LABORATOR 3 - SISTEME DE ECUAŢII LINIARE. METODA CHOLESKY. METODA HOUSEHOLDER

1. Matrici simetrice pozitiv definite

Reamintim faptul că o matrice simetrică se numeşte *pozitiv definită* dacă forma pătratică asociată este pozitiv definită, mai exact dacă

$$\varphi(x) := x^T A x > 0,$$

pentru orice $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

După cum se cunoaşte de la cursul de algebră liniară, matricea simetrică A este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_r > 0$, pemtru orice $r = 1, ..., n$, unde

$$\Delta_r := \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & ... & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

De fapt, teorema lui Jacobi arată acest lucru. În practică aceste condiţii sunt mai greu de verificat, pentru matrici de dimensiuni mari. De aceea, vom prezenta în continuare câteva condiţii necesare, respectiv suficiente, pentru ca o matrice simetrică să fie pozitiv definită.

Propoziţia 1. *Dacă A este o matrice simetrică pozitiv definită, atunci:*

$$\begin{aligned} a_{ii} &> 0, \forall i = 1, ..., n, \\ a_{ii}a_{jj} &> a_{ij}^2, \forall i, j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Ţinând seama că $a_{ij} = a_{ji}$,avem că

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^T A x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + \\ &\qquad + a_{22}x_2^2 + ... + 2a_{2n}x_2x_n + \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad + a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

În particular, pentru $x = e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ avem $\varphi(e_i) = a_{ii}$. Cum φ este pozitiv definită şi $e_i \neq \theta$, avem că $a_{ii} > 0$.

Pentru un număr real λ avem

$$\varphi(\lambda e_i + e_j) = \lambda^2 a_{ii} + 2a_{ij}\lambda + a_{jj} > 0.$$

Pentru ca inegalitatea de mai sus să fie adevărată pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, trebuie ca

$$\Delta = 4(a_{ij}^2 - a_{ii}a_{jj}) < 0,$$

adică $a_{ii}a_{jj} > a_{ij}^2$. □

Observaţia 1. *Condiţiile care apar în* ***Propoziţia 1*** *sunt doar necesare, nu şi suficiente, după cum arată următorul exemplu.*

Exemplul 1. *Fie* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. *Se observă că A satisface cele două condiţii din* ***Propoziţia 1****, dar nu este pozitiv definită, deoarece dacă alegem vectorul* $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, *avem*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 3(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2) + 4(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= 9 - 12 = -3 < 0. \end{aligned}$$

Vom spune că matricea A este *tare diagonal dominată* dacă elementele sale satisfac următoarea relaţie:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = 1, ..., n.$$

Are loc următorul rezultat:

Teorema 2. *Fie A o matrice simetrică cu următoarele proprietăţi:*
(i) A este tare diagonal dominată;
(ii) $a_{ii} > 0, \forall i = 1, ..., n$.
Atunci A este pozitiv definită.

Demonstraţie. Din condiţia (i) rezultă că dacă $x \neq \theta$, atunci:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_ix_j > \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\, x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\, |x_i|\, |x_j| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\, |x_i|\, (|x_i| - |x_j|). \end{aligned}$$

Cum $a_{ij} = a_{ji}$, avem şi inegaliatea:

$$\varphi(x) > \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|\,(|x_j| - |x_i|).$$

Adunând cele două inegalităţi obţinem că:

$$2\varphi(x) > \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,(|x_i| - |x_j|)^2 \geq 0,$$

adică φ este pozitiv definită. $\square$

2. Metoda Cholesky

Fie A o matrice simetrică, pozitiv definită şi

$$\varphi(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

forma pătratică asociată. Deoarece $a_{11} > 0$ avem:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= \left(\sqrt{a_{11}}x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}} x_j\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} x_i x_j, \end{aligned}$$

unde $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \dfrac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}, i, j = 2, ..., n.$

Dacă notăm cu

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} x_i x_j,$$

atunci φ_1 este la rândul său o formă pătratică pozitiv definită.

Într-adevăr, să presupunem prin absurd că există $z = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \neq 0$ astfel încât $\varphi_1(z) \leq 0$.

Fie $z_1 = -\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} z_j$ şi $\overline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$. În continuare avem:

$$\varphi(\overline{z}) = \left(\sqrt{a_{11}}z_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}} z_j\right)^2 + \varphi_1(z) = 0 + \varphi_1(z) \leq 0,$$

ceaa ce contrazice faptul că φ este pozitiv definită.

Aşadar, am arătat că φ_1 este pozitiv definită. În particular, rezultă că $a_{22}^{(1)} > 0$. Mai departe procedăm cu φ_1 aşa cum am procedat cu φ şi obţinem:

$$\varphi_1(x) = \left(\sqrt{a_{22}^{(1)}} x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}^{(1)}}{\sqrt{a_{22}^{(1)}}} x_j \right)^2 + \varphi_2(x),$$

unde

$$\varphi_2(x) = \sum_{i=3}^{n} \sum_{j=3}^{n} a_{ij}^{(2)} x_i x_j$$

este pozitiv definită. În final φ se reprezintă ca o sumă de pătrate. Mai precis, $\varphi(x)$ admite următoarea scriere:

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{a_{ii}^{(i-1)}} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}^{(i-1)}}{\sqrt{a_{ii}^{(i-1)}}} x_j \right)^2,$$

unde:

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij} \text{ şi } a_{ij}^{(p)} = a_{ij}^{(p-1)} - \frac{a_{pi}^{(p-1)} a_{pj}^{(p-1)}}{a_{pp}^{(p-1)}}, p = 1, ..., n-1.$$

Introducem notaţiile:

$$\begin{aligned} r_{ii} &= \sqrt{a_{ii}^{(i-1)}}, i = 1, ..., n \\ r_{ij} &= \frac{a_{ij}^{(i-1)}}{r_{ii}}, i < j \\ r_{ij} &= 0, i > j \\ a_{ij}^{(p)} &= a_{ij}^{(p-1)} - r_{pi} r_{pj}, p = 1, ..., n-1, i, j = p+1, ..., n. \end{aligned} \tag{1}$$

Cu aceste notaţii avem:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} r_{ij} x_j \right)^2 \\ &= (r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + ... + r_{1n}x_n)^2 + (r_{22}x_2 + ... + r_{2n}x_n)^2 + ... + (r_{nn}x_n)^2. \end{aligned}$$

Dacă notăm cu R următoarea matrice superior triunghiulară:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & ... & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & r_{nn} \end{bmatrix},$$

atunci $\varphi(x) = (x^T R^T)(Rx) = x^T (R^T R) x$. Pe de altă parte, $\varphi(x) = x^T A x$. Se obţine astfel următoarea descompunere a matricii A

$$A = R^T R, \tag{2}$$

unde R este o matrice superior triunghiulară.

Descompunerea (2) poartă numele de *descompunerea Cholesky* a matricii A şi are loc pentru matrici simetrice pozitiv definite.

Numărul de operaţii pentru determinarea matricii R

Pentru a calcula a i-a linie a matricii R sunt necesare $(n-i)(2i-1)+2i-2$ operaţii elementare şi o extragere de rădăcină pătrată. Pentru toate liniile sunt necesare

$$\sum_{i=1}^{n}[(n-i)(2i-1)+2i-2]=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$$

operaţii elementare.

Exemplul 2. *Să se determine descompunerea Cholesky a matricii*

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \sqrt{3}, r_{12}=\frac{2}{\sqrt{3}}, r_{13}=\frac{2}{\sqrt{3}}, a_{22}^{(1)}=a_{22}-r_{12}^2=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}, r_{22}=\sqrt{\frac{5}{3}},\\
a_{23}^{(1)} &= a_{23}-r_{12}r_{13}=\frac{2}{3}, r_{23}=\frac{a_{23}^{(1)}}{r_{22}}=\frac{2}{\sqrt{15}}, a_{33}^{(1)}=a_{33}-r_{13}^2=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3},\\
a_{33}^{(2)} &= a_{33}^{(1)}-r_{23}^2=\frac{5}{3}-\frac{4}{15}=\frac{7}{5}, r_{33}=\sqrt{\frac{7}{5}}.
\end{aligned}$$

$$R=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}}\\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}}\\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{7}{5}} \end{bmatrix}.$$

Se verifică imediat că $R^TR=A$.

Rezolvarea sistemului $Ax=b$ cu metoda Cholesky, în cazul în care matricea A este simetrică şi pozitiv definită, revine la rezolvarea a două sisteme triunghiulare, şi anume:

$$\left\{\begin{array}{c} R^Ty=b\\ Rx=y \end{array}\right. .$$

Algoritmul Cholesky pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

```
% Introducere matrice A a coeficienţilor
% Introducere vector b al termenilor liberi
% Introducere n, dimensiune sistem
R=zeros(size(A))
for p=1:n
    R(p,p)=sqrt(A(p,p));
    if p<n
        for k=p+1:n
            R(p,k)=A(p,k)/R(p,p);
        end
        for i=p+1:n
            for j=p+1:n
                A(i,j)=A(i,j)+R(p,i)*R(p,j);
            end
```

```
            end
        end
    end
    R
    %verificare
    R1=chol(A)
    % Rezolvarea sistemului R^T y = b
    x=zeros(n,1);
    y(1)=b(1)/R(1,1);
    for i=2:n
        s=0;
        for j=1:i-1
            s=s+R(j,i)*y(j);
        end
        y(i)=(b(i)-s)/R(i,i);
    end
    %Rezolvarea sistemului Rx = b
    x(n)=y(n)/R(n,n);
    for i=n-1:-1:1
        s=0;
        for j=i+1:n
            s=s+R(i,j)*x(j);
        end
        x(i)=(y(i)-s)/R(i,i);
    end
    disp('Soluţia sistemului prin metoda Cholesky')
    x
    disp('Verificare')
    A*x
```

3. Metoda Householder. Factorizarea QR

O *matrice Householder* este o matrice de forma $H = I_n - 2hh^T$, unde $h^T = (0, ..., 0, h_i, ..., h_n)$ şi $\|h\|_2 = \sqrt{h_i^2 + ... + h_n^2} = 1$. Se observă că o matrice Householder este simetrică şi are următoarea structură:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ 0 & & & 1-2h_i^2 & -2h_ih_{i+1} & \dots & -2h_ih_n \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & -2h_nh_i & -2h_nh_{i+1} & \dots & 1-2h_n^2 \end{bmatrix}.$$

Mai mult, constatăm că H este ortogonală. Într-adevăr,

$$H^2 = (I_n - 2hh^T)(I_n - 2hh^T) = I_n - 2hh^T - 2hh^T + 4h(h^Th)h^T.$$

Cum $h^Th = 1$, rezultă $H^2 = I_n$, deci $H^{-1} = H = H^T$, adică H este ortogonală.

Un calcul simplu ne arată că $(hh^T)x = (h^T x)h$, pentru orice $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

În continuare ne punem următoarea problemă: *dat fiind un vector coloană $x \neq 0$, se poate determina o matrice Householder H, astfel încât Hx să fie coliniar cu e_1,* unde $e_1^T = (1, 0, ..., 0)$?

Cu alte cuvinte, se poate determina un vector coloană h, cu $\|h\|_2 = 1$ şi un număr real σ astfel încât $Hx = x - 2hh^T x = \sigma e_1$?

Ţinând seama de observaţia de mai sus, aceasta revine la $x - 2(h^T x)h = \sigma e_1$, de unde rezultă $x - \sigma e_1 = 2(h^T x)h$. Aşadar, h trebuie să fie coliniar cu $x - \sigma e_1$. Cum $\|h\|_2 = 1$, rezultă

$$h = \frac{x - \sigma e_1}{\|x - \sigma e_1\|_2}. \tag{3}$$

Pe de altă parte, H fiind ortogonală, avem

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = |\sigma| \, \|e_1\|_2 = |\sigma| \, .$$

Alegem $\sigma = -sgn(x_1) \|x\|_2$ şi facem convenţia $sgn(x_1) = 1$ dacă $x_1 = 0$.

În continuare avem

$$\begin{aligned} x - \sigma e_1 &= \begin{bmatrix} x_1 + sgn(x_1) \|x\|_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (|x_1| + \|x\|_2) \cdot sgn(x_1) \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \|x - \sigma e_1\|_2^2 &= 2\|x\|_2^2 + 2|x_1| \, \|x\|_2 = 2\|x\|_2 (\|x\|_2 + |x_1|). \end{aligned}$$

Înlocuind în (3) obţinem

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\|x\|_2 (\|x\|_2 + |x_1|)}} \begin{bmatrix} (|x_1| + \|x\|_2) \cdot sgn(x_1) \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Se obţine astfel umătorul algoritm pentru determinarea lui h şi deci a matricii H :

$$\begin{aligned} H &= I_n - \beta u u^T \\ \beta &= (\|x\|_2 (\|x\|_2 + |x_1|))^{-1} \\ u &= ((|x_1| + \|x\|_2) \cdot sgn(x_1), x_2, ..., x_n)^T \\ sgn(x_1) &= 1 \text{ dacă } x_1 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Vom arăta în continuare că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nesingulară există o matrice ortogonală H astfel încât matricea $R = HA$ este superior triunghiulară.

Pentru aceasta, considerăm $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$, prima coloană a matricii A. Din cele arătate mai înainte rezultă că există o matrice Householder H_1 astfel încât

$H_1 a_1 = \sigma e_1$. Matricea H_1 se determină astfel:

$$\begin{aligned} s &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (6) \\ \beta &= (s \cdot (s + |a_{11}|))^{-1}, \\ u &= ((|a_{11}| + s) sgn(a_{11}), a_{21}, ..., a_{n1})^T, \\ sgn(a_{11}) &= 1 \text{ dacă } a_{11} = 0, \\ H_1 &= I_n - \beta u u^T. \end{aligned}$$

Dacă notăm cu $A_1 = H_1 A$, atunci A_1 are următoarea formă:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -sgn(a_{11})s & a_{12}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}^{(1)} & ... & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

În continuare considerăm vectorul $a_2^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$ şi determinăm o matrice ortogonală $\widetilde{H_2} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\widetilde{H_2} a_2^{(1)} = \sigma \widetilde{e_1},$$

unde $\widetilde{e_1}^T = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Notăm cu $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{H_2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi cu $A_2 = H_2 A_1$. Matricea A_2 va arăta astfel:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & ... & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & ... & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & ... & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}, \text{ unde } a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, j = 1, ..., n.$$

În continuare se determină o matrice Householder $\widetilde{H_3} \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $\widetilde{H_3} a_3^{(2)} = \sigma \widetilde{\widetilde{e_1}}$, unde $\widetilde{\widetilde{e_1}}^T = (1, 0, ..., 0) \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$. Vom nota cu $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \widetilde{H_3} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi cu $A_3 = H_3 A_2$. Matricea A_3 va avea toate elementele de sub diagonala principală, din primele trei coloane, egale cu zero.Procedeul continuă ca mai înainte, iar în final obţinem o matrice superior triunghiulară $A_{n-1} = H_{n-1} A_{n-2} = H_{n-1} \cdot ... \cdot H_2 H_1 A$. Dacă notăm cu $H = H_{n-1} \cdot ... \cdot H_2 H_1$ şi cu $R = HA$, atunci H este ortogonală şi R este superior triunghiulară. De asemenea, dacă vom nota $Q = H^{-1} = H$, obţinem că $A = QR$, unde Q este ortogonală, iar R este superior triunghiulară.

Algoritmul Householder pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

% Introducere A, matricea coeficienţilor

% Introducere b, coloana termenilor liberi

```
C=[A b];
% Introducere n, dimensiune sistem
for i=1:n
    r=0;
    u=zeros(n,1);
    for j=i:n
        r=r+C(j,i)^2;
    end
    r
    s=sqrt(r);
    if (s==0)
        disp('A este singulara; sistem incompatibil' )
    else
        q=1/(s*(norm(C(i,i))+s));
        if (C(i,i)==0)
            t=1;
        else
            t=sign(C(i,i));
        end
        u(i)=C(i,i)+t*s;
        for j=i+1:n
            u(j)=C(j,i);
        end
        u
        H=eye(n)-q*u*u';
        C=H*C
    end
end
% Rezolvarea sistemului superior triunghiular
x=zeros(n,1);
x(n)=C(n,n+1)/C(n,n);
for i=n-1:-1:1
    s=0;
    for j=i+1:n
        s=s+C(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=(C(i,n+1)-s)/C(i,i);
end
disp('Soluţia sistemului prin metoda Householder')
x
disp('Verificare')
A*x
```

Exemplul 3. *Fie sistemul*

$$\left\{\begin{array}{c} 5x_1+2x_2+x_3=12 \\ 5x_1-6x_2+2x_3=-1 \\ -4x_1+2x_2+x_3=3 \end{array}\right. .$$

Soluţia exactă a sistemului este $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}; c_{11} = 5; s = \sqrt{66} \approxeq 8.12; \beta = \frac{1}{8.12 \cdot 13.12}; u = \begin{bmatrix} 13.12 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix};\\
A_1 &= H_1 A = \begin{bmatrix} -8.12 & 3.45 & -1.35 \\ 0 & -5.45 & 1.1 \\ 0 & 1.56 & 1.72 \end{bmatrix}; b_1 = H_1 b = \begin{bmatrix} -5.29 \\ -7.59 \\ 8.27 \end{bmatrix};\\
a_2^{(1)} &= \begin{bmatrix} -5.45 \\ 1.56 \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} 0 \\ -11.12 \\ 1.56 \end{bmatrix};\\
A_2 &= H_2 A_1 = \begin{bmatrix} -8.12 & 3.45 & -1.35 \\ 0 & 5.67 & -0.59 \\ 0 & 0 & 1.95 \end{bmatrix}; b_2 = H_2 b_1 = \begin{bmatrix} -5.29 \\ 9.57 \\ 5.86 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Se obţine soluţia $x = \begin{bmatrix} 0.999999999 \\ 1.999999999 \\ 2.999999998 \end{bmatrix}$.