LABORATOR 12 - REZOLVAREA NUMERICĂ A PROBLEMEI CAUCHY PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE

Fie $D \subset [a,b] \times J \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $(x_0, y_0) \in D$. Problema Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

constă în determinarea unei soluţii, adică a unei funcţii derivabile $y : I \subset [a,b] \to \mathbb{R}$ care să verifice (PC) pe I. Are loc următoarea teoremă.

Teorema 1. *În condiţiile:*
(i) f continuă pe $[a,b]$ în raport cu x;
(ii) f Lipschitz pe D în raport cu y;
(iii) $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} D$;
există $\alpha > 0$ astfel încât pe $I := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ există o unică soluţie pentru (PC).

Soluţia se determină prin metoda aproximaţiilor succesive (Picard) şi are forma:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \ x \in I, \ n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Atunci $y_n \xrightarrow[I]{u} y$, iar y este soluţia unică pentru (PC).

Mai mult,

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{M \cdot L^n \cdot C^{n+1}}{(n+1)!} e^{LC},$$

unde

$$M = \sup_{x \in I} |f(x, y_0)|, \quad C = \max\{|a - x_0|, |b - x_0|\},$$

iar L este constanta Lipschitz.

Dezavantajul acestei metode constă în faptul că presupune calculul unor integrale. Din acest motiv, această metodă este mai puţin folosită în practică, având o importanţă deosebită mai ales din punct de vedere teoretic.

Din considerente practice, se presupune că $x_0 = a$, deoarece dacă găsim un algoritm care rezolvă

$$(PC') \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases},$$

atunci cu acest algoritm putem rezolva şi (PC), făcând schimbarea de variabilă $X = x_0 - x$.

Metodele numerice pentru rezolvare (PC') constau în alegerea unor noduri (de obicei, echidistante) $x_k = a + k \cdot h, k \in \mathbb{N}$ şi determinarea unor valori aproximative ale soluţiei exacte în aceste noduri, pe care le notăm y_k; aşadar, $y_k \approx y(x_k)$.

Se cunosc două clase importante de metode numerice pentru rezolvarea problemei Cauchy:

I. Metode directe (uni-pas):

$$y_k = R(y_{k-1}).$$

- metoda Taylor, metodele Runge-Kutta.

II. Metode indirecte (cu mai mulţi paşi):

$$y_k = R(y_{k-m}, ..., y_{k-2}, y_{k-1}).$$

- metodele Adams-Bashforth, Adams-Moulton, metoda predictor-corector.

1. Metode directe

1.1. **Metoda Taylor.** Fie nodurile echidistante $x_n = x_0 + n \cdot h, x_0 = a$ şi $y = y(x)$ soluţia exactă pentru (PC). Deci

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Presupunem că f este diferenţiabilă de un număr suficient de ori. Aplicăm formula lui Taylor pentru $x_1 = x_0 + h$:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{1!} y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + ... + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(x_0) + R_{p+1},$$

unde

$$R_{p+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi), \text{ cu } \xi \in (x_0, x_1).$$

Folosim $y'(x) = f(x, y(x))$ şi avem:

$$\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)), \\
y'''(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x)) \cdot y'(x) \right) \cdot f(x, y(x)) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y(x)) + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y(x)) \cdot f^2(x, y(x)) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \right)^2 \cdot f(x, y(x)). \\
&\quad ...
\end{aligned}$$

Atunci:

$$\begin{aligned}
y'(x_0) &= f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0),\\
y''(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot f(x_0, y_0),\\
y'''(x_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\cdot f(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\cdot f^2(x_0, y_0)\\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2\cdot f(x_0, y_0).\\
&\quad \ldots
\end{aligned}$$

Pentru $p = 3$ obţinem:

$$y(x_1) = y_0 + \frac{h}{1!}y'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + R_4.$$

Aproximăm soluţia exactă în x_1, adică $y(x_1)$, cu

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!}y'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0),$$

eroarea fiind dată de

$$|y(x_1) - y_1| = |R_4| \leq \frac{1}{4!}\cdot M_4 \cdot h^4, \text{ unde } M_4 = \sup_{x\in[a,x_1]}\left|y^{IV}(x)\right|.$$

În continuare, considerând soluţia problemei (PC) ce satisface $y(x_1) = y_1$, deci pornind cu punctul (x_1, y_1), se determină y_2 care aproximează pe $y(x_2)$ etc.. În general, $y(x_n)$ se aproximează cu y_n, dat de:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{1!}y'(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2!}y''(x_{n-1}) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_{n-1}).$$

Evident, erorile se acumulează.

Exemplul 1. *Fie problema Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x} \\ y(1) = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Să se găsească soluţia aproximativă în $x = 2$ cu pasul $h = 0.1$.
În acest caz

$$\begin{aligned}
f(x, y(x)) &= 1 - \frac{y(x)}{x},\\
y'(x) &= 1 - \frac{y(x)}{x},\\
y''(x) &= \frac{y(x) - x\cdot y'(x)}{x^2},\\
y'''(x) &= \frac{-x^2\cdot y''(x) - 2y(x) + 2x\cdot y'(x)}{x^3}.
\end{aligned}$$

Pentru a găsi soluţia, scriem algoritmul MATLAB:

```
clc
x=1;
y=3/2;
h=0.1;
```

for x=1:h:2-h
x
y1=1-y/x
*y2=(y-x*y1)/x^2;*
*y3=(-x^2*y2-2*y+2*x*y1)/x^3*
*y=y+h*y1+h^2/2*y2+h^3/6*y3*
end

Vom găsi $y(2) = 1.5260$. *Comparând cu soluţia exactă a problemei,* $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$, *care ne dă* $y(2) = 1.5$, *avem eroarea de* 0.0260. *Micşorând mai sus pasul la* $h = 0.001$, *obţinem* $y(2) = 1.5003$.

Dezavantajul metodei Taylor constă în faptul că presupune calculul derivatelor $y'', y''', ..., y^{(k)}, ...$ la fiecare pas, ceea ce este dificil de realizat. Această dificienţă este înlăturată de metodele care urmează.

Pentru $p = 1$ se obţine **metoda lui Euler**. În acest caz valorile aproximative y_n ale lui $y(x_n)$ sunt date de:

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}),\ n \in \mathbb{N},$$

unde $y_0 = y(x_0)$.

Metoda lui Euler are următoarea semnificţie geometrică: dacă s-a determinat y_{n-1}, pentru a se determina y_n se consideră soluţia ecuaţiei (PC) care trece prin (x_{n-1}, y_{n-1}) (deci satisface $y(x_{n-1}) = y_{n-1}$); se duce tangenta la graficul acestei soluţii, în (x_{n-1}, y_{n-1}); se intersectează tangenta cu dreapta $x = x_n$, obţinându-se y_n. Din motivele de mai sus, metoda lui Euler se mai numeşte metoda liniilor poligonale. După cum se observă de mai sus, erorile se acumulează.

1.2. **Metodele Runge-Kutta.** Aceste metode se deosebesc de metoda Taylor prin faptul că înlocuiesc calculul derivatelor funcţiei f prin evalări ale lui f în diverse puncte.

Vom analiza în detaliu metoda Runge-Kutta de ordinul doi. Valorile aproximative y_n ale lui $y(x_n)$ sunt date de:

$$y_n = y_{n-1} + a_1 h f(x_{n-1}, y_{n-1}) + a_2 h f(x_{n-1} + b_1 h, y_{n-1} + b_2 h f(x_{n-1}, y_{n-1})),\ n \geq 1,$$

iar $y_0 = y(x_0)$.

Constantele a_1, a_2, b_1, b_2 urmează a fi determinate. Notăm:

$$f = f(x_{n-1}, y_{n-1}), f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n-1}, y_{n-1}), f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Folosind formula lui Taylor pentru funcţii de două variabile, avem:

$$\begin{aligned} f(x_{n-1} + b_1 h, y_{n-1} + b_2 h f(x_{n-1}, y_{n-1})) &= f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ &+ \frac{1}{1!} df(x_{n-1}, y_{n-1})(b_1 h, b_2 h f(x_{n-1}, y_{n-1})) + O(h^2) \\ &= f + b_1 \cdot h \cdot f_x + b_2 \cdot h \cdot f \cdot f_y + O(h^2). \end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + a_1 h f + a_2 h (f + b_1 \cdot h \cdot f_x + b_2 \cdot h \cdot f \cdot f_y + O(h^2)) \\ &= y_{n-1} + (a_1 + a_2) \cdot f \cdot h + (a_2 b_1 \cdot f_x + a_2 b_2 \cdot f \cdot f_y) + O(h^3). \end{aligned}$$

Pe de altă parte, din formula lui Taylor, avem:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{1!}f + \frac{h^2}{2!}(f_x + f_y \cdot f) + O(h^3).$$

Identificând coeficienţii lui h şi h^2 de mai sus, avem:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 \cdot b_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 \cdot b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Deoarece sistemul are 3 ecuaţii şi 4 necunoscute, alegem $b_2 = \alpha$; atunci $b_1 = \alpha$, deci

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 \cdot \alpha = \dfrac{1}{2} \\ b_2 = \alpha \end{cases},$$

de unde avem formulele:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + h(a_1 g_1 + a_2 g_2) \\ g_1 = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ g_2 = f(x_{n-1} + \alpha h, y_{n-1} + \alpha h g_1) \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 \cdot \alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Pentru $a_1 = a_2 = \dfrac{1}{2}, \alpha = 1$, se obţine **metoda Euler îmbunătăţită**:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}))\right],\ n \geq 1.$$

Pentru $a_1 = 0, a_2 = 1, \alpha = \dfrac{1}{2}$, se obţine **metoda Euler modificată**:

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}f(x_{n-1}, y_{n-1})\right),\ n \geq 1.$$

În continuare prezentăm metoda Runge-Kutta de ordinul 4 în forma particulară sub care este mai des utilizată:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4),\ n \geq 1,$$

unde

$$\begin{aligned} g_1 &= f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ g_2 &= f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}g_1\right) \\ g_3 &= f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}g_2\right) \\ g_4 &= f\left(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hg_3\right) \end{aligned}$$

şi $y_0 = y(x_0)$.

Exemplul 2. *Folosind succesiv metodele Euler îmbunătăţită şi Euler modificată, să se determine soluţia aproximativă a ecuaţiei diferenţiale:*

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{4x}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

în $x = 1$ *cu pasul* $h = 0.2$.

Algoritmii MATLAB care rezolvă problema sunt următorii:

Euler îmbunătăţită

```
clc
x=0;
y=1;
h=0.2;
for x=0:h:1-h
    x
    f=y-4*x/y^2
    x1=x+h;
    y1=y+h*f;
    f1=y1-4*x1/y1^2;
    y=y+h/2*(f+f1)
end
```

Euler modificată

```
clc
x=0;
y=1;
h=0.2;
for x=0:h:1-h
    x
    f=y-4*x/y^2
    x1=x+h/2;
    y1=y+h/2*f;
    f1=y1-4*x1/y1^2;
    y=y+h*f1
end
```

Soluţia obţinută este $y(1) = 0.5850$.

Exemplul 3. *Să se determine soluţia aproximativă a ecuaţiei diferenţiale folosind metoda Runge-Kutta de ordinul 4:*

$$\begin{cases} y' = 0.25y^2 + x^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

în $x = 1$ *în 4 paşi.*

Algoritmul MATLAB care rezolvă problema este:

```
clc
x=0;
y=-1;
h=0.25;
for x=0:h:1-h
    x
    g1=0.25*y^2+x^2
    g2=0.25*(y+h/2*g1)^2+(x+h/2)^2
    g3=0.25*(y+h/2*g2)^2+(x+h/2)^2
    g4=0.25*(y+h*g3)^2+(x+h)^2
    y=y+h/6*(g1+2*g2+2*g3+g4)
end
```

Soluţia obţinută este $y(1) = -0.4954$.

2. Metode indirecte (cu mai mulţi paşi)

2.1. **Metoda Adams-Bashforth.** Presupunem că printr-o metodă directă s-au determinat valorile $y_1, ..., y_n$ în nodurile $x_1, ..., x_n$, unde $y_k \simeq y(x_k), k = \overline{1, n}$.

Se pune problema determinării unei valori aproximative y_{n+1} pentru $y(x_{n+1})$. Integrând ecuaţia $y' = f(x, y)$ pe intervalul $[x_n, x_{n+1}]$ obţinem:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx. \tag{2.1}$$

Pentru a calcula integrala folosim o metodă numerică, de exemplu o metodă Newton-Côtes pentru nodurile echidistante $x_{n-m}, x_{n-m+1}, ..., x_i, ..., x_n$, $m \leq n$, $x_i = x_n + (i-n)h$, $i = \overline{n-m, n}$.

Dacă $x \in [x_n, x_{n+1}]$, atunci există $t \in [0, 1]$ astfel încât

$$x = x_n + th. \tag{2.2}$$

Fie P_m polinomul Lagrange corespunzător tabelului:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & x_{n-m} & ... & x_i & ... & x_n \\ \hline f & f_{n-m} & ... & f_i & ... & f_n \end{array},$$

unde

$$f_i = f(x_i, y_i), i = \overline{n-m, n}.$$

Vom aproxima valoarea exactă $y(x_{n+1})$ prin

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_m(x)dx. \tag{2.3}$$

După cum se ştie, $P_m = \sum\limits_{i=n-m}^{n} L_i(x) f(x_i, y_i)$, unde

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \prod_{j=n-m, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=n-m, j\neq i}^{n} \frac{(t-j+n)h}{(i-j)h} \\ &= \frac{(t+m)\cdot ... \cdot (t+n-i+1)(t+n-i-1)\cdot ... \cdot t}{(i-n+m)\cdot ... \cdot 1 \cdot (-1) \cdot ... \cdot [-(n-i)]} \\ &= \frac{(-1)^{n-i} \prod\limits_{k=0}^{m} (t+k)}{(i-n+m)!(n-i)!(t+n-i)}. \end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabilă (2.2) în (2.3), obţinem:

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^1 \left(\sum_{i=n-m}^{n} \frac{(-1)^{n-i} \prod\limits_{k=0}^{m} (t+k)}{(i-n+m)!(n-i)!(t+n-i)} \cdot h f_i \right) dt.$$

Dacă notăm cu

$$A_i = \frac{(-1)^{n-i} \cdot h}{(i-n+m)!(n-i)!} \int_0^1 \frac{\prod_{k=0}^{m}(t+k)}{(t+n-i)} dt, i = \overline{n-m, n} \tag{2.4}$$

obţinem

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=n-m}^{n} A_i f_i, \tag{2.5}$$

cunoscută sub numele de *formula Adams-Bashforth*.

În continuare vom explicita formula (2.5) pentru valori particulare ale lui m. Astfel, pentru $m = 1$, deci când se folosesc nodurile x_n şi x_{n-1}, formula (2.5) devine:

$$y_{n+1} = y_n + A_{n-1} f_{n-1} + A_n f_n,$$

unde conform (2.4):

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= \frac{(-1)^1 h}{0!1!} \int_0^1 \frac{t(t+1)}{t+n-(n-1)} dt = -h \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{h}{2}, \\ A_n &= \frac{(-1)^0 h}{1!0!} \int_0^1 \frac{t(t+1)}{t} dt = h \cdot \left(\frac{t^2}{2} + t\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} h. \end{aligned}$$

În consecinţă, pentru $m = 1$, formula Adams-Bashforth se scrie:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}). \tag{2.6}$$

Similar, pentru $m = 2$ se obţine:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}), \tag{2.7}$$

iar pentru $m = 3$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \tag{2.8}$$

În ceea ce priveşte estimarea erorii, scăzând (2.3) din (2.1) obţinem:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_n) - y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} [f(x, y(x)) - P_m(x)] dx,$$

deci

$$|y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \leq |y(x_n) - y_n| + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x, y(x)) - P_m(x)| \, dx.$$

Aşadar, eroarea din metoda Adams-Bashforth este mai mică decât suma dintre eroarea din metoda directă folosită în calculul lui y_n şi eroarea de la integrarea numerică. În cazul $m = 1$, folosind schimbarea de variabilă (2.2), obţinem:

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x, y(x)) - P_m(x)|\, dx &\leq \frac{M_2}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n-1})dx \\ &= \frac{M_2}{2}\int_0^1 h^3 t(t+1)dt = \frac{5}{12}h^3 M_2,\end{aligned}$$

unde

$$M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x, y(x))|\, .$$

Deci, eroarea de integrare în acest caz este de ordinul h^3.

Metoda Adams-Bashforth este cunoscută ca metodă explicită, deoarece relaţia (2.5) nu conţine $f(x_{n+1}, y_{n+1})$.

2.2. **Metoda Adams-Moulton.** Presupunem că printr-o metodă directă s-au determinat valorile $y_1, ..., y_n$ în nodurile $x_k = x_0 + kh, k = \overline{1, n}$ şi presupunem că $x_{n+1} < b$. Fie P_{m+1} polinomul de interpolare Lagrange corespunzător tabelului:

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_{n-m} & ... & x_n & x_{n+1} \\ \hline f & f_{n-m} & ... & f_n & f_{n+1} \end{array}.$$

Formula corespunzătoare lui (2.3) este:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{m+1}(x)dx. \tag{2.9}$$

Procedând ca mai sus, obţinem:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=n-m}^{n+1} B_i f_i, \tag{2.10}$$

unde

$$B_i = \frac{(-1)^{n+1-i}\cdot h}{(i-n+m)!(n+1-i)!}\int_0^1 \frac{\prod\limits_{k=-1}^{m}(t+k)}{(t+n-i)}dt, i = \overline{n-m, n+1}, \tag{2.11}$$

cunoscută sub numele de *formula Adams-Moulton*.

Vom particulariza această formulă. Pentru $m = 0$ obţinem

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n), \tag{2.12}$$

pentru $m = 1$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), \tag{2.13}$$

pentru $m = 3$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \tag{2.14}$$

Deoarece $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$, necunoscuta y_{n+1} apare şi în membrul drept, deci în general nu se poate explicita. Metoda Adams-Moulton este deci o metodă implicită.

De obicei, (2.9) trebuie rezolvată ca o ecuaţie algebrică printr-o metodă iterativă. Se alege $y_{n+1}^{(0)}$, apoi se calculează

$$y_{n+1}^{(1)} = F(y_{n+1}^{(0)}), y_{n+1}^{(2)} = F(y_{n+1}^{(1)}) \text{ etc.},$$

unde F apare din scrierea convenabilă a lui (2.9) sub forma $y_{n+1} = F(y_{n+1})$.

Eroarea din metoda Adams-Moulton se poate estima ca şi în cazul metodei Adamd-Bashforth.

2.3. **Metoda predictor-corector (Adams-Bashforth-Moulton).** Presupunem că printr-o metodă directă s-au determinat valorile $y_1, ..., y_n$ în nodurile $x_1, ..., x_n$.

Fie $m_1, m_2 \leq n$ şi $x_{n+1} = x_n + h \leq b$.

În prima etapă (etapa predictor) se determină valoarea aproximativă y_{n+1} cu metoda Adams-Bashforth, pentru $m = m_1$.

Valoarea astfel determinată se notează $y_{n+1}^{(0)}$ şi este folosită în continuare în etapa a doua (etapa corector) pentru determinarea valorii y_{n+1} cu metoda Adams-Moulton, cu $m = m_2$.

Cele mai utilizate metode predictor-corector sunt:

$$1) \left\{ \begin{array}{ll} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) & (m_1 = 1) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) + f_n] & (m_2 = 0) \end{array} \right. ,$$

$$2) \left\{ \begin{array}{ll} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) & (m_1 = 2) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{12}[5f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) + 8f_n - f_{n-1}] & (m_2 = 1) \end{array} \right. ,$$

$$3) \left\{ \begin{array}{ll} y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) & (m_1 = 3) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{24}[9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] & (m_2 = 2) \end{array} \right. .$$