LABORATOR 8 - ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII NELINIARE. METODA NEWTON-RAPHSON

1. Metoda Newton-Raphson

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime convexă, mărginită şi închisă şi fie sistemul neliniar

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} . \tag{1.1}$$

Presupunem că $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in D$ este o *soluţie izolată* a sistemului (1.1) şi că $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T \in D$ este un punct "*apropiat*" de α (adică $\left\|\alpha - x^{(0)}\right\| << 1$). Presupunem, de asemenea, că funcţiile $f_i, i = \overline{1, n}$ sunt de clasă C^1 pe D. În aceste condiţii, dacă $x \in D$ se află într-o vecinătate suficient de mică a punctului $x^{(0)}$ avem:

$$f_i(x) \approx f_i(x^{(0)}) + df_i(x^{(0)})(x - x^{(0)}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Rezultă că sistemul (1.1) se poate înlocui cu sistemul liniar "*apropiat*"

$$\begin{cases} f_1(x^{(0)}) + df_1(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0 \\ \quad ... \\ f_n(x^{(0)}) + df_n(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0 \end{cases} . \tag{1.2}$$

Sub formă vectorială sistemul (1.2) se scrie:

$$F(x^{(0)}) + dF(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0, \tag{1.3}$$

unde

$$F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T \text{ şi } dF = (df_1, df_2, ..., df_n)^T.$$

Deoarece sistemul (1.3) este "*apropiat*" de sistemul (1.1), ne aşteptăm ca soluţia sa, $x^{(1)}$, să fie "*apropiată*" de soluţia α a sistemului (1.1).
Aşadar, $x^{(1)}$ verifică relaţia

$$F(x^{(0)}) + dF(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) = 0.$$

În continuare considerăm sistemul liniar

$$F(x^{(1)}) + dF(x^{(1)})(x - x^{(1)}) = 0$$

şi ne aşteptăm ca soluţia sa, $x^{(2)}$, să se "*apropie*" mai mult de α. Aşadar, $x^{(2)}$ verifică relaţia

$$F(x^{(1)}) + dF(x^{(1)})(x^{(2)} - x^{(1)}) = 0.$$

În general, considerăm şirul de vectori $(x^{(p)})$ cu proprietatea

$$F(x^{(p)}) + dF(x^{(p)})(x^{(p+1)} - x^{(p)}) = 0 \tag{1.4}$$

şi ne aşteptăm ca $(x^{(p)})$ să conveargă la α.

Reamintim că pentru orice $a \in D$ şi orice $h = (h_1, h_2, ..., h_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$dF(a)(h) = J_F(a)h,$$

unde

$$J_F(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

este matricea jacobiană asociată lui F.

Pentru o funcţie f, dacă există, diferenţiala de ordinul doi este dată de formula:

$$d^2 f(a) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i d_{x_j}.$$

Reamintim, de asemenea, formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile: considerăm $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi convexă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^2(A)$ şi $\bar{x} \in A$. Atunci pentru orice $x \in A$ există $\xi \in \{z \in A \mid z = \theta x + (1-\theta)\bar{x}, \theta \in (0,1)\}$ astfel încât:

$$f(x) = f(\bar{x}) + df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} d^2 f(\xi)(x - \bar{x}, x - \bar{x}).$$

Presupunând că $J_F(\alpha)$ este nesingulară, atunci, din continuitate, rezultă că există o vecinătate V a punctului α astfel încât $J_F(x)$ este nesingulară pentru orice $x \in V$. În această condiţie, din (1.4) rezultă

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - J_F(x^{(p)})^{-1} F(x^{(p)}), \quad p \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Teorema 1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime convexă, mărginită şi închisă, $\alpha \in D$ o soluţie izolată a sistemului $F(x) = 0$ şi fie $r > 0$ astfel încât*

$$B_r(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \alpha\| < r\} \subset D.$$

Presupunem că:

(i) $F \in C^2(\operatorname{int} D)$;

(ii) Există $M_1 > 0$ astfel încât $\left\|J_F(x)^{-1}\right\|_\infty \leq M_1$, pentru orice $x \in B_r(\alpha)$;

(iii) Există $M_2 > 0$ astfel încât $\left|\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq M_2$, pentru orice $x \in B_r(\alpha)$ şi orice $i, j, k = \overline{1,n}$.

Atunci şirul $(x^{(p)})$ definit de (1.5) are proprietăţile:

(a) $\left\|x^{(p+1)} - \alpha\right\|_\infty \leq \frac{1}{2} n^2 M_1 M_2 \left\|x^{(p)} - \alpha\right\|_\infty^2$;

(b) Dacă $\frac{1}{2} n^2 M_1 M_2 \left\|x^{(0)} - \alpha\right\|_\infty < 1$, atunci şirul $(x^{(p)})$ este convergent şi $\lim\limits_{p\to\infty} x^{(p)} = \alpha$.

Demonstraţie. Aplicăm formula lui Taylor pentru funcţiile f_k şi pentru $\bar{x} = x^{(p)}, x = \alpha$. Rezultă că pentru orice $k = \overline{1,n}$ şi pentru orice $p \in \mathbb{N}$ există un punct $\xi_k^{(p)}$ pe segmentul deschis de dreaptă de capete $x^{(p)}$ şi α astfel încât

$$f_k(\alpha) - f(x^{(p)}) = df_k(x^{(p)})(\alpha - x^{(p)}) + \frac{1}{2!} d^2 f_k(\xi_k^{(p)})(\alpha - x^{(p)}, \alpha - x^{(p)}).$$

Ţinând seama că

$$d^2 f_k(\xi_k^{(p)}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_k^{(p)}) dx_i d_{x_j}$$

şi de ipoteza (iii), avem că

$$\begin{aligned}\left|f_k(\alpha)-f(x^{(p)})-df_k(x^{(p)})(\alpha-x^{(p)})\right| &\le \frac{1}{2}M_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_i-x_i^{(p)}\right|\left|\alpha_j-x_j^{(p)}\right|\\ &\le \frac{1}{2}n^2M_2\left\|\alpha-x^{(p)}\right\|_\infty^2, \forall k=\overline{1,n}.\end{aligned}$$

În continuare, avem

$$\begin{aligned}&\left\|F(\alpha)-F(x^{(p)})-dF(x^{(p)})(\alpha-x^{(p)})\right\|_\infty\\ &= \max_{k=\overline{1,n}}\left|f_k(\alpha)-f(x^{(p)})-df_k(x^{(p)})(\alpha-x^{(p)})\right| \qquad (1.6)\\ &\le \frac{1}{2}n^2M_2\left\|\alpha-x^{(p)}\right\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Pe de altă parte, $F(\alpha)=0$ şi din (1.4) rezultă

$$-F(x^{(p)})+dF(x^{(p)})(x^{(p)})=dF(x^{(p)})(x^{(p+1)}). \qquad (1.7)$$

Din (1.6) şi (1.7) rezultă

$$\left\|dF(x^{(p)})(x^{(p+1)}-\alpha)\right\|_\infty \le \frac{1}{2}n^2M_2\left\|\alpha-x^{(p)}\right\|_\infty^2,$$

sau, echivalent,

$$\left\|J_F(x^{(p)})(x^{(p+1)}-\alpha)\right\|_\infty \le \frac{1}{2}n^2M_2\left\|\alpha-x^{(p)}\right\|_\infty^2.$$

În sfârşit, ţinând seama şi de ipoteza (ii), avem

$$\begin{aligned}\left\|x^{(p+1)}-\alpha\right\|_\infty &= \left\|J_F(x^{(p)})^{-1}J_F(x^{(p)})(x^{(p+1)}-\alpha)\right\|_\infty\\ &\le \left\|J_F(x^{(p)})^{-1}\right\|_\infty\left\|J_F(x^{(p)})(x^{(p+1)}-\alpha)\right\|_\infty\\ &\le M_1\frac{1}{2}n^2M_2\left\|\alpha-x^{(p)}\right\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Aşadar, am demonstrat afirmaţia (a).

Dacă notăm cu $c=\frac{1}{2}n^2M_1M_2$, din (a) rezultă

$$\left\|x^{(p+1)}-\alpha\right\|_\infty \le c\left\|\alpha-x^{(p)}\right\|_\infty^2. \qquad (1.8)$$

Particularizând indicele p, obţinem succesiv

$$\begin{aligned}\left\|x^{(1)}-\alpha\right\|_\infty &\le c\left\|\alpha-x^{(0)}\right\|_\infty^2\\ \left\|x^{(2)}-\alpha\right\|_\infty &\le c\left\|\alpha-x^{(1)}\right\|_\infty^2 \le c^3\left\|\alpha-x^{(0)}\right\|_\infty^4\\ \left\|x^{(3)}-\alpha\right\|_\infty &\le c\left\|\alpha-x^{(2)}\right\|_\infty^2 \le c^7\left\|\alpha-x^{(0)}\right\|_\infty^8\\ &\dots\\ \left\|x^{(p+1)}-\alpha\right\|_\infty &\le c\left\|\alpha-x^{(p)}\right\|_\infty^2 \le c^{2^p-1}\left\|\alpha-x^{(0)}\right\|_\infty^{2^p}=\frac{1}{c}(c\left\|\alpha-x^{(0)}\right\|_\infty)^{2^p}.\end{aligned}$$

Dacă $c\left\|x^{(0)}-\alpha\right\|_\infty<1$, atunci $\lim_{p\to\infty}\left\|x^{(p+1)}-\alpha\right\|_\infty=0$, deci $(x^{(p)})$ este convergent şi $\lim_{p\to\infty}x^{(p)}=\alpha$. Cu aceasta teorema este demonstartă. □

Exemplul 1. *Reluăm sistemul din cursul anterior*

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0 \\ f_2(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \end{array}\right. . \tag{1.9}$$

În domeniul $D = [1,2] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ *sistemul admite o singură soluţie şi anume*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1+2\sqrt{3}}{3} \simeq 1.4880338 \\ x_2 = \frac{4-\sqrt{3}}{3} \simeq 0.7559831 \end{array}\right. .$$

Considerăm

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}; J_F(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 & 2x_2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; J_F\left(\frac{3}{2},1\right) = \begin{bmatrix} 6 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \\ J_F\left(\frac{3}{2},1\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{21} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}; f_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{16}; f_2\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right) = 0. \end{aligned}$$

Conform (1.5) avem:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{21} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{125}{84} \\ \frac{127}{168} \end{bmatrix}.$$

Se continuă în mod analog, având în vedere că

$$\begin{aligned} J_F(x)^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4x_1-x_2} & -\frac{x_2}{4x_1-x_2} \\ -\frac{1}{2(4x_1-x_2)} & \frac{4x_1}{2(4x_1-x_2)} \end{bmatrix}, \\ x_1 &\in [1,2]; x_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]; \\ \left\|J_F(x)^{-1}\right\|_\infty &= \max\left\{\frac{1+x_2}{4x_1-x_2}; \frac{1+4x_1}{2(4x_1-x_2)}\right\} \le \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Aşadar, putem lua $M_1 = \frac{9}{5}$. *Apoi*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x) &= 4; \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = 0; \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(x) = 2; \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(x) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(x) = 0. \end{aligned}$$

Deci, putem alege $M_2 = 4$. *Avem în continuare*

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \alpha \approx \begin{bmatrix} 1.488 \\ 0.755 \end{bmatrix}, \left\|x^{(0)} - \alpha\right\|_\infty \approx \max\{0.012, 0.005\} = 0.012. \\ \frac{1}{2}n^2 M_1 M_2 \left\|x^{(0)} - \alpha\right\|_\infty &\approx \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{9}{5} \cdot 4 \cdot 0.012 = 0.1728 < 1. \end{aligned}$$

Prezentăm în continuare algoritmul MATLAB pentru rezolvarea acestui sistem:

```
clc
format short
x=[3/2;3/4]
f=[2*x(1)^2+x(2)^2-5;x(1)+2*x(2)-3]
eps=input('Dati ordinul erorii, eps=')
i=0
while(norm(f,inf)>eps)
    i=i+1
```

```
    J(1,1)=4*x(1);
    J(1,2)=2*x(2);
    J(2,1)=1;
    J(2,2)=2;
    x=x-inv(J)*f
    f=[2*x(1)^2+x(2)^2-5;x(1)+2*x(2)-3]
end
disp('Solutia prin metoda Newton-Raphson este')
x
fprintf('\nsi are ordinul de eroare %e.\n',eps)
```

Inconvenientul major al metodei Newton-Raphson constă în faptul că necesită calcularea la fiecare pas a lui $J_F(x^{(p)})^{-1}$. Din motive de continuitate, putem presupune că într-o vecinătate destul de mică a punctului $x^{(0)}$ avem $J_F(x^{(p)})^{-1} = J_F(x^{(0)})^{-1}$. Se obţine astfel metoda lui ewton modificată:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^{(p+1)} = v^{(p)} - J_F(x^{(0)})^{-1}F(v^{(p)}), \quad p \in \mathbb{N} \\ v^{(0)} = x^{(0)} \end{array} \right. . \tag{1.10}$$

Observă că $v^{(1)} = x^{(1)}$, dar în general $v^{(p)} \neq x^{(p)}$ pentru $p > 1$. L. Kantorovich a studiat metoda Newton modificată şi a dat condiţii suficiente care asigură convergenţa algoritmului (1.10).

În continuare vom studia metoda Newton-Raphson pentru o singură ecuaţie neliniară. Fie aşadar ecuaţia neliniară

$$f(x) = 0, \quad x \in [a,b]. \tag{1.11}$$

Presupunem că ecuaţia (1.11) admite o singură rădăcină $\alpha \in [a,b]$. Algoritmul (1.5) revine la:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{f'(x_p)}, \quad p \in \mathbb{N} \\ x_0 \in [a,b] \end{array} \right. . \tag{1.12}$$

Din punct de vedere geometric, x_{p+1} reprezintă abscisa punctului în care tangenta la graficul funcţiei f în punctul $M_p(x_p, f(x_p))$ întâlneşte axa Ox. Într-adevăr, ecuaţia tangentei la grafic în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Fie x_1 abscisa punctului în care această tangentă întâlneşte axa Ox. Avem

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

şi mai departe

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

adică prima iteraţie din (1.12).

Fie $m_1 = \inf\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Atunci putem lua $M_1 = \frac{1}{m_1}$. Evident $m_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| = M_2$. Algoritmul este convergent dacă

$$\frac{1}{2} M_1 M_2 |\alpha - x_0| < 1.$$

Exemplul 2. *Considerăm ecuaţia* $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0, x \in [2,3]$. *Ecuaţia admite o singură rădăcină reală* α *în* $(2,3)$, *deoarece* $f(2) = -1 < 0, f(3) = 16 > 0, f'(x) = 3x^2 - 2 > 0, \forall x \in (2,3)$. *Algoritmul este*

$$\begin{cases} x_{p+1} = x_p - \frac{x_p^3 - 2x_p - 5}{3x_p^2 - 2}, \quad p \in \mathbb{N} \\ x_0 \in (2,3). \end{cases} \tag{1.13}$$

Avem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2, M_1 = \frac{1}{10}, f''(x) = 6x, M_2 = 18, \\ \frac{1}{2} M_1 M_2 \left|\alpha - x_0\right| &< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot 18 < 1, \end{aligned}$$

de unde convergenţa şirului $(x^{(p)})$ *definit de (1.13).*