LABORATOR 7 - SISTEME DE ECUAŢII NELINIARE. METODA APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE

1. Sisteme de ecuaţii neliniare

În acest curs vom aborda problema rezolvării numerice a ecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii neliniare.

Considerăm pentru început sistemul de ecuaţii:

$$\left\{\begin{array}{c} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{array}\right., \tag{1.1}$$

îm care cel puţin una din funcţiile f_i, $i = \overline{1, n}$ nu este liniară. Sub formă vectorială sistemul se scrie:

$$F(x) = 0, \tag{1.2}$$

unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ şi $F(x) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_n(x_1, x_2, ..., x_n))^T$.

Dacă adunăm x în ambii membri şi notăm cu $G(x) = x + F(x)$, sistemul (1.2) se poate pune sub forma echivalentă

$$x = G(x). \tag{1.3}$$

Evident, există şi alte metode de a pune sistemul (1.2) sub forma echivalentă (1.3).

Example 1. *Fie sistemul*

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \end{array}\right.. \tag{1.4}$$

Se observă că prima ecuaţie nu este liniară. Acest sistem se poate pune sub forma echivalentă

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2x_1^2 + x_2^2 - 5 + x_1 = g_1(x_1, x_2) \\ x_2 = x_1 + 3x_2 - 3 = g_2(x_1, x_2) \end{array}\right.. \tag{1.5}$$

Sistemul fiind foarte simplu se poate rezolva prin metoda substituţiei. Înlocuind $x_1 = 3 - 2x_2$ *în prima ecuaţie obţinem*

$$9x_2^2 - 24x_2 + 13 = 0,$$

ecuaţie care are rădăcinile

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

Aşadar soluţiile exacte ale sistemului sunt:

$$M_1\left(\frac{1 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{4 + \sqrt{3}}{3}\right) \text{ şi } M_2\left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{4 - \sqrt{3}}{3}\right).$$

Fie $D = [1,2] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ o vecinătate a punctului M_2. În această vecinătate sistemul (1.4) se poate pune sub forma echivalentă

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{\frac{5-x_2^2}{2}} = \tilde{g}_1(x_1, x_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(3 - x_1) = \tilde{g}_2(x_1, x_2) \end{array} \right. . \tag{1.6}$$

Sistemele (1.5) şi (1.6) sunt variante echivalente (de tipul (1.3)) ale sistemului (1.4), în vecinătatea punctului M_2.

În continuare vom prezenta o metodă numerică de rezolvare aproximativă a sistemelor neliniare.

2. Metoda aproximaţiilor succesive

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime convexă, mărginită şi închisă şi fie sistemul

$$x = G(x), \quad x \in D.$$

Presupunem de asemenea că $G \in \mathcal{C}^1(D)$. În aceste condiţii există

$$m_{ij} = \sup_{x \in D} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right|, i, j = \overline{1, n}.$$

Notăm cu

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & ... & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & ... & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

Theorem 1. *Dacă $G \in \mathcal{C}^1(D), G(D) \subset D$ şi $\|M\|_\infty < 1$, atunci sistemul $x = G(x)$ admite o singură soluţie în domeniul D, care se determină cu metoda aproximaţiilor succesive.*

Proof. Fie $x \in D$ şi $y \in D$ oarecare. Din Teorema lui Lagrange pentru funcţii de mai multe variabile, rezultă că pentru orice $i = \overline{1, n}$, există

$$\xi_i = x + \theta_i(y - x), \text{ cu } \theta_i \in (0, 1),$$

astfel încât

$$\begin{aligned} g_i(x) - g_i(y) &= dg(\xi_i)(x - y) \\ &= \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(\xi_i)(x_1 - y_1) + ... + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(\xi_i)(x_n - y_n). \end{aligned}$$

Ţinând seama că

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq m_{ij}, \forall x \in D,$$

rezultă

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_i(y)| &\leq m_{i1} |x_1 - y_1| + ... + m_{in} |x_n - y_n| \\ &\leq \|x - y\|_\infty \sum_{j=1}^n m_{ij} \end{aligned}$$

şi mai departe

$$\begin{aligned} \|G(x)-G(y)\|_\infty &\le \max_{1\le i\le n}|g_i(x)-g_i(y)| \\ &\le \|x-y\|_\infty \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \|x-y\|_\infty \|M\|_\infty . \end{aligned}$$

Cum $\|M\|_\infty < 1$, reyultă că aplicaţia $G : D \to D$ este o contracţie.

Conform teoremei de punct fix a lui Banach rezultă că există $x^* \in D$, unic, astfel încât $x^* = G(x^*)$. Aşadar x^* etse soluţia unică a sistemului (1.3) din domeniul D. Această soluţie se află cu metoda aproximaţiilor succesive. Fie $x^{(0)} \in D$ oarecare şi fie şirul aproximaţiilor succesive

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}), k \in \mathbb{N}.$$

Acest şir este convergent în $\mathbb{R}^n$ şi limita sa $x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ este soluţia sistemului (1.3) şi deci a sistemului echivalent (1.1), respectiv (1.2). Teorema lui Banach ne dă şi evaluarea erorii şi anume

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \le \frac{\|M\|_\infty^k}{1-\|M\|_\infty}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty . \tag{2.1}$$

□

Considerăm din nou sistemul (1.4) din Exemplul 1. În domeniul $D = [1,2] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{5-x_2^2}{2}} = g_1(x_1,x_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(3-x_1) = g_2(x_1,x_2) \end{cases}.$$

În acest domeniu, sistemul admite o singură soluţie, şi anume

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+2\sqrt{3}}{3} \simeq 1.4880338 \\ x_2 = \frac{4-\sqrt{3}}{3} \simeq 0.7559831 \end{cases}.$$

Deoarece $x_1 \in [1,2]$ şi $x_2 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\le \frac{3-x_1}{2} = g_2(x_1,x_2) \le \frac{3}{2} \text{ şi} \\ 1 &\le \sqrt{\frac{11}{8}} \le \sqrt{\frac{5-x_2^2}{2}} = g_1(x_1,x_2) \le \sqrt{\frac{19}{8}} \le 2. \end{aligned}$$

Aşadar, $G(D) \subset D$. În continuare avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) &= 0, \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) = -\frac{x_2}{\sqrt{10-2x_2^2}}, \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) = -\frac{1}{2}, \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) = 0, \\ m_{11} &= m_{22} = 0, m_{12} = \frac{3}{\sqrt{22}}, m_{21} = \frac{1}{2}, \\ \|M\|_\infty &= \|M\|_1 = \frac{3}{\sqrt{22}} < 1 \text{ şi } \|M\|_2 = \sqrt{\frac{29}{44}} < 1. \end{aligned}$$

Alegem $x_1^{(0)} = 1.5$ şi $x_2^{(0)} = 1$ (centrul dreptunghiului).

Algoritmul MATLAB pentru metoda aproximaţiilor succesive

```
x=[1.5;1]
x_v=x;
x(1)=sqrt((5-x(2)^2)/2);
x(2)=(3-x(1))/2;
i=0
eps=input('Dati ordinul erorii, eps=')
while(norm(x-x_v)>eps)
    i=i+1
    x_v=x;
    x(1)=sqrt((5-x(2)^2)/2);
    x(2)=(3-x(1))/2;
    x
end
disp('Solutia prin metoda aproximatiilor succesive')
x
fprintf('\ncu ordinul de eroare %g\neste obtinuta la pasul %g.\n',eps,i)
```

Se obţin următoarele valori pentru şirul aproximaţiilor succesive:

Nr.de iteraţii	0	1	2	3	4	5	6
x_1	1.5	1.478397	1.486805	1.487877	1.488014	1.488031	1.488033
x_2	1.0	0.760801	0.756597	0.756061	0.755992	0.755984	0.755983

În continuare prezentăm metoda aproximaţţilor succesive pentru o singură ecuaţie neliniară.

Fie deci ecuaţia

$$f(x) = 0, x \in [a, b].$$

Această ecuaţie se pune sub forma echivalentă

$$x = g(x), x \in [a, b].$$

Din Teorema 1 rezultă că dacă

$$g \in \mathcal{C}^1[a, b], g : [a, b] \to [a, b] \text{ şi } \|g'\| = \sup_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1,$$

atunci ecuaţia admite o singură rădăcină în intervalul $[a, b]$ şi aceasta este $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, unde

$$x_{k+1} = g(x_k), k \in \mathbb{N},$$

iar $x_0 \in [a, b]$ este arbitrar.

Example 2. *Fie ecuaţia*

$$x^5 - x - 0.2 = 0, x \in [-0.3, -0.2].$$

Forma echivalentă este

$$x = x^5 - 0.2, x \in [-0.3, -0.2].$$

Avem $g' = x^4$ *şi* $\|g'\| = 0.0405 < 1$. *Se poate alege* $x_0 = -0.3$. *Şirul aproximaţiilor succesive este*

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k^5 - 0.2 \\ x_0 = -0.3 \end{cases}.$$