LABORATOR 2 - SISTEME DE ECUAŢII LINIARE. METODA LUI GAUSS

Reamintim că un sistem de n ecuaţii algebrice liniare cu n necunoscute este de forma:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} .$$

Dacă notăm cu A matricea coeficienţilor, cu x vectorul coloană al necunoscutelor şi cu b coloana al termenilor liberi, sistemul (1) se scrie sub formă matriceală:

$$Ax = b,$$

unde:

$$(2) \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Metodele numerice de rezolvare a sistemelor algebrice de ecuaţii liniare sunt de două tipuri: *metode directe* şi *metode indirecte* (sau *iterative*).

Metodele directe constau în transformarea sistemului (1) într-un sistem triunghiular echivalent, care se rezolvă uşor. Cele mai cunoscute metode directe sunt: *metoda Gauss, metoda Cholesky* (utilizată pentru sistemele în care matricea A este simetrică şi pozitiv definită) şi *metoda Householder.*

Metodele directe permit determinarea soluţiilor sistemului în cazul ideal, când nu avem erori de rotunjire. Numărul operaţiilor efectuate este de ordinul n^3. Pentru sisteme cu un număr de ecuaţii mai mare de 100, metodele directe devin inutilizabile datorită acumulării erorilor de rotunjire care alterează soluţia.

Metodele indirecte (sau *iterative*) constau în construcţia unui şir $(x^{(k)})$ de vectori n-dimensionali, care converge la soluţia exactă a sistemului. Se alege ca soluţie aproximativă a sistemului un termen $x^{(s)}$ al şirului, al cărui ordin depinde de precizia impusă.

O iteraţie presupune efectuarea unui număr de operaţii aritmetice de ordinul n^2. Metodele iterative sunt utilizate la reolvarea sistemelor mari de ecuaţii. Cele mai cunoscute metode iterative sunt: *Jacobi, Gauss-Siedel, metodele de relaxare.*

Fie

$$m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{r+1,r} \\ \vdots \\ m_{n,r} \end{bmatrix} \text{ şi } e_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(elementul 1 din e_r se află pe linia r).

O matrice de forma $M = I_n - m_r \cdot e_r^T$, unde $e_r^T = [0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]$, se numeşte *matrice Frobenius*. O astfel de matrice are următoarea structură:

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & 0 & ... & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & & -m_{r+1,r} & 1 & ... & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -m_{n,r} & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

De exemplu, dacă $n = 4$ şi $r = 2$, avem:

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{32} \\ m_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & -m_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matricile Frobenius sunt inversabile, după cum se va vedea în continuare:

$$(I_n - m_r \cdot e_r^T) \cdot (I_n + m_r \cdot e_r^T) = I_n + m_r \cdot e_r^T - m_r \cdot e_r^T - m_r \cdot (e_r^T \cdot m_r) \cdot e_r^T.$$

Deoarece $e_r^T \cdot m_r = 0$, rezultă: $M_r \cdot (I_n + m_r \cdot e_r^T) = I_n$.Analog se arată că $(I_n + m_r \cdot e_r^T) \cdot M_r = I_n$, deci M_r este inversabilă şi $M_r^{-1} = (I_n + m_r \cdot e_r^T)$.

Arătăm în continuare că pentru orice matrice pătratică A de ordinul n care satisface

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & & a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ pentru orice } r = 1, ..., n-1,$$

există o matrice inferior triunghiulară $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $U = M \cdot A$ este superior triunghiulară.

Deoarece $a_{11} \neq 0$, putem considera matricea Frobenius

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & ... & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă notăm $A_1 = A$ şi $A_2 = M_1 \cdot A_1$, atunci avem

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & ... & a_{11}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & ... & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix},$$

unde, notând cu $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, pentru $i, j = 1, ..., n$, avem: $a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}$, pentru $j = 1, ..., n$, şi $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \dfrac{a_{i1}^{(1)} a_{1j}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, pentru $i, j = 2, ..., n$.

Observăm că

$$a_{22}^{(2)} = a_{11} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dacă notăm

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -\dfrac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 0 & ... & 1 \end{bmatrix},$$

atunci

$$A_3 = M_2 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & ... & a_{1n}^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & ... & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & ... & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & ... & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix},$$

unde $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)}$, pentru $i = 1, 2, j = 1, ..., n$, şi $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \dfrac{a_{i2}^{(2)} a_{2j}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$, pentru $i, j = 3, ..., n$.

Un calcul simpu ne arată că

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - \frac{a_{32}^{(2)} a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{1}{a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

În general, $a_{rr}^{(r)} \neq 0$ şi se poate arăta considera matricea Frobenius:

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & 0 & ... & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & -\dfrac{a_{r+1,r}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} & & & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & ... & -\dfrac{a_{nr}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă notăm cu $A_{r+1} = M_r \cdot A_r$, atunci

$$A_{r+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(r+1)} & a_{12}^{(r+1)} & ... & a_{1r}^{(r+1)} & ... & a_{1n}^{(r+1)} \\ 0 & a_{22}^{(r+1)} & ... & a_{2r}^{(r+1)} & ... & a_{2n}^{(r+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{rr}^{(r+1)} & ... & a_{rn}^{(r+1)} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{r+1,r+1}^{(r+1)} \; ... & a_{r+1,n}^{(r+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n,r+1}^{(r+1)} \; ... & a_{nn}^{(r+1)} \end{bmatrix},$$

unde $a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)}$, pentru $i = 1, ..., r, j = 1, ..., n$, şi $a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} - \dfrac{a_{ir}^{(r)} a_{rj}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}$, pentru $i, j = r+1, ..., n$.

În final se obţine matricea superior triunghiulară

$$U = A_n = M_{n-1} \cdot ... \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & ... & a_{1r}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & ... & a_{2n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Notăm cu $M = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot ... \cdot M_2 \cdot M_1$ şi astfel obţinem că $U = M \cdot A$.

Exemplul 1. $A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \dfrac{4}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix},$

$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \dfrac{18}{5} & \dfrac{9}{5} \end{bmatrix}, \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{9}{20} & 1 \end{bmatrix},$

$U = A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{9}{4} \end{bmatrix}, \qquad M = M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \dfrac{7}{20} & \dfrac{9}{20} & 1 \end{bmatrix}.$

Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases},$$

a cărui soluţie este $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Sub formă matriceală sistemul se scrie: $Ax = b$. Acest sistem este echivalent cu următorul sistem: $(M_2M_1A)x = (M_2M_1)b$. Efectuând calculele se obţine:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ \quad - 8x_2 + x_3 = -13 \\ \qquad \frac{9}{4}x_3 = \frac{27}{4} \end{cases}.$$

Numărul operaţiilor pentru determinarea matricei U şi a vectorului Mb

Pentru o linie fixată i se calculează $-\frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}$,apoi înmulţirile cu $a_{rj}^{(r)}, r+1 \leq j \leq n$, şi se adună $a_{ij}^{(r)}, r+1 \leq j \leq n$. La fel şi cu $b_i^{(r+1)}$. Sunt $2(n-r)+3$ operaţii pentru fiecare linie $i, r+1 \leq i \leq n$, iar pebtru fiecare etapă vor fi $(n-r)[2(n-r)+3]$ operaţii. În total vor fi $\sum_{r=1}^{n} \left[2(n-r)^2 + 3(n-r)\right] = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$ operaţii elementare. Dacă adăugăm şi cele n^2 operaţii pentru rezolvarea sistemului triunghiular, rezultă că numărul de operaţii pentru rezolvarea sistemului $Ax = b$ este $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$.

În continuare notăm cu $L_r = M_r^{-1}$. După cum s-a văzut mai înainte, L_r este de forma $I_n + m_r \cdot e_r^T$, adică:

$$L_r = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{a_{r+1,r}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} & & & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & \frac{a_{nr}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă notăm cu $L = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_{n-1}$, atunci L este o matrice inferior triunghiulară de felul următor:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $A = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot \dots \cdot M_{n-1}^{-1} \cdot U$, rezultă că:

$$A = L \cdot U. \tag{3}$$

Aşadar, orice matrice pătratică ce îndeplineşte condiţia $\det \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & & a_{rr} \end{bmatrix} \neq 0$ pentru orice $r = 1, ..., n-1$, admite o descompunere unică sub forma (3), unde L este inferior triunghiulară având elementele de pe diagonala principală egale cu 1 şi U este superior triunghiulară.

Descompunerea (3) este cunoscută sub numele de *factorizarea LU*. Algoritmul pentru factorizarea LU este programat în MATLAB şi poate fi apelat cu secvenţa $[L, U] = lu(A)$ (se afişează cele două matrici).

În exemplul precedent avem:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{20} & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observaţia 1. *Dacă pivotul este "foarte mic", adică* $\left|a_{rr}^{(r)}\right| << 1$, *atunci împărţirile la acest pivot produc erori de rotunjire foarte mari, care alterează soluţia. În acest caz se recomandă schimbarea pivotului. Se poate alege un nou pivot*

$$\pi_r = \left|a_{ir}^{(r)}\right| = \max\left\{\left|a_{rr}^{(r)}\right| \mid r \leq j \leq n\right\}$$

sau

$$\pi_r = \left|a_{jr}^{(r)}\right| = \max\left\{\left|a_{kl}^{(r)}\right| \mid r \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n\right\}.$$

Aceasta presupune schimbarea între ele a două linii şi eventual a două coloane.

Dăm în continuare algoritmul MATLAB pentru rezolvarea prin metoda lui Gauss a sistemelor de ecuaţii liniare, fără schimbarea pivotului.

```
Algoritmul Gauss
% Introducere matrice A a coeficienţilor
% Introducere vector b al termenilor liberi
% Introducere n, dimensiunea matricii A
A_v=A;
b_v=b;
for r=1:n-1
    fprintf('Etapa %g',r);
    for i=r+1:n
        for j=1:n
            A(i,j)=A_v(i,j)-(A_v(i,r)*A_v(r,j))/A_v(r,r);
        end
        b(i)=b_v(i)-A_v(i,r)*b_v(r)/A_v(r,r);
    end
    A_v=A;
    b_v=b;
end
```

```
%rezolvarea sistemului triunghiular
x=zeros(n,1);
x(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    s=0;
        for j=i+1:n
            s=s+A(i,j)*x(j);
        end
    x(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
end
disp('Solutia sistemului prin metoda lui Gauss');
x
```