w este o funcţie fixată, integrabilă, care se numeşte *funcţia pondere.*

În multe cazuri $w(x) = 1, \forall x \in [a, b]$. Despre funcţia f se presupune că este integrabilă pe $[a, b]$ şi definită în nodurile (x_i). Cu $R(f)$ se notează eroarea de aproximare a integralei.

Formula (1.1) spunem că este *exactă* pentru funcţia f dacă $R(f) = 0$, deci dacă

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = A_1 f(x_1) + ... + A_n f(x_n).$$

Formula (1.1) spunem că este *de gradul m* dacă:
(i) este exactă pentru orice polinom de grad cel mult m;
(ii) există un polinom de gradul m+1 pentru care (1.1) nu este exactă.

Presupunem că intervalul $[a, b]$ este finit, iar nodurile sunt echidistante: $x_i = a + ih$, unde $h = \dfrac{b-a}{n}$ şi $w(x) = 1, , \forall x \in [a, b]$. Fie

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

şi P_n - polinomul Lagrange care interpolează f în nodurile $x_0, ..., x_n$. Avem:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i).$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = a + th$, avem:

$$\tilde{P}_n(t) = P_n(a + th) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} C_n^i}{n!} \frac{\pi_{n+1}(t)}{t - i} f(x_i),$$

unde $\pi_{n+1}(t) = t(t-1) \cdot ... \cdot (t-n)$.

Dacă notăm cu $E(f; x) = f(x) - P_n(x)$, atunci avem

$$E(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n),$$

în cazul în care $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$.

Făcând şi aici schimbarea de variabilă $x = a + th$, avem:

$$\tilde{E}(f;t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!} h^{n+1} \pi_{n+1}(t).$$

Deci:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b E(f;x)dx \\
&= \int_0^n \tilde{P}_n(t)hdt + \int_0^n \tilde{E}(f;t)hdt \\
&= h\sum_{i=0}^n \left(\frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{n!} \int_0^n \frac{\pi_{n+1}(t)}{t-i} dt \right) f(x_i) \\
&\quad + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n \pi_{n+1}(t) f^{(n+1)}(\xi_t) dt.
\end{aligned}$$

Introducem notaţiile:

$$d_i = \frac{(-1)^{n-i}C_n^i}{n!} \int_0^n \frac{\pi_{n+1}(t)}{t-i} dt, i = \overline{0,n} \tag{1.2}$$

şi

$$R(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n \pi_{n+1}(t) f^{(n+1)}(\xi_t) dt. \tag{1.3}$$

$(d_i), i = \overline{0,n}$ se numesc *coeficienţii Newton-Cotes*.

Am obţinut deci:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + R(f),$$

unde $A_i = hd_i, i = \overline{0,n}$.

Primele trei formule Newton-Cotes au nume speciale. Pentru $n = 1$, obţinem *formula trapezelor:*

$$\begin{aligned}
h &= b - a, \\
d_0 &= \frac{(-1)^{1-0}C_1^0}{1!} \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = -\int_0^1 t - 1dt = -\left(\frac{t^2}{2} + t \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\
d_1 &= \frac{(-1)^{1-1}C_1^1}{1!} \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t-1} dt = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Deci, $A_0 = A_1 = \dfrac{h}{2}$.

Formula trapezelor este:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + R(f), \tag{1.4}$$

unde

$$R(f) = \frac{h^3}{2}\int_0^1 f''(\xi_t)t(t-1)dt.$$

Dacă $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ şi notăm $M_2 = \sup\{|f''(x)| \mid x \in [a,b]\}$, avem:

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{2} M_2 \int_0^1 |t(t-1)|\, dt = \frac{(b-a)^3}{12} M_2. \tag{1.5}$$

Geometric, formula trapezelor revine la a aproxima aria mulţimii plane mărginite de G_f, axa Ox şi dreptele $x = a, x = b$ cu aria trapezului mărginit de $Ox, x = a, x = b$ şi segmentul care uneşte $(a, f(a))$ cu $(b, f(b))$.

Pentru $n = 2$, obţinem *formula Simpson.* În acest caz:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{b-a}{2}, \\
d_0 &= \frac{(-1)^2 C_2^0}{2!}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(t^2 - 3t + 2\right) dt = \frac{1}{3} \\
d_1 &= \frac{(-1)^1 C_2^1}{2!}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-1}dt = -\int_0^2 \left(t^2 - 2t\right) dt = \frac{4}{3} \\
d_1 &= \frac{(-1)^2 C_2^2}{2!}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-2}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(t^2 - t\right) dt = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Formula lui Simpson este dată de:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R(f). \tag{1.6}$$

Se poate arăta că dacă $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$, atunci

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^4}{64} M_3, \tag{1.7}$$

unde $M_3 = \sup\{|f'''(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

Dacă $n = 3$, atunci:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{b-a}{3} \\
d_0 &= d_3 = \frac{3}{8} \\
d_1 &= d_2 = \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

Se obţine *formula* $\frac{3}{8}$ *a lui Simpson*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right] + R(f), \tag{1.8}$$

unde

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \frac{(b-a)^5}{1880} M_4, \\ M_4 &= \sup\{\left|f^{IV}(x)\right| \mid x \in [a,b]\} \text{ pentru } f \in \mathcal{C}^4([a,b]). \end{aligned}$$

Pentru o mai bună aproximare a integralei se folosesc *formulele Newton-Cotes repetate.*

Dacă împărţim intervalul $[a,b]$ în n subintervale egale şi aplicăm formula (1.4) fiecărui subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, obţinem:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] + R(f).$$

Dar $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, x_n = b$. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] + R(f), \tag{1.9}$$

unde

$$|R(f)| \leq n\frac{M_2}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3. \tag{1.10}$$

Formula (1.9) se numeşte *formula trapezelor repetată.*

Dacă împărţim intervalul $[a,b]$ în $2n$ subintervale egale şi aplicăm formula (1.6) fiecărui subinterval $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, obţinem *formula Simpson repetată:*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\right] + R(f), \tag{1.11}$$

unde

$$|R(f)| \leq \frac{M_3}{64n^3}(b-a)^4. \tag{1.12}$$

Dacă notăm cu

$$\begin{aligned} \sigma_n^T &= \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \\ \sigma_n^S &= \frac{b-a}{6n}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\right], \end{aligned}$$

se poate arăta că σ_n^T şi σ_n^S sunt combinaţii liniare de sume Riemann şi că

$$\sigma_n^T \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\sigma_n^S \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)dx.$$

Algoritmul MATLAB pentru calculul aproximativ al integralelor

1. Metoda trapezelor:

Exemplul 1. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei*

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx,$$

folosind metoda trapezelor pentru $n = 5$ *subintervale egale.*

```
% Introducere n, numărul de subintervale egale
n=5
% Introducere a,b, capetele intervalului
a=pi/12;
b=pi/2;
h=(b-a)/n;
I=sin(a)/sqrt(a)+sin(b)/sqrt(b);
for i=1:n-1
    x=a+h*i;
    I=I+2*sin(x)/sqrt(x);
end
I=h/2*I
```

2. Metoda Simpson:

Exemplul 2. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei*

$$\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx,$$

folosind metoda lui Simpson, considerând $m = 2n = 8$ *subintervale egale.*

```
% Introducere n, numărul de subintervale egale
n=4
% Introducere a,b, capetele intervalului
a=pi/10; b=pi/2;
h=(b-a)/(2*n)
I=cos(a)/sqrt(a)+cos(b)/sqrt(b);
```

```
for i=1:n
    x=a+(2*i-1)*h;
    I=I+4*cos(x)/sqrt(x)
end
x=a;
for i=1:n-1
    x=a+2*i*h;
    I=I+2*cos(x)/sqrt(x);
end
I=h/3*I
```

2. Integrarea numerică a integralelor duble

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, unde $D = [a, b] \times [c, d]$ este un dreptunghi. Atunci:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx. \tag{2.1}$$

Pentru fiecare integrală simplă putem aplica o formulă de integrare numerică. Dacă aplicăm metoda trapezelor obţinem:

$$\begin{aligned} \iint\limits_D f(x,y)dxdy &\approx \int\limits_a^b \frac{d-c}{2}[f(x,c)+f(x,d)]dx \\ &\approx \frac{b-a}{2}\frac{d-c}{2}[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)]. \end{aligned}$$

Aşadar, formula trapezelor pentru integrala (2.1) este:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \frac{(b-a)(d-c)}{4}[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)] + R(f). \tag{2.2}$$

În mod asemănător, formula Simpson va fi:

$$\begin{aligned} \iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \frac{(b-a)(d-c)}{4}[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d) \\ &\quad +4f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + 4f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) \\ &\quad +4f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) + 16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)] + R(f). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pentru o mai bună aproximare a integralei se folosesc formulele repetate. Pentru formula trapezelor se împarte intervalul $[a, b]$ în n subintervale egale, iar $[c, d]$ în m

intervale egale. Atunci:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx \\
&= \int\limits_a^b \left(\sum_{j=1}^m \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \right) dx \\
&\approx \int\limits_a^b \left(\sum_{j=1}^m \frac{y_j - y_{j-1}}{2} \left[f(x,y_{j-1}) + f(x,y_j) \right] \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^m \frac{d-c}{2m} \left[f(x,y_{j-1}) + f(x,y_j) \right] \right) dx \\
&= \frac{d-c}{2m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{x_i - x_{i-1}}{2} [f(x_{i-1},y_{j-1}) + f(x_{i-1},y_j) \\
&\quad + f(x_i,y_{j-1}) + f(x_i,y_j)] \\
&= \frac{(b-a)(d-c)}{4mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [f(x_{i-1},y_{j-1}) + f(x_{i-1},y_j) \\
&\quad + f(x_i,y_{j-1}) + f(x_i,y_j)].
\end{aligned}$$

Pentru formula lui Simpson repetată, se împarte $[a,b]$ în $2n$ intervale egale, iar $[c,d]$ în $2m$ intervale egale.

$$\begin{aligned}
h &= \frac{b-a}{2n}, k = \frac{d-c}{2m}, \\
\iint\limits_D f(x,y)dxdy &\approx \frac{hk}{9} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (S_0 + 4S_1 + 16S_2),
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{cases}
S_0 = f(x_{2i-2},y_{2j-2}) + f(x_{2i},y_{2j-2}) + f(x_{2i-2},y_{2j}) + f(x_{2i-2},y_{2j}) \\
S_1 = f(x_{2i-1},y_{2j-2}) + f(x_{2i-2},y_{2j-1}) + f(x_{2i-1},y_{2j}) + f(x_{2i},y_{2j-1}) \\
S_2 = f(x_{2i-1},y_{2j-1})
\end{cases}.$$

Dacă domeniul de integrare D nu este un dreptunghi, atunci se construieşte un dreptunghi D^* cu laturile paralele cu axele de coordonate şi care include D. considerăm funcţia auxiliară

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \text{ dacă } (x,y) \in D \\ 0, \text{ dacă } (x,y) \notin D \end{cases}.$$

Atunci

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f^*(x,y)dxdy,$$

ultima integrală fiind pe dreptunghi.

Algoritmul MATLAB pentru calculul aproximativ al integralelor duble

1. Metoda trapezelor:

Exemplul 3. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei*

$$\iint\limits_{\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,\frac{1}{4}\right]} \sin\pi(x+y)dxdy,$$

folosind metoda trapezelor repetată.

```
a=0;
b=1/2;
c=0;
d=1/4;
n=4;
m=5;
h=(b-a)/n;
k=(d-c)/m;
I=sin(pi*(a+c))+sin(pi*(a+d))+sin(pi*(b+c))+sin(pi*(b+d));
for i=1:n-1;
    x=a+i*h;
    I=I+2*sin(pi*(x+c))+2*sin(pi*(x+d));
end
for j=1:m-1;
    y=c+j*k;
    I=I+2*sin(pi*(a+y))+2*sin(pi*(b+y));
end
for i=1:n-1
    x=a+i*h;
    for j=1:m-1
        y=c+j*k;
        I=I+4*sin(pi*(x+y))
    end
end
I=h*k/4*I
```

2. Metoda Simpson:

Exemplul 4. *Să se calculeze valoarea aproximativă a integralei*

$$\iint\limits_{[1,2]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} \frac{\cos(x+y)}{x}dxdy,$$

folosind metoda lui Simpson.

```
a=1;b=2;c=-pi/2;d=pi/2;
n=4;m=4;
h=(b-a)/(2*n)
k=(d-c)/(2*m)
x=zeros(2*n+1,1);
y=zeros(2*m+1,1);
for i=1:2*n+1
    x(i)=a+(i-1)*h;
end
for j=1:2*m+1
    y(j)=c+(j-1)*k;
end
x
y
s=0;
for i=1:n
    for j=1:m
        s=s+cos(x(2*i-1)+y(2*j-1))/(x(2*i-1))+cos(x(2*i+1)+y(2*j-1))/(x(2*i+1))
         +cos(x(2*i-1)+y(2*j+1))/(x(2*i-1))+cos(x(2*i+1)+y(2*j+1))/(x(2*i+1));
        s=s+4*cos(x(2*i)+y(2*j-1))/(x(2*i))+4*cos(x(2*i-1)+y(2*j))/(x(2*i-1))
        +4*cos(x(2*i)+y(2*j+1))/(x(2*i))+4*cos(x(2*i+1)+y(2*j))/(x(2*i+1));
        s=s+16*cos(x(2*i)+y(2*j))/(x(2*i));
    end

end
s
I=h*k/9*s
```