Matematici Speciale 1- Seminar

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior cu coeficienţi constanţi

1. Ecuaţia diferenţială liniară şi omogenă de ordin superior

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = 0 \tag{1}$$

$a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n.$

Soluţiile **ecuaţiei caracteristice**

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2}$$

se numesc **rădăcini caracteristice**.

Mulţimea soluţiilor ecuaţei omogene (1) este spaţiu liniar de dimensiune n, iar o bază în acest spaţiu se numeşte **sistem fundamental de soluţii** (S.F.S.)

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este un (S.F.S.) atunci orice altă soluţie se scrie ca o combinaţie liniară a acestora şi atunci **soluţia generală a ec. omogene** (1) este

$$x_o(t) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n, \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

În funcţie de natura (reale sau complexe) şi multiplicitatea rădăcinilor caracteristice determinăm (S.F.S.) astfel:

- dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este de multiplicitate k $(\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k)$ atunci în (S.F.S.) intră funcţiile
$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ t^2e^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\lambda t} \tag{4}$$
- dacă $\lambda = \alpha \pm j\beta \in \mathbb{C}$ este de multiplicitate k fiecare $(\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \ldots = \lambda_{2k-1,2k})$ atunci în (S.F.S.) intră funcţiile
$$\begin{array}{l} e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t \\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t \\ t^2e^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^2e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \ldots,\ \ldots \\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t. \end{array} \tag{5}$$

Exerciţiul 1.1. *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$x''' + x'' - 2x' = 0$$

şi soluţia problemei Cauchy: $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = -4 \\ x''(0) = 2 \end{cases}$

<u>*Soluţie.*</u> Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \ \Rightarrow\ \lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$$

Rădăcinile caracteristice şi (S.F.S)

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{de multiplicitate 1} & \rightarrow & e^{0t} = 1 \\ \lambda_2 = 1 & \text{de multiplicitate 1} & \rightarrow & e^{t} \\ \lambda_3 = -2 & \text{de multiplicitate 1} & \rightarrow & e^{-2t} \end{cases}$$

Soluţia generală este

$$x_o(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unde $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Determinăm soluţia problemei Cauchy, mai precis determinăm valorile constantelor C_1, C_2, C_3 astfel încât să fie verificate condiţiile iniţiale date. Calculăm

$x_o'(t) = C_2 e^t - 2C_3 e^{-2t}$

$x_o''(t) = C_2 e^t + 4C_3 e^{-2t}$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = -4 \\ x''(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 & +C_2 & +C_3 = 1 \\ & C_2 & -2C_3 = -4 \\ & C_2 & +4C_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -2 \\ C_3 = 1. \end{cases}$$

Soluţia problemei Cauchy este

$$x_o(t) = 2 - 2e^t + e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 1.2. *Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale:*

1. $x''' - 3x'' - 9x' - 5x = 0$

<u>*Soluţie.*</u> Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda + 1)^2 \cdot (\lambda - 5) = 0$$

Rădăcinile caracteristice (a se calcula cu schema lui Horner) şi (S.F.S)

	λ^3	λ^2	λ^1	λ^0
	1	-3	-9	-5
$\lambda_1 = -1$	1	-4	-5	0
$\lambda_2 = -1$	1	-5	0	
$\lambda_3 = 5$	1	0		

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 & \text{de multiplicitate 2} & \rightarrow & e^{-t},\ te^{-t} \\ \lambda_3 = 5 & \text{de multiplicitate 1} & \rightarrow & e^{5t} \end{cases}$$

Soluţia generală este

$$x_o(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{5t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. $x^{(4)} + 6x'' + 9x = 0$

<u>*Soluţie.*</u> Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 + 9 = 0, \;\Rightarrow\; (\lambda^2 + 3)^2 = 0$$

Rădăcinile caracteristice şi (S.F.S)

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}j \;\text{ de multipl. 2} \quad \rightarrow \; \cos\sqrt{3}t,\ \sin\sqrt{3}t,\ t\cos\sqrt{3}t,\ t\sin\sqrt{3}t$$

Soluţia generală este

$$x_o(t) = C_1 \cos\sqrt{3}t + C_2 \sin\sqrt{3}t + C_3 t\,\cos\sqrt{3}t + C_4 t\,\sin\sqrt{3}t,\quad t \in \mathbb{R},\quad C_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}.$$

3. $x^{(7)} + 3x^{(6)} + 3x^{(5)} + x^{(4)} = 0$

<u>*Soluţie.*</u> Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^7 + 3\lambda^6 + 3\lambda^5 + \lambda^4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^4\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^4(\lambda+1)^3 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 & \text{de multipl. } 4 \quad \rightarrow \quad 1,\ t,\ t^2,\ t^3 \\ \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = -1 & \text{de multipl. } 3 \quad \rightarrow \quad e^{-t},\ te^{-t},\ t^2e^{-t} \end{cases}$$

Soluţia generală este

$$x_o(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 + C_5 e^{-t} + C_6 te^{-t} + C_7 t^2 e^{-t},\quad C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,7}.$$

4. $x^{(4)} + 2x^{(3)} + 3x'' + 2x' + x = 0$

<u>*Soluţie.*</u> Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)^2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ de multipl. } 2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \text{ (S.F.S) }\; e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\; e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\; t\,e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),\; t\,e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$x_o(t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 t\,e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4 t\,e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

unde $C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}$.

2. Ecuaţia diferenţială liniară şi <u>neomogenă</u> de ordin superior

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t), \tag{6}$$

unde $f \in C(\mathbb{R})$.

Soluţia generală a ec. neomogene (6) este

$$x(t) = x_o(t) + \widetilde{x}(t), \tag{7}$$

unde x_o este soluţia generală a ec. omogene asociată iar $\widetilde{x}$ este o soluţie particulară a ec. neomogene.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un (S.F.S.). Atunci fie soluţia generală a ec. omogene

$$x_o(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n, \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

[*I*] <u>Determinarea soluţiei particulare $\widetilde{x}$ pt. ec. neomogene folosind **metoda variaţiei constantelor**</u>. Se alege

$$\widetilde{x}(t) = K_1(t)x_1(t) + K_2(t)x_2(t) + \ldots + K_n(t)x_n(t) \tag{9}$$

unde funcţiile necunoscute $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sunt ce clasă C^1 iar derivatele lor se obţin prin rezolvarea **sistemului variaţiei constantelor**

$$\begin{cases} K_1'x_1 + K_2'x_2 + \ldots + K_n'x_n = 0 \\ K_1'x_1' + K_2'x_2' + \ldots + K_n'x_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_1'x_1^{(n-2)} + K_2'x_2^{(n-2)} + \ldots + K_n'x_n^{(n-2)} = 0 \\ K_1'x_1^{(n-1)} + K_2'x_2^{(n-1)} + \ldots + K_n'x_n^{(n-1)} = f(t). \end{cases} \tag{10}$$

Exerciţiul 2.1. *Folosind metoda variaţiei constantelor să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale neomogene:*

1. $x'' - 2x' + x = \dfrac{e^t}{t}$

<u>*Soluţie.*</u>

(E.O) $x'' - 2x' + x = 0$

(Ec. car.) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \ \Rightarrow\ (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ de multipl. 2 $\ \rightarrow\ \ e^t, t\,e^t$

$$x_o(t) = C_1e^t + C_2te^t \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\widetilde{x}(t) = K_1(t)\cdot e^t + K_2(t)\cdot t\,e^t$$

$$\begin{cases} K_1'\cdot e^t & +K_2'\cdot t\,e^t & = 0 \\ K_1'\cdot \left(e^t\right)' & +K_2'\cdot\left(t\,e^t\right)' & = \dfrac{e^t}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1'\cdot e^t & +K_2'\cdot t\,e^t & = 0 \\ K_1'\cdot e^t & +K_2'\cdot(t+1)e^t & = \dfrac{e^t}{t} \end{cases}$$

Din a doua ec. o scădem pe prima şi găsim $K_2' = \dfrac{1}{t}$ iar din prima ec. deducem $K_1' = -t\,K_2' = -1.$

Prin integrare rezultă

$$K_1(t) = -\int dt = -t, \qquad K_2(t) = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t, \quad t > 0.$$

$$\widetilde{x}(t) = -t\,e^t + \ln t\cdot t\,e^t$$

Soluţia generală este

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t - t\,e^t + \ln t\cdot t\,e^t$$

unde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$; notăm $C_2 - 1 = C_3$ şi deducem soluţia

$$x(t) = C_1e^t + C_3te^t + t\,e^t\ln t \quad C_1, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. $x''' + x' = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$

<u>*Soluţie.*</u>

(E.O) $x''' + x' = 0$

$$\text{(Ec. car.) } \lambda^3+\lambda=0 \ \Rightarrow\ \lambda(\lambda^2+1)=0 \ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 & \text{de multipl. } 1 \quad \to \quad 1 \\ \lambda_{2,3}=\pm j & \text{de multipl. } 1 \quad \to \quad \cos t, \sin t \end{cases}$$

$$x_o(t)=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t, \quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

$$\widetilde{x}(t)=K_1(t)+K_2(t)\cdot\cos t+K_3(t)\cdot\sin t$$

$$\begin{cases} K_1'\cdot 1 & +K_2'\cdot\cos t & +K_3'\cdot\sin t & =0 \\ K_1'\cdot(1)' & +K_2'\cdot(\cos t)' & +K_3'\cdot(\sin t)' & =0 \\ K_1'\cdot(1)'' & +K_2'\cdot(\cos t)'' & +K_3'\cdot(\sin t)'' & =\dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} K_1' & +K_2'\cdot\cos t & +K_3'\cdot\sin t & =0 & & \\ & -K_2'\cdot\sin t & +K_3'\cdot\cos t & =0 & \mid\ \cdot(-\sin t) & \mid\ \cdot\cos t \\ & -K_2'\cdot\cos t & -K_3'\cdot\sin t & =\dfrac{\sin t}{\cos^2 t} & \mid\ \cdot(-\cos t) & \mid\ \cdot(-\sin t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad K_2'=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\operatorname{tg} t, \quad K_3'=-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=-\operatorname{tg}^2 t$$

Iar din prima ecuaţie găsim

$$K_1'=\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos t+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\sin t.$$

Prin integrare

$$K_1(t)=\int\sin t\,dt+\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\sin t\,dt=-\cos t+I.$$

pentru I facem substituţia $\cos t=u$, $-\sin t\,dt=du$ şi $\sin^2 t=1-u^2$.

$$I=-\int\frac{1-u^2}{u^2}\,du=-\int\frac{1}{u^2}\,du+\int du=\frac{1}{u}+u=\frac{1}{\cos t}+\cos t$$

şi deci

$$K_1(t)=\frac{1}{\cos t}.$$

$$K_2(t)=-\int\operatorname{tg} t\,dt=\ln|\cos t|.$$

$$K_3(t)=-\int\operatorname{tg}^2 t\,dt;$$

facem substituţia $\operatorname{tg} t=u \ \Rightarrow\ t=\operatorname{arctg} u$, $dt=\dfrac{1}{1+u^2}\,du$.

$$K_3(t)=-\int\frac{u^2}{1+u^2}\,du=-\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du=-u+\operatorname{arctg} u=-\operatorname{tg} t+t.$$

$$\widetilde{x}(t)=\frac{1}{\cos t}+\ln|\cos t|\cdot\cos t+(t-\operatorname{tg} t)\cdot\sin t.$$

Soluţia generală este

$$x(t)=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t+\frac{1}{\cos t}+\ln|\cos t|\cdot\cos t+(t-\operatorname{tg} t)\cdot\sin t \quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

$[II]$ **Metoda coeficienţilor nedeterminaţi**

Determinarea soluţiei particulare $\widetilde{x}$ pt. ec. neomogene după forma termenului liber f

Caz 1. Dacă $\underline{f(t) = P(t)}$, P este un polinom de gradul m, atunci se alege $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = Q(t) \cdot t^{\ell} \tag{11}$$

unde Q este un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi grad (Q) = grad (P) iar ℓ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = 0$ în ecuaţia caracteristică.

Dacă $\lambda = 0$ nu este rădăcină caracteristică se ia $\ell = 0$.

Caz 2. Dacă $\underline{f(t) = e^{at}P(t)}$, P este un polinom de gradul m, atunci se alege $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = e^{at} \cdot Q(t) \cdot t^{\ell} \tag{12}$$

unde Q este un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi grad (Q) = grad (P) iar ℓ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = a$ în ecuaţia caracteristică.

Dacă $\lambda = a$ nu este rădăcină caracteristică se ia $\ell = 0$.

Caz 3. Dacă $\underline{f(t) = P_1(t)\cos(bt) + P_2(t)\sin(bt)}$, atunci se alege $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = [Q_1(t)\cos(bt) + Q_2(t)\sin(bt)] \cdot t^{\ell} \tag{13}$$

unde ℓ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = \pm jb$ în ecuaţia caracteristică, iar

$$\text{grad } (Q_1) = \text{grad } (Q_2) = \max\{\text{grad } (P_1),\ \text{grad } (P_2)\}.$$

Dacă $\lambda = \pm jb$ nu este rădăcină caracteristică se ia $\ell = 0$.

Caz 4 (general). Dacă $\underline{f(t) = e^{at}[P_1(t)\cos(bt) + P_2(t)\sin(bt)]}$, atunci se alege $\widetilde{x}$ de forma

$$\widetilde{x}(t) = e^{at} \cdot [Q_1(t)\cos(bt) + Q_2(t)\sin(bt)] \cdot t^{\ell} \tag{14}$$

unde ℓ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\lambda = a \pm jb$ în ecuaţia caracteristică, iar

$$\text{grad } (Q_1) = \text{grad } (Q_2) = \max\{\text{grad } (P_1),\ \text{grad } (P_2)\}.$$

Dacă $\lambda = a \pm jb$ nu este rădăcină caracteristică se ia $\ell = 0$.

Cazul 1. se obţine din cazul 4. pt $a = b = 0$, cazul 2. se obţine din cazul 4. pt $b = 0$ iar azul 3. se obţine din cazul 4. pt $a = 0$.

După ce e alege $\widetilde{x}$ de forma corespunzătoare funcţiei f din ecuaţie (polinoamele Q având coeficienţi nedeterminaţi), se impune ca $\widetilde{x}$ să fie soluţie pentru ec. neomogenă. Se derivează $\widetilde{x}$ de câte ori este necesar, se înlocuieşte în ecuaţie şi prin identificarea celor doi membri a ecuaţiei se determină coeficienţii polinoamelor Q.

Observaţie. Dacă $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots$ unde f_i are una dintre formele menţionate, atunci se alege

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_1(t) + \widetilde{x}_2(t) + \ldots$$

unde $\widetilde{x}_i$ este aleasă corespunzător funcţiei f_i.

Exerciţiul 2.2. *Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale:*

1. $x'' + 4x = t^2 + t$

<u>*Soluţie.*</u>

(E.O) $x'' + 4x = 0$

(Ec. car.) $\lambda^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm 2j,\quad$ de multipl. 1 $\quad\rightarrow\quad \cos 2t, \sin 2t$

$$x_o(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(t) = t^2 + t$ este polinom de grad 2 iar $\lambda = 0$ nu este răd. car. $\Rightarrow\;\; \widetilde{x}(t) = Q(t) \cdot t^0$, unde $\operatorname{grad} Q = 2$.

Deci

$$\widetilde{x}(t) = At^2 + Bt + C.$$

Derivăm de două ori

$$\begin{array}{ll} \widetilde{x} = At^2 + Bt + C & \mid\ \cdot 4 \\ \widetilde{x}' = 2At + B & \\ \widetilde{x}'' = 2A & \mid\ \cdot 1 \end{array}$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă dată $\;\Rightarrow\;$ $4At^2 + 4Bt + 4C + 2A = t^2 + t$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2: & 4A = 1 \\ t^1: & 4B = 1 \\ t^0: & 4C + 2A = 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 1/4 \\ C = -1/8 \end{cases}$$

$$\widetilde{x}(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8},$$

iar soluţia generală este

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $x^{(4)} - 2x''' - 3x'' = 60t^3 + 48t^2 + 6$

<u>*Soluţie.*</u>

(E.O) $x^{(4)} - 2x''' - 3x'' = 0$

(Ec. car.) $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 & \text{de multipl. } 2 \;\rightarrow\; 1,\ t \\ \lambda_3 = -1 & \text{de multipl. } 1 \;\rightarrow\; e^{-t} \\ \lambda_4 = 3 & \text{de multipl. } 1 \;\rightarrow\; e^{3t} \end{cases}$

$$x_o(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} + C_4 e^{3t}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(t) = 60t^3 + 48t^2 + 6$ este polinom de grad 3 iar $\lambda = 0$ este răd. car. de multipl. 2 $\Rightarrow\;\; \widetilde{x}(t) = Q(t) \cdot t^2$, unde $\operatorname{grad} Q = 3$.

Deci

$$\widetilde{x}(t) = (At^3 + Bt^2 + Ct + D) \cdot t^2.$$

Derivăm de patru ori

$$\begin{array}{ll} \widetilde{x} = At^5 + Bt^4 + Ct^3 + Dt^2 & \\ \widetilde{x}' = 5At^4 + 4Bt^3 + 3Ct^2 + 2Dt & \\ \widetilde{x}'' = 20At^3 + 12Bt^2 + 6Ct + 2D & \mid\ \cdot(-3) \\ \widetilde{x}''' = 60At^2 + 24Bt + 6C & \mid\ \cdot(-2) \\ \widetilde{x}^{(4)} = 120At + 24B & \mid\ \cdot 1 \end{array}$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă dată

$$\Rightarrow\; -60At^3 + (-36B - 120A)t^2 + (-18C - 48B + 120A)t - 6D - 12C + 24B = 60t^3 + 48t^2 + 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^3: & -60A = 60 \\ t^2: & -36B - 120A = 48 \\ t^1: & -18C - 48B + 120A = 0 \\ t^0: & -6D - 12C + 24B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \\ C = -216 \\ D = 439 \end{cases}$$

$$\widetilde{x}(t) = -t^5 + 2t^4 - 216t^3 + 439t^2,$$

iar soluţia generală este

$$x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} + C_4 e^{3t} - t^5 + 2t^4 - 216t^3 + 439t^2, \qquad C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}.$$

3. $x'' + 4x' + 4x = 18te^t$

Soluţie.

(E.O) $x'' + 4x' + 4x = 0$

(Ec. car.) $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \ \Rightarrow\ (\lambda + 2)^2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = -2$ de multipl. 2 $\rightarrow\ e^{-2t},\ te^{-2t}$

$$x_o(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(t) = 18te^t$ este $P(t) \cdot e^{at}$ unde $P(t)$ este de grad 1, iar $a = 1$ nu este răd. car. $\Rightarrow\ \widetilde{x}(t) = Q(t) \cdot t^0$, unde $\operatorname{grad} Q = 1$.

Deci

$$\widetilde{x}(t) = (At + B)e^t.$$

Derivăm de două ori

$$\begin{array}{ll} \widetilde{x} = (At + B)e^t & | \ \cdot 4 \\ \widetilde{x}' = Ae^t + (At + B)e^t = (At + A + B)e^t & | \ \cdot 4 \\ \widetilde{x}'' = Ae^t + (At + A + B)e^t = (At + 2A + B)e^t & | \ \cdot 1 \end{array}$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă dată

$$\Rightarrow\ (9At + 6A + 9B)e^t = 18te^t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^1: & 9A = 18 \\ t^0: & 6A + 9B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -4/3 \end{cases}$$

$$\widetilde{x}(t) = \left(2t + \frac{4}{3}\right) e^t,$$

iar soluţia generală este

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + \left(2t + \frac{4}{3}\right) e^t, \qquad C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,2}.$$

4. $x''' + 2x'' = 12t^2 + 2 + 6e^{-2t}$

Soluţie.

(E.O) $x''' + 2x'' = 0$

(Ec. car.) $\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^2(\lambda + 2) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 & \text{de multipl. } 2 \ \rightarrow\ 1,\ t \\ \lambda_3 = -2 & \text{de multipl. } 1 \ \rightarrow\ e^{-2t} \end{cases}$

$$x_o(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-2t}, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,3}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(t) = 12t^2 + 2 + 6e^{-2t} = f_1(t) + f_2(t)$

$f_1(t) = 12t^2 + 2$ este de forma $P_1(t)$ unde P_1 este de polinom de grad 2 şi $\lambda = 0$ este răd. car. de multipl. 2 $\Rightarrow\ \widetilde{x}_1(t) = Q_1(t) \cdot t^2$ unde $\operatorname{grad} Q_1 = 2$.

$$\widetilde{x}_1(t) = (At^2 + Bt + C) \cdot t^2 = At^4 + Bt^3 + Ct^2.$$

$f_2(t) = 6e^{-2t}$ este de forma $P_2(t) \cdot e^{at}$ unde P_2 este de grad 0, iar $a = -2$ este răd. car. de multipl. 1 $\Rightarrow \quad \widetilde{x}_2(t) = Q_2(t)e^{-2t} \cdot t^1$ unde $\operatorname{grad} Q_2 = 0$.

$$\widetilde{x}_2(t) = Me^{-2t} \cdot t^1 = Mte^{-2t}.$$

Deci

$$\widetilde{x}(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Mte^{-2t}.$$

Derivăm de trei ori

$$\begin{array}{ll}
\widetilde{x} = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Mte^{-2t} & \\
\widetilde{x}' = 4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct + M(-2t+1)e^{-2t} & \\
\widetilde{x}'' = 12At^2 + 6Bt + 2C + M(4t-4)e^{-2t} & | \quad \cdot 2 \\
\widetilde{x}''' = 24At + 6B + M(-8t+12)e^{-2t} & | \quad \cdot 1
\end{array}$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă dată

$$\Rightarrow \; 24At^2 + (12B + 24A)t + 4C + 6B + 4Me^{-2t} = 12t^2 + 2 + 6e^{-2t}$$

Identificăm polinoamele pe de o parte şi coeficienţii exponenţialei pe de altă parte

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2: & 24A = 12 \\ t^1: & 12B + 24A = 0 \\ t^0: & 4C + 6B = 2 \end{cases} \text{ şi } \; 4M = 6 \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases} \text{ şi } \; M = 3/2.$$

$$\widetilde{x}(t) = \frac{1}{2}t^4 - t^3 + 2t^2 + 3te^{-2t},$$

iar soluţia generală este

$$x(t) = C_1 + C_2t + C_3e^{-2t} + \frac{1}{2}t^4 - t^3 + 2t^2 + \frac{3}{2}te^{-2t}, \qquad C_i \in \mathbb{R}, \; i = \overline{1,3}.$$

5. $x^{(4)} - x''' - x' + x = 4te^{-t} + 12e^t$

<u>*Soluţie.*</u>

(E.O) $x^{(4)} - x''' - x' + x = 0$

(Ec. car.) $\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^3(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - 1)(\lambda^3 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 & \text{de multipl. 2} \;\rightarrow\; e^t, \; te^t \\ \lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{de multipl. 1} \;\rightarrow\; e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right), \; e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right) \end{cases}$$

$$x_o(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right) + C_4e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right), \qquad C_i \in \mathbb{R}, \; i = \overline{1,4}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(t) = 4te^{-t} + 12e^t = f_1(t) + f_2(t)$

$f_1(t) = 4te^{-t}$ este de forma $P_1(t) \cdot e^{at}$ unde P_1 este de polinom de grad 1 şi $a = -1$ nu este răd. car. $\Rightarrow \quad \widetilde{x}_1(t) = Q_1(t)e^{-t} \cdot t^0$ unde $\operatorname{grad} Q_1 = 1$.

$$\widetilde{x}_1(t) = (At + B)e^{-t}.$$

$f_2(t) = 12e^t$ este de forma $P_2(t) \cdot e^{at}$ unde P_2 este de grad 0, iar $a = 1$ este răd. car. de multipl. 2 $\Rightarrow \quad \widetilde{x}_2(t) = Q_2(t)e^t \cdot t^2$ unde $\operatorname{grad} Q_2 = 0$.

$$\widetilde{x}_2(t) = Ce^t \cdot t^2 = Ct^2e^t.$$

Deci

$$\widetilde{x}(t) = (At + B)e^{-t} + Ct^2e^t.$$

Derivăm de patru ori

$$\begin{array}{lll}
\widetilde{x} = (At + B)e^{-t} + Ct^2e^t & | & \cdot 1 \\
\widetilde{x}' = (-At + A - B)e^{-t} + C(t^2 + 2t)e^t & | & \cdot(-1) \\
\widetilde{x}'' = (At - 2A + B)e^{-t} + C(t^2 + 4t + 2)e^t & & \\
\widetilde{x}''' = (-At + 3A - B)e^{-t} + C(t^2 + 6t + 6)e^t & | & \cdot(-1) \\
\widetilde{x}^{(4)} = (At - 4A + B)e^{-t} + C(t^2 + 8t + 12)e^t & | & \cdot 1
\end{array}$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă dată: $\widetilde{x}^{(4)} - \widetilde{x}''' - \widetilde{x}' + \widetilde{x} = 4te^{-t} + 12e^t$

$$\Rightarrow \ [At + B - (-At + A - B) - (-At + 3A - B) + At - 4A + B]e^{-t} + \\ +C[t^2 - (t^2 + 2t) - (t^2 + 6t + 6) + t^2 + 8t + 12]e^t = 4te^{-t} + 12e^t$$

$$\Rightarrow \ (4At - 8A + 4B)e^{-t} + 6Ce^t = 4te^{-t} + 12e^t.$$

Identificăm coeficienţii exponenţialei e^{-t} pe de o parte şi ale lui e^t pe de altă parte

$$\Rightarrow \begin{cases} 4At - 8A + 4B = 4t \Rightarrow & \begin{cases} t: & 4A = 4 \\ t^0: & -8A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 2. \end{cases} \\ 6C = 12 & \end{cases}$$

$$\widetilde{x} = (t + 2)e^{-t} + 2t^2e^t,$$

iar soluţia generală este $x(t) = x_o(t) + \widetilde{x}(t)$

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right) + C_4e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right) + (t+2)e^{-t} + 2t^2e^t, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}.$$

6. $x'' - 4x' + 13x = t\sin t$

<u>*Soluţie.*</u>

(E.O) $x'' - 4x' + 13x = 0$

(Ec. car.) $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = 2 \pm 3j$ de multipl. 1 $\ \rightarrow \ e^{2t}\cos 3t,\ e^{2t}\sin 3t$

$$x_o(t) = C_1e^{2t}\cos 3t + C_2e^{2t}\sin 3t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(t) = t\sin t$ este de forma $P_1(t)\cos(bt) + P_2(t)\sin(bt)$ unde $P_1(t) = 0$ este de grad 0, $P_2(t) = t$ este de grad 1 iar $\pm jb = \pm j$ nu este răd. car.

$\Rightarrow \ \ \widetilde{x}(t) = [Q_1(t)\cos t + Q_2(t)\sin t] \cdot t^0$ unde

grad (Q_1) = grad (Q_2) = max{grad (P_1), grad (P_2)} = 1.

$$\Rightarrow \ \ \widetilde{x}(t) = (At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t.$$

Derivăm de două ori

$$\begin{array}{lll}
\widetilde{x} = (At + B)\cos t + (Ct + D)\sin t & | & \cdot 13 \\
\widetilde{x}' = (Ct + A + D)\cos t + (-At - B + C)\sin t & | & \cdot(-4) \\
\widetilde{x}'' = (-At - B + 2C)\cos t + (-Ct - 2A - D)\sin t & | & \cdot 1
\end{array}$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă dată: $\widetilde{x}'' - 4\widetilde{x}' + 13\widetilde{x} = t\sin t$

$$\Rightarrow \ [(12A - 4C)t - 4A + 12B + 2C - 4D]\ \cos t + [(4A + 12C)t - 2A + 4B - 4C + 12D]\ \sin t = t\sin t.$$

Identificăm coeficienţii pentru $\cos t$ şi pentru $\sin t$

$$\begin{cases} (12A-4C)t-4A+12B+2C-4D=0 \ \Rightarrow \begin{cases} t^1: & 12A-4C=0 \\ t^0: & -4A+12B+2C-4D=0 \end{cases} \\ \\ (4A+12C)t-2A+4B-4C+12D=t \ \Rightarrow \begin{cases} t^1: & 4A+12C=1 \\ t^0: & -2A+4B-4C+12D=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ A=1,\ B=\frac{1}{5},\ C=3,\ D=\frac{11}{10}.$$

$$\widetilde{x}(t)=\left(t+\frac{1}{5}\right)\cos t+\left(3t+\frac{11}{10}\right)\sin t,$$

iar soluţia generală este

$$x(t)=C_1e^{2t}\cos 3t+C_2e^{2t}\sin 3t+\left(t+\frac{1}{5}\right)\cos t+\left(3t+\frac{11}{10}\right)\sin t,\qquad C_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,2}.$$

7. $x^{(4)}+8x''+16x=32\cos 2t$

<u>*Soluţie.*</u>

(E.O) $x^{(4)}+4x''+16x=0$

(Ec. car.) $\lambda^4+8\lambda^2+16=0 \Rightarrow (\lambda^2+4)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 2j$ de multipl. 2 $\to$ $\cos 2t$, $\sin 2t$, $t\cos 2t$, $t\sin 2t$.

$$x_o(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+C_3t\cos 2t+C_4t\sin 2t \quad C_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,4}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(t)=32\cos 2t$ este de forma $P_1(t)\cos(bt)+P_2(t)\sin(bt)$ unde $P_1(t)=32$ este de grad 0, $P_2(t)=0$ este de grad 0 iar $\pm jb=\pm 2j$ răd. car. de multipl. 2

$\Rightarrow$ $\widetilde{x}(t)=[Q_1(t)\cos 2t+Q_2(t)\sin 2t]\cdot t^2$ unde

grad (Q_1) = grad (Q_2) = max{grad (P_1), grad (P_2)} = 0.

$$\Rightarrow \ \widetilde{x}(t)=(A\cos 2t+B\sin 2t)\cdot t^2.$$

Derivăm de patru ori

$\widetilde{x}=At^2\cos 2t+Bt^2\sin 2t$ | $\cdot 16$

$\widetilde{x}'=(2Bt^2+2At)\cos 2t+(-2At^2+2Bt)\sin 2t$

$\widetilde{x}''=(-4At^2+8Bt+2A)\cos 2t+(-4Bt^2-8At+2B)\sin 2t$ | $\cdot 8$

$\widetilde{x}'''=(-8Bt^2-24At+12B)\cos 2t+(8At^2-24Bt-12A)\sin 2t$

$\widetilde{x}^{(4)}=(16At^2-64Bt-48A)\cos 2t+(16Bt^2+64At-48B)\sin 2t$ | $\cdot 1$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă dată: $\widetilde{x}^{(4)}+8\widetilde{x}''+16\widetilde{x}=32\cos 2t$

$$\Rightarrow \ -32A\,\cos 2t-32B\,\sin t=32\cos 2t.$$

Identificăm coeficienţii pentru $\cos 2t$ şi pentru $\sin 2t$ $\Rightarrow$ $A=-1,\ B=0.$

$$\widetilde{x}(t)=-t^2\cos 2t,$$

iar soluţia generală este

$$x(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+C_3t\cos 2t+C_4t\sin 2t-t^2\cos 2t \quad C_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,4}.$$

8. $x''-2x'+x=e^t\sin 3t$

<u>*Soluţie.*</u>

(E.O) $x'' - 2x' + x = 0$

(Ec. car.) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ de multipl. 2 $\rightarrow e^t, te^t$.

$$x_o(t) = C_1 e^t + C_2 te^t, \qquad C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,2}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(t) = e^t \sin 3t$ este de forma $e^{at}[P_1(t)\cos(bt) + P_2(t)\sin(bt)]$ unde $a = 1$, $b = 3$, $P_1(t) = 0$, $P_2(t) = 1$ sunt de grad 0, iar $a \pm jb = 1 \pm 3j$ nu este răd. car.

$\Rightarrow \quad \widetilde{x}(t) = e^t[Q_1(t)\cos 3t + Q_2(t)\sin 3t] \cdot t^0$ unde

grad (Q_1) = grad (Q_2) = max{grad (P_1), grad (P_2)} = 0.

$$\Rightarrow \quad \widetilde{x}(t) = e^t(A\cos 3t + B\sin 3t).$$

Derivăm de două ori

$$\begin{array}{ll}
\widetilde{x} = e^t(A\cos 3t + B\sin 3t) & \mid \ \cdot 1 \\
\widetilde{x}' = e^t[(A+3B)\cos 3t + (-3A+B)\sin 3t] & \mid \ \cdot(-2) \\
\widetilde{x}'' = e^t[(-8A+6B)\cos 3t + (-6A-8B)]\sin 3t & \mid \ \cdot 1
\end{array}$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă dată: $\widetilde{x}'' - 2\widetilde{x}' + \widetilde{x} = e^t \sin 3t$

$$\Rightarrow \quad e^t(-9A\cos 3t + 9B\sin 3t) = e^t \sin 3t.$$

Identificăm coeficienţii pentru $\cos 3t$ şi pentru $\sin 3t \Rightarrow \ A = 0,\ B = 1/9$.

$$\widetilde{x}(t) = \frac{1}{9}e^t \sin 3t,$$

iar soluţia generală este

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 te^t + \frac{1}{9}e^t \sin 3t, \qquad C_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,2}.$$

3. Ecuaţii Euler - Cauchy

Sunt ecuaţiile de forma

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} t x' + a_n x = 0 \tag{15}$$

unde $a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}$.

Dacă $t > 0$ facem **schimbarea de variabilă** independentă

$$t = e^s \quad \text{sau} \quad s = \ln t, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t} \tag{16}$$

Dacă $t < 0$ notăm $t = -e^s$.

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\dot{x} \quad \Rightarrow \quad tx' = \dot{x} \tag{17}$$

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = -\frac{1}{t^2}\dot{x} + \frac{1}{t}\frac{d\dot{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{t^2}\dot{x} + \frac{1}{t^2}\ddot{x} = \frac{1}{t^2}(\ddot{x} - \dot{x}) \quad \Rightarrow \quad t^2 x'' = \ddot{x} - \dot{x}. \tag{18}$$

$$x''' = \frac{dx''}{dt} = -\frac{2}{t^3}(\ddot{x} - \dot{x}) + \frac{1}{t^2}\frac{d(\ddot{x} - \dot{x})}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{2}{t^3}(\ddot{x} - \dot{x}) + \frac{1}{t^3}(\dddot{x} - \ddot{x}) = \frac{1}{t^3}(\dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x}) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad t^3 x''' = \dddot{x} - 3\ddot{x} + 2\dot{x}. \tag{19}$$

Exerciţiul 3.1. *Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale:*

1. $t^2x'' - 2tx' + 2x = t, \quad t > 0$

<u>*Soluţie.*</u>

Facem substituţia $t = e^s$, atunci

$$tx' = \dot{x}, \quad t^2x'' = \ddot{x} - \dot{x}$$

şi înlocuind în ecuaţie găsim

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = e^s$$

(E.O) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$

(Ec. car.) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \text{de multipl. } 1 \quad \to e^s \\ \lambda_2 = 2 & \text{de multipl. } 1 \quad \to e^{2s} \end{cases}$

$$x_o(s) = C_1e^s + C_2e^{2s}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(s) = e^s$ este de forma $e^{as}P(s)$ unde P este polinom de grad 0 iar $a = 1$ este răd. car. de multipl. $1 \Rightarrow \quad \widetilde{x}(s) = e^sQ(s) \cdot s^1$, unde $\operatorname{grad} Q = 0$.

Deci

$$\widetilde{x}(s) = Ase^s.$$

Derivăm de două ori

$$\begin{array}{ll} \widetilde{x} = Ase^s & |\ \cdot 2 \\ \dot{\widetilde{x}} = A(s+1)e^s & |\ \cdot(-3) \\ \ddot{\widetilde{x}} = A(s+2)e^s & |\ \cdot 1 \end{array}$$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă $\quad \ddot{\widetilde{x}} - 3\dot{\widetilde{x}} + 2\widetilde{x} = e^s \quad \Rightarrow \; -Ae^s = e^s \quad \Rightarrow \; A = -1$

$$\widetilde{x}(s) = -se^s$$

iar soluţia generală, ca funcţie de s, este

$$x(s) = C_1e^s + C_2e^{2s} - se^s, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Revenim la variabila t şi găsim

$$x(t) = C_1t + C_2t^2 - t\ln t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $(3t+2)^2x'' + 7(3t+2)x' = -63t + 18, \quad t > 0$

<u>*Soluţie.*</u>

Facem substituţia

$$3t + 2 = e^s \quad \Rightarrow s = \ln(3t+2), \quad \frac{ds}{dt} = \frac{3}{3t+2}$$

şi, folosind regulile de derivare compusă, găsim

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{3}{3t+2} = \frac{3}{3t+2}\,\dot{x} \quad \Rightarrow \quad (3t+2)x' = 3\dot{x}$$

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = -\frac{9}{(3t+2)^2}\dot{x} + \frac{3}{3t+2}\frac{d\dot{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{9}{(3t+2)^2}\dot{x} + \frac{9}{(3t+2)^2}\ddot{x} = \frac{9}{(3t+2)^2}(\ddot{x} - \dot{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (3t+2)^2x'' = 9(\ddot{x} - \dot{x}).$$

Avem $f(t) = -63t + 18$ deci $f(s) = -63\dfrac{e^s - 2}{3} + 18 = -21e^s + 60$. Obţinem ecuaţia

$$9\ddot{x} + 12\dot{x} = -21e^s + 60, \quad \Rightarrow 3\ddot{x} + 4\dot{x} = -7e^s + 20$$

(E.O) $3\ddot{x} + 4\dot{x} = 0$

(Ec. car.) $3\lambda^2 + 4\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{de multipl. } 1 \quad \rightarrow\; 1 \\ \lambda_2 = -4/3 & \text{de multipl. } 1 \quad \rightarrow\; e^{-4s/3} \end{cases}$

$$x_o(s) = C_1 + C_2 e^{-4s/3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea lui $\widetilde{x}$: funcţia $f(s) = -7e^s + 20 = f_1(s) + f_2(s)$ unde

$f_1(s) = -7e^s$ este de forma $e^{as}P(s)$ unde P este polinom de grad 0 iar $a = 1$ nu este răd. car. $\Rightarrow \;\; \widetilde{x}_1(s) = Ae^s$

$f_2(s) = 20$ este de forma $P(s)$ unde P este polinom de grad 0 iar nr. 0 este răd. car. de multipl. 1 $\Rightarrow \;\; \widetilde{x}_2(s) = Bs$

$$\widetilde{x} = \widetilde{x}_1(s) + \widetilde{x}_2(s) = Ae^s + Bs$$

$\widetilde{x} = Ae^s + Bs$
$\dot{\widetilde{x}} = Ae^s + B \quad | \;\cdot 4$
$\ddot{\widetilde{x}} = Ae^s \quad | \;\cdot 3$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă $\;3\ddot{\widetilde{x}} + 4\dot{\widetilde{x}} = -7e^s + 20 \;\Rightarrow\; 7Ae^s + 4B = -7e^s + 20 \;\Rightarrow\; A = -1, B = 5$

$$\widetilde{x}(s) = -e^s + 5s$$

iar soluţia generală, ca funcţie de s, este

$$x(s) = C_1 + C_2 e^{-4s/3} - e^s + 5s, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Revenim la variabila t şi înlocuim $s = \ln(3t + 2)$; obţinem

$$x(t) = C_1 + C_2(3t + 2)^{-4/3} - (3t + 2) + 5\ln(3t + 2), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$