LABORATOR 5 - METODE ITERATIVE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE. METODE DE RELAXARE

1. Metode de relaxare. Principii de bază

Metodele de relaxare sunt metode iterative şi sunt utilizate pentru rezolvarea numerică a sistemelor liniare ce au matricea coeficienţilor simetrică şi pozitiv definită.

Fie sistemul liniar

$$Ax - b = 0, \tag{1.1}$$

unde matricea A a sistemului este simetrică şi pozitiv definită. Dacă $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ este un vector de probă oarecare, atunci notăm cu

$$r = Av - b. \tag{1.2}$$

Vectorul r se numeşte *vector rezidual*.

Scopul oricărei metode de relaxare este ca prin schimbarea sistematică a vectorului v, vectorul rezidual r să se micşoreze, eventual să se anuleze.

În cele ce urmează, pentru orice doi vectori $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ şi $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ vom nota produsul lor scalar cu

$$\langle u, v \rangle = u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n. \tag{1.3}$$

Asociem sistemului 1.1 funcţia pătratică

$$F(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i = \frac{1}{2} \langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle . \tag{1.4}$$

Deoarece A este pozitiv definită, rezultă $Q(v) > 0$ pentru orice $v \neq 0$, unde $Q(v) = \langle Av, v \rangle$. Observăm de asemenea că pentru orice $i = 1, ..., n$ avem

$$\frac{\partial F}{\partial v_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j - b_i,$$

deci vectorul rezidual satisface relaţia

$$r = \operatorname{grad} F. \tag{1.5}$$

Teorema 1. *Problema determinării soluţiei sistemului (1.1) este echivalentă cu problema determinării punctului de minim al funcţiei pătratice (1.4).*

Demonstraţie. Fie v_0 soluţia sistemului 1.1. Atunci $r_0 = Av_0 - b = 0$. Cum $r_0 = \operatorname{grad} F(v_0)$, rezultă $\dfrac{\partial F}{\partial v_i}(v_0) = 0$. Aşadar, $v = v_0$ este punct critic pentru F. Pe de altă parte,

$$d^2F(v_0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} dv_i dv_j > 0.$$

Rezultă că $v = v_0$ este un punct de minim global pentru F.

Reciproc, dacă $v = v_0$ este un punct de minim pentru F atunci

$$\frac{\partial F}{\partial v_i}(v_0) = 0, i = 1, ..., n.$$

Rezultă $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j^0 - b_i = 0, i = 1, ..., n$, deci $v = v_0$ este soluţie pentru 1.1. □

În continuare prezentăm principiul de bază al metodei relaxării. Fie v un vector de probă oarecare, p o direcţie dată şi $D = \{v' = v + tp \mid t \in \mathbb{R}\}$, dreapta care trece prin v şi este paralelă cu p. Ne propunem să determinăm $v'_0 \in D$ astfel încât $F(v'_0) = \min\{F(v') \mid v' \in D\}$. Ţinând seama de 1.4, rezultă

$$\begin{aligned}
F(v') &= \frac{1}{2}\langle A(v+tp), v+tp\rangle - \langle b, v+tp\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle + \frac{t}{2}\langle Av, p\rangle + \frac{t^2}{2}\langle Ap, p\rangle + \frac{t}{2}\langle Ap, v\rangle - t\langle b, p\rangle \\
&= F(v) + \frac{t^2}{2}\langle Ap, p\rangle + t\langle Av, p\rangle - t\langle b, p\rangle \\
&= F(v) + \frac{t^2}{2}\langle Ap, p\rangle + t\langle Av - b, p\rangle \\
&= F(v) + \frac{t^2}{2}\langle Ap, p\rangle + t\langle r, p\rangle .
\end{aligned}$$

Folosim notaţia

$$f(t) = F(v') = F(v+tp) = F(v) + \frac{t^2}{2}\langle Ap, p\rangle + t\langle r, p\rangle . \tag{1.6}$$

Determinăm t astfel încât $f(t) = F(v')$ să fie minimă. Pentru aceasta trebuie ca $f'(t) = 0$, de unde rezultă $t\langle Ap, p\rangle + \langle r, p\rangle = 0$. Aşadar, obţinem

$$t_{\min} = -\frac{\langle r, p\rangle}{\langle Ap, p\rangle}. \tag{1.7}$$

Cum $f''(t) = \langle Ap, p\rangle > 0$, rezultă că vectorul $v'_0 = v + t_{\min}p$ este un punct de minim pentru $F(v')$.

În continuare avem

$$f(t_{\min}) = F(v'_0) = F(v) - \frac{1}{2}\frac{\langle r, p\rangle^2}{\langle Ap, p\rangle},$$

de unde rezultă

$$\Delta F = F(v'_0) - F(v) = -\frac{1}{2}\frac{\langle r, p\rangle^2}{\langle Ap, p\rangle} \le 0.$$

Pentru ca $\Delta F < 0$ trebuie ca $\langle r, p\rangle \neq 0$. Rezultă că direcţia p se alege astfel încât p să nu fie perpendiculară pe r.

Observaţia 1. *Dacă* $r_0' = Av_0' - b$ *este vectorul rezidual corespunzător vectorului* $v_0' = v + t_{\min} p$, *atunci* $\langle r_0', p\rangle = 0$. *Într-adevăr,*

$$\langle r_0', p\rangle = \langle Av - b, p\rangle + t_{\min}\langle Ap, p\rangle = \langle r, p\rangle - \frac{\langle r, p\rangle}{\langle Ap, p\rangle}\langle Ap, p\rangle = 0.$$

Pentru interpretarea geometrică a principiului relaxării considerăm cazul particular $n = 2$.

Ecuaţiile $F(v) = const.$ reprezintă ecuaţiile unor elipse concentrice, al căror centru comun coincide cu punctul de minim al funcţiei F. Într-adevăr, ecuaţia $F(v) = c$ revine la

$$a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 - 2b_1v_1 - 2b_2v_2 = 2c. \tag{1.8}$$

Deoarece A este pozitiv definită, rezultă că

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

deci 1.8 reprezintă o elipsă.

Fie v_0 un vector de probă oarecare şi $c_0 = F(v_0)$. Ecuaţia $F(v) = c_0$ reprezintă o elipsă şi $v = v_0$ aparţine acestei elipse. Deoarece $r_0 = \operatorname{grad} F(v_0)$, rezultă că r_0 este perpendicular pe tangenta în $v = v_0$ la elipsă. Direcţia p_1 o alegem astfel încât să nu fie perpendiculară pe r_0. Fie $v_1 = v_0 + t_{\min} p_1$ şi fie $c_1 = F(v_1)$.

Punctul $v = v_1$ aparţine elipsei $F(v) = c_1$ şi de aemenea aparţine dreptei care trece prin v_0 şi are direcţia p_1. Fie $r_1 = Av_1 - b$. Din **Observaţia 1** avem că r_1 este perpendicular pe direcţia p_1. Pe de altă parte, $r_1 = \operatorname{grad} F(v_1)$ este perpendicular pe tangenta în $v = v_1$ la elipsa $F(v) = c_1$. Rezultă că $v = v_1$ este punctul de tangenţă la elipsa $F(v) = c_1$ al dreptei care trece prin v_0 şi are direcţia p_1.

2. Metoda relaxării simple

Este o metodă specifică mai ales calculelor de mână, având o semnificaţie istorică.

Fie v un vector de probă oarecare şi fie $r = Av - b$ vectorul rezidual corespunzător. Dacă $|r_j| = \max_{1\le i\le n} |r_i|$, atunci alegem $p = e_j$, unde $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T$. Rezultă

$$\begin{aligned} t_{\min} &= -\frac{\langle r, p\rangle}{\langle Ap, p\rangle} = -\frac{r_j}{a_{jj}} \text{ şi} \\ v' &= v + t_{\min} p = v - \frac{r_j}{a_{jj}} e_j. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pe componente avem:

$$v_i' = \begin{cases} v_i, \text{ dacă } i \neq j \\ v_j - \dfrac{r_j}{a_{jj}}, \text{ dacă } i = j. \end{cases} \tag{2.2}$$

De asemenea vom avea $r' = Av' - b = r - \frac{r_j}{a_{jj}} Ae_j$ şi mai departe

$$\begin{cases} r_1' = r_1 - \dfrac{r_j}{a_{jj}} a_{1j} \\ \quad ... \\ r_j' = 0 \\ \quad ... \\ r_n' = r_n - \dfrac{r_j}{a_{jj}} a_{nj} \end{cases} . \tag{2.3}$$

$$\Delta F = F(v) - F(v') = -\frac{1}{2}\frac{r_j^2}{a_{jj}} < 0,$$

ceea ce asigură convergenţa metodei. Deşi convergenţa este asigurată, experienţele numerice arată că aceasta este foarte lentă. Convergenţa este îmbunătăţită dacă matricea A este tare diagonal dominată.

Exemplul 1. $\begin{cases} -x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.6 = 0 \\ 0.2x_1 - x_2 + 0.2x_3 + 0.5 = 0 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 - x_3 + 0.4 = 0 \end{cases}.$

Dacă alegem $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *atunci* $r^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ *şi* $\max\{r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, r_3^{(1)}\} = r_1^{(1)} = 0.6$.

Aşadar $p_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v^{(2)} = v^{(1)} - \frac{r_1^{(1)}}{a_{11}} e_1$ *şi* $r^{(2)} = r^{(1)} - \frac{r_1^{(1)}}{a_{11}} A e_1$.

Pe componente avem:

...

$$\begin{cases} v_1^{(3)} = 0.6 \\ v_2^{(3)} = 0.62 \\ v_3^{(3)} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} r_1^{(3)} = 0.124 \\ r_2^{(3)} = 0 \\ r_3^{(3)} = 0.644 \end{cases},$$

$$r_3^{(3)} = \max\{r_1^{(3)}, r_2^{(3)}, r_3^{(3)}\} = 0.644.$$

Rezultă

$$p_3 = e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v^{(4)} = v^{(3)} - \frac{r_3^{(3)}}{a_{33}} e_3 \text{ şi } r^{(4)} = r^{(3)} - \frac{r_3^{(3)}}{a_{33}} A e_3$$

$$\begin{cases} v_1^{(4)} = 0.6 \\ v_2^{(4)} = 0.62 \\ v_3^{(4)} = 0.644 \end{cases}, \qquad \begin{cases} r_1^{(4)} = 0.2528 \\ r_2^{(4)} = 0.1288 \\ r_3^{(3)} = 0 \end{cases} \quad \textit{etc.}$$

Algoritmul MATLAB pentru metoda relaxării simple

```
clc
% Introducere A, matricea coeficienţilor
% Introducere b, vectorul termenilor liberi
n=size(A);
x=zeros(n,1);
r=A*x-b;
eps=input('Dati ordinul erorii, eps=')
i=0;
while(norm(r,inf)>eps)
    i=i+1
    p=zeros(n,1);
    for j=1:n
        s(j)=norm(r(j));
    end
```

```
    [C,I] = max(s)
    p(I)=1
    t=-r(I)/A(I,I)
    x=x+t*p
    r=A*x-b
end
disp('Solutia sistemului prin metoda relaxarii simple')
x
fprintf('\neste obtinuta la pasul %g.\n',i)
disp('Verificare')
A*x
```

3. Metoda deplasărilor succesive (Gauss-Siedel)

În metoda deplasărilor succesive, direcţia de relaxare urmează ciclic direcţiile $e_1, e_2, ..., e_n$, indiferent de reziduurile respective, după care ciclul se reia. Pentru simplificare presupunem că avem sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - b_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - b_3 = 0 \end{cases}.$$

Fie $v^{(0)}$ vectorul de probă iniţial şi fie $p' = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Conform formulei 2.1 rezultă $v' = v^{(0)} - \dfrac{r_1^{(0)}}{a_{11}} e_1$, iar pe componente

$$\begin{cases} v_1' = v_1^{(0)} - \dfrac{1}{a_{11}} \left(a_{11}v_1^{(0)} + a_{12}v_2^{(0)} + a_{13}v_3^{(0)} - b_1 \right) \\ v_2' = v_2^{(0)} \\ v_3' = v_3^{(0)} \end{cases}.$$

În continuare alegem direcţia de relaxare $p'' = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ şi obţinem vectorul v'' de componente

$$\begin{cases} v_1'' = v_1' \\ v_2'' = v_2^{(0)} - \dfrac{1}{a_{22}} \left(a_{21}v_1' + a_{22}v_2' + a_{23}v_3' - b_2 \right) \\ v_3'' = v_3^{(0)} \end{cases}.$$

În sfârşit, pentru direcţia de relaxare $p''' = e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, obţinem vectorul v''' de componente

$$\begin{cases} v_1''' = v_1'' \\ v_2''' = v_2'' \\ v_3'' = v_3^{(0)} - \dfrac{1}{a_{33}} \left(a_{31}v_1'' + a_{32}v_2'' + a_{33}v_3'' - b_3 \right) \end{cases}.$$

După încheierea acestui ciclu, vectorul găsit va fi notat cu $v^{(1)}$ şi va avea componentele:

$$\left\{\begin{array}{l} v_1^{(1)} = v_1''' = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} v_2^{(0)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} v_3^{(0)} + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ v_2^{(1)} = v_2''' = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} v_1^{(1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} v_3^{(0)} + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ v_3^{(1)} = v_3''' = -\dfrac{a_{31}}{a_{33}} v_1^{(1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}} v_2^{(1)} + \dfrac{b_3}{a_{33}} \end{array}\right. . \tag{3.1}$$

Efectuând calculele obţinem:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11} v_1^{(1)} + a_{12} v_2^{(0)} + a_{13} v_3^{(0)} = b_1 \\ a_{21} v_1^{(1)} + a_{22} v_2^{(1)} + a_{23} v_3^{(0)} = b_2 \\ a_{31} v_1^{(1)} + a_{32} v_2^{(1)} + a_{33} v_3^{(1)} = b_3 \end{array}\right. .$$

În general, pentru un sistem de n ecuaţii, după $m+1$ cicluri se obţine vectorul $v^{(m+1)}$ care verifică ecuaţiile:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11} v_1^{(m+1)} + a_{12} v_2^{(m)} + a_{13} v_3^{(m)} + ... + a_{1n} v_n^{(m+1)} = b_1 \\ a_{21} v_1^{(m+1)} + a_{22} v_2^{(m+1)} + a_{23} v_3^{(m)} + ... + a_{2n} v_n^{(m)} = b_2 \\ ... \\ a_{n1} v_1^{(m+1)} + a_{n2} v_2^{(m+1)} + a_{n3} v_3^{(m+1)} + ... + a_{nn} v_n^{(m+1)} = b_n \end{array}\right. . \tag{3.2}$$

Observaţia 2. *Formulele (3.2) se regăsesc şi în cursul anterior, la metoda Gauss-Siedel.*

Dacă notăm cu

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & 0 \end{bmatrix}, F = E^T \text{ şi } D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix},$$

atunci matricea A admite descompunerea $A = E + D + F$ şi şirul de vectori $v^{(m)}$ verifică relaţia matriceală

$$(D+E)v^{(m+1)} + Fv^{(m)} = b, \tag{3.3}$$

de unde rezultă

$$v^{(m+1)} = -(D+E)^{-1} F v^{(m)} + (D+E)^{-1} b. \tag{3.4}$$

În sfârşit, notând

$$M = -(D+E)^{-1} F \text{ şi } c = (D+E)^{-1} b, \tag{3.5}$$

obţinem procesul iterativ

$$v^{(m+1)} = M v^{(m)} + c. \tag{3.6}$$

Exemplul 2.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D+E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \\
(D+E)^{-1} &= \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 18 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
M &= -(D+E)^{-1}F = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\
\det(M - \lambda I) &= \lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{4}{9}\lambda + \frac{1}{36} \right).
\end{aligned}
$$

Valorile proprii ale matricii M sunt $\lambda_1 = 0.369, \lambda_2 = 0.077, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$. Raza spectrală este $\rho(M) = 0.369 < 1$, deci procesul este convergent.

Teorema 2. *Dacă matricea A este simetrică şi pozitiv definită, procesul iterativ Gauss-Siedel este convergent.*

Demonstraţia se bazează pe faptul că dacă matricea A este simetrică şi pozitiv definită, atunci $\rho(M) < 1$, deci procesul iterativ este convergent.

4. Metoda suprarelaxării

Pentru sisteme mari de ecuaţii, procesul iterativ Gauss-Siedel converge lent, deoarece raza spectrală $\rho(M)$ este în vecinătatea lui 1. Metoda suprarelaxării este o generalizare a metodei Gauss-Siedel, care constă în introducerea unui parametru ω în vederea accelerării convergenţei. Ca şi la metoda Gauss-Siedel, direcţia de relaxare urmează ciclic direcţiile $e_1, e_2, ..., e_n$, dar se înlocuieşte $t_{\min}$ cu $t = \omega t_{\min}$. Exemplificăm metoda pe cazul particular al unui sistem de trei ecuaţii. Fie $v^{(0)}$ vectorul de probă iniţial. După un ciclu în care direcţia de relaxare urmează succesiv direcţiile e_1, e_2, e_3 obţinem vectorul $v^{(1)}$ de componente:

$$
\left\{ \begin{array}{l}
v_1^{(1)} = v_1^{(0)} - \dfrac{\omega}{a_{11}} \left(a_{11}v_1^{(0)} + a_{12}v_2^{(0)} + a_{13}v_3^{(0)} - b_1 \right) \\
v_2^{(1)} = v_2^{(0)} - \dfrac{\omega}{a_{22}} \left(a_{21}v_1^{(1)} + a_{22}v_2^{(0)} + a_{23}v_3^{(0)} - b_2 \right) \\
v_3^{(1)} = v_3^{(0)} - \dfrac{\omega}{a_{33}} \left(a_{31}v_1^{(1)} + a_{32}v_2^{(1)} + a_{33}v_3^{(0)} - b_2 \right)
\end{array} \right. . \tag{4.1}
$$

Dacă $\omega = 1$, obţinem din nou formulele (3.1). După efectuarea calculelor rezultă:

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\omega^{-1}a_{11}v_1^{(1)} + (1-\omega^{-1})a_{11}v_1^{(0)} + a_{12}v_2^{(0)} + a_{13}v_3^{(0)} = b_1 \\
a_{21}v_1^{(1)} + \omega^{-1}a_{22}v_2^{(1)} + (1-\omega^{-1})a_{22}v_2^{(0)} + a_{23}v_3^{(0)} = b_2 \\
a_{31}v_1^{(1)} + a_{32}v_2^{(1)} + \omega^{-1}a_{33}v_3^{(1)} + (1-\omega^{-1})a_{33}v_3^{(0)} = b_3
\end{array} \right. \tag{4.2}
$$

Dacă introducem notaţiile

$$
E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \text{ şi } F = E^T,
$$

relaţiile (4.2) iau forma matriceală

$$(E+\omega^{-1}D)v^{(1)}+[F+(1-\omega^{-1})D]v^{(0)}=b. \tag{4.3}$$

În general, pentru un sistem de n ecuaţii, şirul de vectori $v^{(m)}$ satisface relaţia:

$$(E+\omega^{-1}D)v^{(m+1)}+[F+(1-\omega^{-1})D]v^{(m)}=b. \tag{4.4}$$

În continuare avem

$$v^{(m+1)}=-(E+\omega^{-1}D)^{-1}[F+(1-\omega^{-1})D]v^{(m)}+(E+\omega^{-1}D)^{-1}b.$$

Notăm cu

$$\begin{cases} M(\omega)=-(E+\omega^{-1}D)^{-1}[F+(1-\omega^{-1})D] \\ c(\omega)=(E+\omega^{-1}D)^{-1}b. \end{cases} \tag{4.5}$$

Obţinem astfel procesul iterativ

$$v^{(m+1)}=M(\omega)v^{(m)}+c(\omega). \tag{4.6}$$

Pentru $\omega=1$ obţinem algoritmul Gauss-Siedel. Parametrul optim, ω_{opt}, va fi acela pentru care raza spectrală a matricii $M(\omega)$ va fi minimă. Evident, pentru acest parametru se obţine cea mai rapidă convergenţă.

Se poate demonstra următoarea teoremă.

Teorema 3. *Dacă matricea A este simetrică şi pozitiv definită, metoda suprarelaxării este convergentă pentru orice* $0<\omega<2$.

În particular, rezultă că metoda Gauss-Siedel este convergentă dacă A este simetrică şi pozitiv definită, deoarece corespunde cazului particular $\omega=1$.

Determinarea parametrului optim, ω_{opt}, este posibilă în cazul *matricilor bloc tridiagonale.*

Definiţia 1. *O matrice A se numeşte **bloc tridiagonală** dacă are următoarea structură:*

$$A=\begin{bmatrix} D_1 & F_1 & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ E_1 & D_2 & F_2 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & E_2 & D_3 & F_3 & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & D_4 & & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & D_{m-2} & F_{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & & E_{m-2} & D_{m-1} & F_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 & E_{m-1} & D_m \end{bmatrix},$$

*unde D_i sunt matrici pătratice de diferite ordine, E_k şi F_k sunt, în general, matrici dreptunghiulare: F_k are acelaşi număr de linii ca matricea D_k şi acelaşi număr de coloane ca matricea D_{k+1}, E_k are acelaşi număr de linii cu D_{k+1} şi acelaşi număr de coloane cu D_k. În afara matricilor care intră în bandă, restul elementelor sunt nule. Dacă, în plus, matricile D_i sunt diagonale, matricea A se numeşte **diagonal bloc tridiagonală.***

Prezentăm de asemenea fără demonstraţie următoarea teoremă.

Teorema 4. *Fie A o matrice simetrică, pozitiv definită şi diagonal tridiagonală. Atunci parametrul optim de relaxare este dat de relaţia* $\omega_{opt}=\dfrac{2}{1+\sqrt{1-\lambda_1^2}}$, *unde λ_1 este cea mai mare valoare proprie a matricii* $-D^{-1}(E+F)$.

Exemplul 3. *Fie matricea diagonal bloc tridiagonală*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E+F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

adică $36\lambda^4 + 16\lambda^2 + 1 = 0$. *Rezultă* $\lambda_i = \pm\sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{7}}{18}}$ *şi* $\lambda_1 \approxeq 0.6076$. *Parametrul optim de relaxare* $\omega_{opt} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\lambda_1^2}} \approxeq 1.115$.

Algoritmul MATLAB pentru metoda suprarelaxării

```
clc
% Introducere A, matricea coeficienţilor
% Introducere b, vectorul termenilor liberi
n=size(A);
D=diag(diag(A))
E=tril(A)-D
F=E'
T=-inv(D)*(E+F)
v=eig(T)
ro=max(v)
omega=2/(1+sqrt(1-ro^2))
M=-inv(E+1/omega*D)*(F+(1-1/omega)*D)
c=inv(E+1/omega*D)*b
x=zeros(n,1);
r=A*x-b
eps=input('Dati ordinul erorii, eps=')
```

```
i=0;
while(norm(r,inf)>eps)
      i
      x=M*x+c
      r=A*x-b
end
disp('Solutia sistemului prin metoda suprarelaxarii')
x
fprintf('\neste obtinuta la pasul %g.\n',i)
disp('Verificare')
A*x
```