LABORATOR 4 - NORME DE MATRICI. METODE ITERATIVE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE.

1. Norme de matrici

Cele mai utilizate norme vectoriale pe $\mathbb{R}^n$ sunt:

$$\begin{aligned} 1) \quad \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2, ..., |x_n||\} \\ 2) \quad \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty, \end{aligned}$$

unde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Definiţia 1. *Se numeşte* ***normă de matrice*** *orice aplicaţie*

$$A \mapsto \|A\|_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$$

cu proprietăţile:

$$\begin{aligned} &i) && \|A\|_M = 0 \text{ dacă şi numai dacă } A = 0; \\ &ii) && \|\lambda A\|_M = |\lambda| \|A\|_M, \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \\ &iii) && \|A + B\|_M \leq \|A\|_M + \|B\|_M, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \\ &iv) && \|AB\|_M \leq \|A\|_M \|B\|_M, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Un exemplu de normă de matrice este *norma euclidiană* de matrice, care se defineşte astfel:

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proprietăţile i) şi ii) sunt evidente. Pentru a demonstra proprietăţile iii) şi iv) se foloseşte inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz pe $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pentru a demonstra iii), evaluăm

$$
\begin{aligned}
\|A+B\|_E^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^2+b_{ij}^2+2a_{ij}b_{ij}\right) \qquad (1)\\
&= \|A\|_E^2+\|B\|_E^2+2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}\right)\\
&\overset{C-B-S}{\leq} \|A\|_E^2+\|B\|_E^2+2\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Notăm

$$x_i=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}, y_i=\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şi avem:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) &= \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_E\,\|B\|_E\,.
\end{aligned}
$$

Folosind relaţiile (1) şi (2), obţinem

$$\|A+B\|_E^2 \leq \left(\|A\|_E+\|B\|_E\right)^2,$$

şi imediat iii).

Pentru iv), notăm $C=AB$. Atunci

$$c_{ij}^2=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)^2 \overset{C-B-S}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_{kj}^2\right).$$

În continuare avem:

$$\|AB\|_E^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{kj}^2\right)=\|A\|_E^2\,\|B\|_E^2\,,$$

de unde rezultă iv).

Definiţia 2. *O normă de matrice $\|\cdot\|_M$ se numeşte* ***compatibilă cu norma vectorială*** *$\|\cdot\|_p$ dacă $\|Ax\|_p \leq \|A\|_M\,\|x\|_p$, pentru orice A şi orice x.*

Observaţia 1. $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E\,\|x\|_2\,, \forall A, x.$

Într-adevăr, $\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right) =$ $\|A\|_E\,\|x\|_2\,.$

Observaţia 2. *Dacă λ este o valoare proprie a matricii A, atunci $|\lambda| \le \|A\|_M$ pentru orice normă de matrice compatibilă cu o normă vectorială.*

Într-adevăr, fie v un vector propriu asociat valorii proprii λ. Atunci avem:

$$|\lambda| \, \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \le \|A\|_M \, \|v\| ,$$

deci $|\lambda| \le \|A\|_M$.

Definiţia 3. *Se numeşte normă a matricii A* ***subordonată normei vectoriale*** $\|\cdot\|_v$ *următorul număr:*

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{3}$$

Ca şi în cazul normei operatoriale, avem:

$$\|A\| = \inf\{c > 0 \mid \|Ax\| \le c\|x\|, \forall x\}. \tag{4}$$

Din relaţia (4) rezultă în particular că $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$, deci norma matriceală (3) este compatibilă cu norma vectorială căreia îi este subordonată.

Este evident că aplicaţia $A \to \|A\|$ definită de (3) satisface proprietăţile i)-iii) din **Definiţia 1**. De asemenea avem:

$$\|ABx\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \, \|B\| \, \|x\| ,$$

de unde folosind (4) rezultă că $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Aşadar, aplicaţia (3) defineşte într-adevăr o normă de matrice.

Definiţia 4. *Dacă $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricii A (λ_i pot fi şi complexe), atunci se notează cu $\rho(A) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$, iar această cantitate se numeşte* ***raza spectrală*** *a matricii A.*

Dăm în continuare fără demonstraţie următoarea teoremă:

Teorema 1. *Pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem:*

(I) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,

(II) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,

(III) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$,

unde cu $\|A\|_p$ am notat norma matricii A subordonată normei vectoriale $\|x\|_p$.

Dacă presupunem că matricea A este simetrică, rezultă că valorile sale proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt reale, iar $A^T A = A^2$ are valorile proprii $\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_n^2$. Mai presupunem că $\lambda_1^2 = \max\limits_{1 \le j \le n} \lambda_j^2$. Din **Teorema 1,** (III), rezultă $\|A\|_2 = |\lambda_1|$. Dacă, în plus, A este şi pozitiv definită, atunci toate valorile proprii sunt strict pozitive, deci în acest caz $\|A\|_2 = \lambda_1$, unde λ_1 este cea mai mare valoare proprie a matricii simetrice şi pozitiv definite A.

2. Metode iterative de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare

Metodele directe de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare se utilizează pentru sisteme care au matricea coeficienţilor densă (aproape toţi coeficienţii sunt nenuli) şi cu un număr de ecuaţii moderat (până la 100 de ecuaţii). Pentru sisteme mari de ecuaţii de ordinul $10^3 \to 10^5$ şi care au matricea coeficienţilor rară (cu multe elemente nule), se utilizează metode iterative de rezolvare numerică.

Să presupunem că sistemul:

$$Ax = b \tag{5}$$

se poate pune sub forma echivalentă

$$x = Bx + c. \tag{6}$$

Forma echivalentă (6) ne sugerează următorul proces iterativ:

$$x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + c, m \geq 0, \tag{7}$$

unde $x^{(0)}$ este un vector arbitrar.

Dacă notăm cu x^* soluţia exactă a sistemului, atunci avem:

$$x^* = Bx^* + c. \tag{8}$$

Fie $e^{(m)} = x^* - x^{(m)}$ vectorul eroare. Din (7) şi (8) rezultă $e^{(m+1)} = Be^{(m)}, m \in \mathbb{N}^*$ şi mai departe

$$e^{(m)} = B^m e^{(0)}. \tag{9}$$

Teorema 2. *Dacă* $\|B\| < 1$, *atunci şirul* $\left(x^{(m)}\right)$ *este convergent şi* $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^*$.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că $\lim\limits_{m\to\infty} e^{(m)} = 0$.

Din relaţia (9) avem

$$\left\|e^{(m)}\right\| = \left\|B^m e^{(0)}\right\| \leq \|B^m\| \left\|e^{(0)}\right\| \leq \|B\|^m \left\|e^{(0)}\right\|.$$

Deoarece $\lim\limits_{m\to\infty} \|B\|^m = 0$, rezultă $\lim\limits_{m\to\infty} e^{(m)} = 0$. □

Teorema 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca şirul* $\left(x^{(m)}\right)$ *definit de (7) să fie convergent este ca* $\rho(B) < 1$, *unde cu* $\rho(B)$ *s-a notat raza spectrală a matricii* B.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că $\lim\limits_{m\to\infty} B^m = 0$ dacă şi numai dacă $\rho(B) < 1$.

De la cursul de Algebră liniară se cunoaşte faptul că matricea B se poate aduce la *forma canonică Jordan*, adică există o matrice nesingulară C astfel încât

$$C^{-1} \cdot B \cdot C = J = \begin{bmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & ... & 0 \\ \vdots & J_{p_2}(\lambda_2) & \vdots \\ 0 & & J_{p_r}(\lambda_r) \end{bmatrix},$$

unde

$$J_p(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

este o *celulă Jordan,* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ sunt valorile proprii ale matricii B, iar $p_1, p_2, ..., p_r$ sunt ordinele de multiplicitate ale acestor valori proprii. Deoarece $C^{-1} \cdot B^m \cdot C =$

J^m, rezultă că $\lim_{m\to\infty} B^m = 0$ dacă şi numai dacă $\lim_{m\to\infty} J^m = 0$. Pe de altă parte, $J = D + N$, unde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & & \lambda_r \end{bmatrix}$$

este o matrice diagonală de ordin n, iar N este o *matrice nilpotentă de ordin* n, adică $N^n = 0$.

În continuare avem $J^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k D^{m-k} N^k$. Deoarece $N^k = 0$ pentru $k \geq n$, vom avea

$$J^m = \sum_{k=0}^{n} C_m^k D^{m-k} N^k. \tag{10}$$

Presupunem că $\rho(B) < 1$. Observăm că $\|D\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| = \rho(B) < 1$. Din (10) rezultă:

$$\|J^m\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!} \|D\|_\infty^{m-k} \|N\|_\infty^k < \sum_{k=0}^{n} \frac{m^k}{k!} \|N\|_\infty^k \cdot (\rho(B))^{m-k}.$$

Cum $\lim_{m\to\infty} m^k (\rho(B))^{m-k} = 0$, rezultă că $\lim_{m\to\infty} \|J^m\|_\infty = 0$, deci că $\lim_{m\to\infty} J^m = 0$, ceea ce este echivalent cu $\lim_{m\to\infty} B^m = 0$.

Reciproc, să presupunem acum că $\lim_{m\to\infty} B^m = 0$ şi, prin reducere la absurd, că $\rho(B) \geq 1$. Atunci există un vector propriu $x \neq 0$ şi o valoare proprie λ, cu $|\lambda| \geq 1$, astfel încât $Bx = \lambda x$ şi deci $B^m x = \lambda^m x$.

Cum $(\lambda^m x)$ nu converge la 0, rezultă că B^m nu converge la 0, ceea ce contrazice presupunerea făcută. □

2.1. **Metoda Jacobi.** Una dintre cele mai cunoscute metode iterative este *metoda Jacobi*. Să presupunem că matricea A a sistemului $Ax = b$ are proprietatea $a_{ii} \neq 0, i = 1, ..., n$. Dacă notăm cu $D = diag(a_{11}, ..., a_{nn})$ şi cu $E = D - A$, atunci obţinem sistemul echivalent $(D - E)x = b$ şi mai departe

$$x = D^{-1}Ex + D^{-1}b. \tag{11}$$

Cum $D^{-1} = diag\left(\frac{1}{a_{11}}, ..., \frac{1}{a_{nn}}\right)$, rezultă că $\left\|D^{-1}E\right\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$.

Observăm că dacă matricea A este tare diagonal dominată, atunci $\left\|D^{-1}E\right\|_\infty < 1$ şi conform **Teoremei 2**, şirul

$$x^{(m+1)} = \left(D^{-1}E\right) x^{(m)} + D^{-1}b, m \geq 0, \tag{12}$$

este convergent pentru orice aproximaţie iniţială $x^{(0)}$.

Exemplul 1. *Fie sistemul*

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

Soluţia exactă este $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4.$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D^{-1}E = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, D^{-1}b = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 3.4 \end{bmatrix}, \left\| D^{-1}E \right\|_\infty = 0.6 < 1.$$

Obţinemurmătorul proces iterativ:

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = 0.2x_2^{(m)} + 0.2x_3^{(m)} + 0.2x_4^{(m)} - 0.8 \\ x_2^{(m+1)} = 0.1x_1^{(m)} + 0.1x_3^{(m)} + 0.1x_4^{(m)} + 1.2 \\ x_3^{(m+1)} = 0.2x_1^{(m)} + 0.2x_2^{(m)} + 0.2x_4^{(m)} + 1.6 \\ x_4^{(m+1)} = 0.1x_1^{(m)} + 0.1x_2^{(m)} + 0.1x_3^{(m)} + 3.4 \end{cases}.$$

Dacă alegem aproximaţia iniţială $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$*, atunci după 5 iteraţii obţinem*

$$x_1^{(5)} = 0.948; x_2^{(5)} = 1.969; x_3^{(5)} = 2.948; x_4^{(5)} = 3.969.$$

Algoritmul MATLAB pentru rezolvarea sistemelor prin metoda Jacobi

```
% Introducere A, matricea coeficienţilor
% Introducere b, vectorul termenilor liberi
% Introducere n, dimensiune sistem
D=diag(diag(A))
E=D-A
B=inv(D)*E
c=inv(D)*b
ro=max(eig(B));
if (ro>=1)
    disp('Metoda Jacobi nu este convergentă');
else
    x=zeros(n,1);
    eps=input('Daţi ordinul erorii soluţiei, eps=');
    i=0;
    while(norm(e,inf)>eps)
        x=B*x+c;
        e=A*x-b;
        i=i+1;
    end
    disp('Solutia aproximativa a sistemului prin metoda Jacobi')
    x
```

```
        fprintf('\neste obtinuta la pasul %g\n',i);
        disp('Verificare')
        A*x
end
```

2.2. **Metoda Gauss-Siedel.** O altă metodă iterativă cunoscută este *metoda Gauss-Siedel* şi corespunde următoarei *spargeri* a matricii coeficienţilor:

$$\begin{aligned} A &= (D+L)+U, \text{ unde } D = diag(a_{11},...,a_{nn}), \\ L &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sistemul (5) devine $(D+L)x = -Ux + b$ şi mai departe obţinem următorul proces iterativ:

$$(D+L)x^{(m+1)} = -Ux^{(m)} + b. \tag{13}$$

Se poate arăta că procesul iterativ Gauss-Siedel este convergent dacă matricea sistemului este tare diagonal dominată.

În cazul exemplului precedent obţinem:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(m+1)} \\ x_2^{(m+1)} \\ x_3^{(m+1)} \\ x_4^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ x_3^{(m)} \\ x_4^{(m)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \\ 34 \end{bmatrix},$$

sau

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = \frac{1}{5}\left(x_2^{(m)} + x_3^{(m)} + x_4^{(m)} - 4\right) \\ x_2^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)} + x_4^{(m)} + 12\right) \\ x_3^{(m+1)} = \frac{1}{5}\left(x_1^{(m+1)} + x_2^{(m+1)} + x_4^{(m)} + 8\right) \\ x_4^{(m+1)} = \frac{1}{10}\left(x_1^{(m+1)} + x_2^{(m+1)} + x_3^{(m+1)} + 34\right) \end{cases}.$$

Pentru $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$, atunci după 5 iteraţii obţinem

$$x_1^{(5)} = 0.995; x_2^{(5)} = 1.998; x_3^{(5)} = 2.998; x_4^{(5)} = 3.999.$$

Algoritmul MATLAB pentru rezolvarea sistemelor prin metoda Gauss-Siedel

```
% Introducere A, matricea coeficienţilor
% Introducere b, vectorul termenilor liberi
% Introducere n, dimensiune sistem
L=tril(A)
U=A-L
B=inv(L)*-U
c=inv(L)*b
ro=max(eig(B));
if (ro>=1)
        disp('Metoda Jacobi nu este convergentă');
else
```

```
    x=zeros(n,1);
    eps=input('Daţi ordinul erorii soluţiei, eps=');
    i=0;
    while(norm(e,inf)>eps)
        x=B*x+c;
        e=A*x-b;
        i=i+1;
    end
    disp('Solutia aproximativa a sistemului prin metoda Gauss-Siedel')
    x
    fprintf('\neste obtinuta la pasul %g\n',i);
    disp('Verificare')
    A*x
end
```