LABORATOR 9 - VECTORI ŞI VALORI PROPRII. INTERPOLAREA FUNCŢIILOR

1. Vectori şi valori proprii. Metoda rotaţiilor a lui Jacobi

Fie A o matrice pătratică. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte *vector propriu* în raport cu A dacă $x \neq 0$ şi există un număr λ (real sau complex) astfel încât $Ax = \lambda x$. Numărul λ se numeşte *valoare proprie*. Valorile proprii ale matricii A sunt rădăcinile polinomului caracteristic $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ şi sunt invariante la transformările de similitudine ale lui A; acest lucru înseamnă că valorile proprii ale matricii A coincid cu valorile proprii ale matricii $C^{-1}AC$, oricare ar fi matricea nesingulară C.

Dacă matricea A este simetrică, atunci valorile sale proprii sunt reale şi există o bază ortonormală formată din vectori proprii, deci cu proprietatea $Av_i = \lambda_i v_i, i = \overline{1, n}$, în raport cu care matricea A se reduce la forma diagonală

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Baza $v_1, ..., v_n$ se poate alege astfel încât $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$. Dacă, în plus, A este şi pozitiv definită, atunci $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n > 0$ şi

$$\lambda_1 = \|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Fie V matricea de trecere de la baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^n$ la baza $v_1, ..., v_n$. Matricea V este ortogonală, şi are loc relaţia $D = V^T AV$.

În practică, valorile proprii ale matricii A nu se rezolvă rezolvând numeric ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I) = 0$, deoarece rădăcinile polinoamelor sunt foarte "sensibile" la orice modificare a coeficienţilor polinomului. Metoda recomandată este să se aducă, printr-un procedeu oarecare, matricea la forma diagonală şi atunci valorile proprii se determină global, ele fiind elementele de pe diagonala principală. Se urmăreşte aşadar ca prin transformări de similitudine, care nu modifică valorile proprii, să micşorăm, eventual până la anulare, elementele nediagonale ale matricii, astfel ca în final să obţinem matricea diagonală.

Fie A o matrice simetrică. Metoda Jacobi constă în efectuarea unei suite de transformări de similitudine ale matricii A utilizănd cele mai simple matrici ortogonale netriviale (matricile de rotaţie) de forma

$$(1.1)\qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & & & & \vdots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \cos\varphi & & & & \sin\varphi & \dots & \dots & 0 \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & -\sin\varphi & & & & \cos\varphi & \dots & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \vdots & & & & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \\ \end{array} .$$

Aşadar, elementele matricii U sunt:

$$(1.2)\qquad \begin{cases} u_{ii} = 1 \text{ dacă } i \neq p \text{ şi } i \neq q \\ u_{pp} = \cos\varphi, u_{pq} = \sin\varphi \\ u_{qp} = -\sin\varphi, u_{qq} = \cos\varphi \\ u_{ij} = 0, \text{ în rest} \end{cases} .$$

O asemenea matrice este ortogonală şi reprezintă din punct de vedere geometric o rotaţie de unghi φ în planul determinat de direcţiile e_p şi e_q. Notăm cu $A' = U^T A$ şi cu $A'' = A'U = U^T AU$. În cazul particular $n = 5, p = 2$ şi $q = 4$, matricea A'' arată astfel:

a_{11}	$a_{12}\cos\varphi$ $-a_{14}\sin\varphi$	a_{13}	$a_{12}\sin\varphi$ $+a_{14}\cos\varphi$	a_{15}
$a_{21}\cos\varphi$ $-a_{41}\sin\varphi$	$a_{22}\cos^2\varphi-$ $2a_{24}\sin\varphi\cos\varphi+$ $a_{44}\sin^2\varphi$	$a_{23}\cos\varphi$ $-a_{43}\sin\varphi$	$(a_{22}-a_{44})\sin\varphi$ $\cos\varphi + a_{24}\cos 2\varphi$	$a_{25}\cos\varphi$ $-a_{45}\sin\varphi$
a_{31}	$a_{32}\cos\varphi$ $-a_{34}\sin\varphi$	a_{33}	$a_{32}\sin\varphi$ $+a_{34}\cos\varphi$	a_{35}
$a_{21}\sin\varphi$ $+a_{41}\cos\varphi$	$(a_{22}-a_{44})\sin\varphi$ $\cos\varphi + a_{24}\cos 2\varphi$	$a_{23}\sin\varphi$ $+a_{43}\cos\varphi$	$a_{22}\sin^2\varphi+$ $2a_{24}\sin\varphi\cos\varphi+$ $a_{44}\cos^2\varphi$	$a_{25}\sin\varphi$ $+a_{45}\cos\varphi$
a_{51}	$a_{52}\cos\varphi$ $-a_{54}\sin\varphi$	a_{53}	$a_{52}\sin\varphi$ $+a_{54}\cos\varphi$	a_{55}

În general, elementele matricii A sunt:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} a'_{ij} = a_{ij}, \text{ dacă } i \neq p \text{ şi } i \neq q \\ a'_{pj} = a_{pj}\cos\varphi - a_{qj}\sin\varphi \\ a'_{qj} = a_{pj}\sin\varphi + a_{qj}\cos\varphi \end{cases} ,$$

iar cele ale matricii A'' sunt:

$$\left\{\begin{array}{l} a''_{ij} = a'_{ij},\ \text{dacă } j \neq p \text{ şi } j \neq q \\ a''_{ip} = a'_{ip}\cos\varphi - a'_{iq}\sin\varphi \\ a'_{iq} = a'_{ip}\sin\varphi + a'_{iq}\cos\varphi \end{array}\right. . \tag{1.4}$$

Din (1.3) şi (1.4) rezultă:

$$\left\{\begin{array}{l} a''_{pp} = a_{pp}\cos^2\varphi - 2a_{pq}\cos\varphi\sin\varphi + a_{qq}\sin^2\varphi \\ a''_{qq} = a_{pp}\sin^2\varphi + 2a_{pq}\cos\varphi\sin\varphi + a_{qq}\cos^2\varphi \\ a''_{pq} = (a_{pp} - a_{qq})\sin\varphi\cos\varphi + a_{pq}\cos 2\varphi \\ a''_{qp} = a''_{pq} \end{array}\right. . \tag{1.5}$$

Cum intenţia noastră este ca elementul nediagonal cel mai mare (în valoare absolută) să se anuleze în urma rotaţiei, vom alege liniile p şi q astfel încât a_{pq} să fie cel mai mare element (în valoare absolută) de deasupra diagonalei principale şi vom pune condiţia ca $a''_{pq} = 0$. Ţinând seama de (1.5) rezultă

$$\frac{1}{2}(a_{pp} - a_{qq})\sin 2\varphi + a_{pq}\cos 2\varphi = 0$$

şi mai departe

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{qq} - q_{pp}}{2a_{pq}}. \tag{1.6}$$

Aşadar, unghiul de rotaţie se află din relaţia (1.6). Introducem notaţiile

$$\theta = \frac{a_{qq} - q_{pp}}{2a_{pq}} \text{ şi } \operatorname{tg}\varphi = t. \tag{1.7}$$

Cum $\operatorname{ctg} 2\varphi = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}{2\operatorname{tg}\varphi}$, din (1.6) şi (1.7) rezultă $t^2 + 2\theta \cdot t - 1 = 0$. Rezolvând această ecuaţie obţinem:

$$t_{1,2} = -\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 1} = \frac{1}{\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 1}}.$$

Pentru a evita ca numitorul să fie mic, luăm

$$t = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\theta + \operatorname{sgn}(\theta)\sqrt{\theta^2+1}},\ \text{dacă } \theta \neq 0 \\ 1,\ \text{dacă } \theta = 0 \end{array}\right. . \tag{1.8}$$

Conform unor calcule elementare de trigonometrie avem

$$\left\{\begin{array}{l} c = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ s = \sin\varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right. . \tag{1.9}$$

Din (1.8) şi (1.9) rezultă că $|t| \leq 1, c \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, |s| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi deci că

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Dacă notăm cu $S(B)$ suma pătratelor elementelor nediagonale ale unei matrici B oarecare, atunci din (1.3) şi (1.4) un calcul direct ne conduce la relaţia

$$S(A'') = [S(A) - 2a_{pq}^2] + 2a''^2_{pq}.$$

Aşadar, dacă alegem unghiul de rotaţie φ conform (1.8) şi (1.9), rezultă

$$a''_{pq} = 0 \text{ şi deci } S(A'') = S(A) - 2a_{pq}^2. \tag{1.10}$$

Deoarece $a_{ij}^2 \le a_{pq}^2$ pentru $i \ne j$, vom avea

$$S(A) \le n(n-1)a_{pq}^2 \text{ sau } -\frac{2}{n(n-1)}S(A) \ge -2a_{pq}^2. \tag{1.11}$$

Din (1.10) şi (1.11) rezultă

$$S(A'') \le S(A)\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) < S(A), \text{ pentru } n \ge 2. \tag{1.12}$$

Să considerăm acum un şir de rotaţii în urma cărora se obţin matricile

$$A_0, A_1, A_2, ..., A_k, ...$$

unde $A_0 = A, A_1 = A'', A_2 = A_1''$ etc.. Din (1.12) rezultă

$$S(A_k) \le \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^k S(A). \tag{1.13}$$

Cum $1 - \frac{2}{n(n-1)} \in (0,1)$ pentru $n \ge 2$, din (1.13) rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} S(A_k) = 0$. Aşadar, la limită şirul (A_k) tinde la matricea diagonală.

Se poate demonstra următoarea teoremă.

Teorema 1. *Fie $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ valorile proprii ale matricii A şi fie $a_{jj}^{(k)}$ elementele diagonale ale matricii A_k. Atunci*

$$\left|a_{jj}^{(k)} - \lambda_j\right| \le \sqrt{S(A_k)}.$$

Deoarece $a_{pq}^{(k)}$ este cel mai mare (în valoare absolută) element nediagonal al matricii A_k, rezultă

$$S(A_k) \le (n^2 - n)(a_{pq}^{(k)})^2 < n^2(a_{pq}^{(k)})^2.$$

Din Teorema 1 obţinem

$$\left|a_{jj}^{(k)} - \lambda_j\right| < n\left|a_{pq}^{(k)}\right|. \tag{1.14}$$

Inegalitatea (1.14) poate fi luată drept *criteriu de oprire*. Din inegalitatea $n\left|a_{pq}^{(k)}\right| < \varepsilon$ va rezulta numărul k al rotaţiilor necesare pentru a aproxima valorile proprii λ_j ale matricii A cu elementele diagonale $a_{jj}^{(k)}$ ale matricii A_k. Şirul de matrici A_k se calculează recursiv

$$\begin{cases} A_k = U_k^T A_{k-1} U_k, & k \ge 1 \\ A_0 = A \end{cases}.$$

Dăm în continuare algoritmul MATLAB pentru metoda rotaţiilor a lui Jacobi:

```
clc
format short
% Introducere A,n
k=0;
eps=input('Dati ordinul erorii, eps=')
nmax=1;
while(nmax>eps)
    k=k+1
    S=0;
    U=eye(n);
    max=0;
```

```
    p=1;q=2;
    for i=1:n
        for j=i+1:n
            if (max<norm(A(i,j)))
                max=norm(A(i,j));
                p=i;
                q=j;
            end
        end
    end
    nmax=max*n
    p
    q
    omega=(A(q,q)-A(p,p))/(2*A(p,q))
    if (omega==0)
        t=1
    else
        t=1/(omega+sign(omega)*sqrt(omega^2+1))
    end
    c=1/sqrt(t^2+1)
    s=t/sqrt(t^2+1)
    U(p,p)=c;U(q,q)=c;U(p,q)=s;U(q,p)=-s;
    U
    A=U'*A*U
end
disp('Valorile proprii sunt elementele de pe diagonala urmatoarei matrici')
A
```

Exemplul 1. *Fie matricea*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Avem:

$$\begin{aligned}
a_{pq} &= a_{12} = 1; p = 1; q = 2; \theta = 0; t = 1; c = s = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\
U_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_1 = U_1^T A U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}; \\
a_{23} &= \sqrt{2}; p = 2; q = 3; \theta = \frac{3-4}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}; 1 + \theta^2 = \frac{9}{8}; \\
t &= -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 + t^2 = \frac{3}{2}; c = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; s = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \\
U_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}; A_2 = U_2^T A_1 U_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Rezultă $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5; \lambda_3 = 2.$

2. Interpolarea funcţiilor

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n + 1)$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$, numite *noduri.*

Problema interpolării funcţiei f în nodurile $x_i, i = \overline{0, n}$, constă în determinarea unei funcţii $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dintr-o clasă de funcţii cunoscută, cu proprietatea $g(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}$.

Pusă sub această formă generală, problema poate să nu aibă soluţii sau să aibă o infinitate de soluţii.

Cea mai utilizată clasă de funcţii de interpolare este clasa polinoamelor, datorită uşurinţei cu care se integrează şi derivează.

Interpolarea funcţiilor prezintă o importanţă deosebită atunci când funcţia nu este definită printr-o relaţie analitică, ci printr-un tablou de valori ce reprezintă, de exemplu, rezultatele unei experienţe. Chiar atunci cân funcţia este dată printr-o relaţie analitică, dar această relaţie este *complicată,* se poate alege interpolarea în locul calculului direct.

2.1. **Polinomul de interpolare al lui Lagrange.**

Teorema 2. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n + 1)$ *noduri din intervalul* $[a, b]$. *Atunci există un polinom unic* P_n, *de gradul* n, *care interpolează funcţia* f *în nodurile* $x_i, i = \overline{0, n}$ $(P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n})$. *Acest polinom se numeşte polinomul de interpolare al lui Lagrange.*

Demonstraţie. Căutăm un polinom P_n sub forma următoare:

$$P_n(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + ... + L_n(x) \cdot f(x_n),$$

unde L_i sunt polinoame de gradul n ce urmează să fie determinate. Deoarece dorim ca $P_n(x_i) = f(x_i)$, vom pune condiţiile:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases} .$$

Deoarece $L_i(x_j) = 0$ pentru $i \neq j$, rezultă că L_i admite rădăcinile

$$x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n.$$

Aşadar,

$$L_i(x) = a_i(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n).$$

Cum $L_i(x_i) = 1$,rezultă

$$a_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)}.$$

În concluzie avem

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i), \tag{2.1}$$

unde

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{2.2}$$

Evident polinomul (2.1) are gradul n şi are proprietatea $P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0,n}$.

Fie Q_n un alt polinom de gradul n cu proprietatea $Q_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0,n}$ şi fie $R = P_n - Q_n$. Deoarece grad $R \leq n$ şi $R(x_i) = 0, i = \overline{0,n}$ rezultă că R este polinom identic nul, deci că $P_n = Q_n$. $\square$

Exemplul 2. *Fie nodurile* $x_0 = -1, x_1 = 1$ *şi* $x_2 = 2$ *şi* $f(x_0) = 2, f(x_1) = f(x_2) = 1$. *Atunci*

$$P_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} \cdot 2 + \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)} \cdot 1.$$

Efectuând calculele obţinem $P_2(x) = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 8)$.

În continuare vom nota eroarea în fiecare punct cu

$$E(f;x) = f(x) - P_n(x). \tag{2.3}$$

Evident $E(f;x_i) = 0, i = \overline{0,n}$. Introducem de asemenea notaţia:

$$U_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{2.4}$$

Teorema 3. *Dacă* $f \in C^{n+1}[a,b]$, *atunci pentru orice* $x \in [a,b]$, *există* $\xi_x \in [a,b]$ *astfel încât*

$$E(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} U_{n+1}(x). \tag{2.5}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia auxiliară

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{E(f;x)}{U_{n+1}(x)} U_{n+1}(t), t \in [a,b], x \neq x_i.$$

Observăm că g se anulează în $(n+2)$ puncte distincte $x_0, x_1, ..., x_n, x$. Din teorema lui Rolle rezultă că există $\xi_x \in (a,b)$ astfel încât $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Cum

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{E(f;x)}{U_{n+1}(x)}(n+1)!,$$

rezultă

$$E(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} U_{n+1}(x).$$

$\square$

Corolarul 4. *Dacă există* $M > 0$ *astfel încât* $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ *pentru orice* $x \in [a,b]$, *atunci:*

$$|E(f;x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left|U_{n+1}(x)\right|, x \in [a,b].$$

Observaţia 1. *Dacă* $f = Q$ *este un polinom de grad cel mult* n, *atunci* $E(f;x) = 0$, *oricare ar fi* $x \in [a,b]$.

Afirmaţia rezultă din Teorema 3, deoarece în acest caz $f^{(n+1)}(x) = 0$.

Observaţia 2. $E(f+g;x) = E(f;x) + E(g;x)$.

Într-adevăr, dacă P_n^f *este polinomul de interpolare pentru* f *şi* P_n^g *este polinomul de interpolare pentru* g, *atunci* $P_n^f + P_n^g$ *este polinomul de interpolare pentru* $f + g$ *şi deci*

$$E(f+g;x) = f(x) + g(x) - P_n^f(x) - P_n^g(x) = E(f;x) + E(g;x).$$

În continuare vom presupune că nodurile sunt echidistante, deci că $x_i = x_0 + i \cdot h, i = \overline{0,n}$, unde

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}. \tag{2.6}$$

Considerăm de asemenea schimbarea de variabilă

$$x = x_0 + th. \tag{2.7}$$

Înlocuind (2.6) şi (2.7) în (2.2) obţinem:

$$\tilde{L}_i(t) = L_i(x_0 + th) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}.$$

Folosind notaţia

$$\pi_{n+1}(t) = t(t-1)(t-2)\cdot \ldots \cdot (t-n) = \prod_{i=0}^{n}(t-i), \tag{2.8}$$

obţinem:

$$\tilde{L}_i(t) = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\frac{\pi_{n+1}(t)}{t-i} = \frac{(-1)^{n-i}}{n!}C_n^i\frac{\pi_{n+1}(t)}{t-i}.$$

Obţinem astfel expresia polinomului lui Lagrange pentru noduri echidistante

$$\tilde{P}_n(t) = \frac{\pi_{n+1}(t)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\frac{f(x_i)}{t-i}. \tag{2.9}$$

Eroarea devine:

$$\tilde{E}(f;t) = \frac{\pi_{n+1}(t)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi_t). \tag{2.10}$$

Se arată că pentru orice sistem de noduri $(x_i^{(n)}), i = \overline{0,n}$ din intervalul $[a,b]$, dat dinainte, există o funcţie continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât şirul polinoamelor lui Lagrange (P_n) care interpolează funcţia f în aceste noduri nu converge uniform la f pe $[a,b]$. Convergenţa uniformă are loc dacă $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ şi se dezvoltă în serie Taylor pe $\mathbb{R}$. În general, pentru o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un polinom Q_ε astfel încât

$$\|f - Q_\varepsilon\| = \sup\{|f(x) - Q_\varepsilon(x)| \mid x \in [a,b]\} < \varepsilon.$$

Algoritmul MATLAB pentru polinomul de interpolare Lagrange este următorul:

```
% Introducere x,y - nodurile si valorile functiei in noduri
% Introducere a, punctul in care se face interpolarea
S=0;
n=size(x);
for i=1:n
    L=1;
    for j=1:n
        if (j~=i)
            L=L*(a-x(j))/(x(i)-x(j));
        end
    end
    S=S+y(i)*L;
end
```

fprintf('\nValoarea aproximativa a functiei f in %g este %g.\n',a,S)