Matematici Speciale 1- Seminar

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi rezolvabile prin cuadraturi
Problema Cauchy

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul I este

$$F(t, x, x') = 0 \tag{1}$$

unde t este variabila independentă, $x = x(t)$ este funcţia necunoscută, iar $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ este derivata sa. F este o funcţie reală dată, definită pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$.

Uneori, (1) se poate scrie echivalent:

$$x'(t) = f(t, x). \tag{2}$$

Numim solutie a ecuatiei (2) pe intervalul $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ o functie $x = x(t)$, definită pe (a, b), diferenţiabilă pe (a, b), şi care verifică (3) pe (a, b), adică:

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ \forall\ t\ \in (a, b).$$

Observaţie: Soluţia unei ecuaţii diferenţiale poate fi dată *explicit* $x = x(t)$, $t \in (a, b)$ sau *implicit* $\varphi(t, x) = C$, $t \in (a, b)$, C constanta reală.

1. Ecuaţii cu variabile separabile

Să considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x)g(t) & t \in (a, b), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

Prima ecuaţie din (3) este o **ecuaţie cu variabile separabile**, şi o putem rescrie *separând variabilele t şi x*:

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt, \quad f(x) \neq 0.$$

Prin integrare în cei doi membri se obţine soluţia generală a ecuaţiei.

$$\int \frac{1}{f(x)}\,dx = \int g(t)dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pentru a determina soluţia problemei Cauchy, se determină C folosind $x(t_0) = x_0$.

Exemplul 1.1. *Determinaţi soluţia generală pentru urmatoarea ecuaţie cu variabile separabile (EVS)*

$$\frac{x}{t}x' = \sqrt{1 + t^2 + x^2 + t^2x^2}$$

Rezolvare: Ecuaţia se scrie echivalent:

$$\frac{x}{t}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + t^2 + x^2(1 + t^2)} \ \Rightarrow\ \frac{x}{t}\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + t^2},$$

deci putem separa variabilele:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}} = t\sqrt{1 + t^2}\,dt$$

Integram ecuatia de mai sus:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int t\sqrt{1+t^2}\,dt \;\Rightarrow\; \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}+C \;\Rightarrow\; \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(1+t^2)^3}+C$$

Prin urmare, soluţia generalĕste:

$$\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(1+t^2)^3} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 1.2. *Determinaţi soluţia generală pentru urmatoarea ecuaţie*

$$e^x(1+t^2)\frac{dx}{dt} - 2t(1+e^x) = 0.$$

Rezolvare: Evident, putem scrie ecuatia anterioara sub forma:

$$e^x(1+t^2)\,dx = 2t(1+e^x)\,dt \;\Rightarrow\; \frac{e^x\,dx}{1+e^x} = \frac{2t\,dt}{1+t^2} \;\Rightarrow\; \int \frac{e^x\,dx}{1+e^x} = \int \frac{2t\,dt}{1+t^2}$$

Deci:

$$\ln(1+e^x) = \ln(1+t^2)+C \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{1+e^x}{1+t^2}\right) = C, \;\; C \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \frac{1+e^x}{1+t^2} = C_1$$

$$e^x = C_1(1+t^2)-1 \;\Rightarrow\; x = \ln\big(C_1(1+t^2)-1\big).$$

Observatie: Am renotat cu $C_1 = e^C \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemplul 1.3. *Să se găsească soluţia problemei Cauchy:*

$$\begin{cases} t\sqrt{1+x^2}\,dt + x\sqrt{1+t^2}\,dx = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Rezolvare: Este o ecuaţie cu variabile separabile:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

şi, prin integrare, obţinem:

$$\sqrt{1+x^2} = -\sqrt{1+t^2}+C \;\Rightarrow\; \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+t^2} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Folosindu-ne acum de condiţia iniţiala $x(0) = 0$ obţinem $C = 2$ şi, deci soluţia problemei Cauchy este

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+t^2} = 2$$

Exemplul 1.4. *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale*

$$t\,dx - x\,dt = \sqrt{1+t^2}\,dx + \sqrt{1+x^2}\,dt.$$

Rezolvare: Rescriem ecuatia:

$$dx(t-\sqrt{1+t^2}) = dt(x+\sqrt{1+x^2}) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{dt}{t-\sqrt{1+t^2}}$$

Integrăm în ambii membri:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{t-\sqrt{1+t^2}} \;\Rightarrow\; \int (x-\sqrt{1+x^2})\,dx = \int (t+\sqrt{1+t^2})\,dt$$

şi deci

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2}))+C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 1.1. *Determinaţi soluţiile generale pentru următoarele ecuaţii cu variabile separabile*

(1) $x' = \dfrac{t(2\ln t + 1)}{\sin x + x\cos x}$

(2) $x - tx' = a(x^2 + x'),\ \ a > 0$

(3) $txx' = 1 + t + x + tx$

(4) $(tx^2 + t)\,dt + (t^2x - x)\,dx = 0$

(5) $(\cos t - \sin t)\,dx = x\sin t\,dt.$

2. Ecuaţii omogene şi reductibile la omogene

O ecuatie de forma:

$$x'(t) = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

unde h este o functie continuă pe un interval (a,b), $h(r) \neq r$, $\forall\ r \in (a,b)$, se numeste ecuatie diferentiala omogena. **Substituţia de funcţie**

$$\frac{x}{t} = u(t)$$

conduce la o ecuaţie cu variabile separabile. Intr-adevar, avem:

$$x(t) = tu(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = u(t) + tu'(t),$$

şi înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem:

$$tu'(t) = h(u) - u,$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

Exemplul 2.1. *Să se rezolve ecuaţia omogenă (EO):*

$$(x^2 + 2tx)\,dt + (2t^2 + 3tx)\,dx = 0$$

Rezolvare: Scriem ecuaţia în forma echivalentă:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^2 + 2tx}{2t^2 + 3tx} \ \Rightarrow\ \frac{dx}{dt} = -\frac{\frac{x^2}{t^2} + 2\frac{x}{t}}{2 + 3\frac{x}{t}}$$

Făcând acum schimbarea de funcţie

$$u = \frac{x}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = t\frac{du}{dt} + u,$$

găsim

$$t\frac{du}{dt} + u = -\frac{u^2 + 2u}{2 + 3u} \ \Rightarrow\ t\frac{du}{dt} = -\frac{u^2 + 2u}{2 + 3u} - u \ \Rightarrow\ t\frac{du}{dt} = \frac{-4u^2 - 4u}{2 + 3u}.$$

Ecuaţia în u la care am ajuns este o ecuaţie cu variabile separabile, şi deci:

$$-\frac{1}{4}\int \frac{3u + 2}{u^2 + u}\ du = \int \frac{dt}{t}\ dt$$

Cum:

$$\frac{3u+2}{(u^2+u)} = \frac{3u+2}{u(u+1)} = \frac{2}{u} + \frac{1}{u+1},$$

obţinem:

$$-\frac{1}{4}[2\ln|u| + \ln|u+1|] = \ln|t| + C \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{1}{t(u^2(u+1))^{1/4}}\right) = C \;\Rightarrow\; \frac{1}{t^4u^2(u+1)} = e^{-4C}., \quad C \in \mathbb{R}$$

Înlocuind $u = \dfrac{x}{t}$, obţinem, soluţia $x = x(t)$ definită implicit prin

$$\frac{1}{t(x^2(x+t))} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene

$$x' = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right) \tag{4}$$

$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R},\; i = 1, 2,$ f este o funcţie continuă pe un interval I.

Caz 1. Dacă $c_1 = c_2 = 0$ atunci ecuaţia se poate scrie

$$x' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{x}{t}}{a_2 + b_2\frac{x}{t}}\right)$$

şi este omogenă.

Exemplul 2.2. *Determinaţi soluţia generală pentru urmatoarea ecuaţie*

$$2t + x = (4t - x)x'$$

Rezolvare: Ecuaţia se încadreazâ în cazul 1 deoarece putem scrie

$$x'(t) = \frac{2t + x}{4t - x}$$

deci

$$x'(t) = \frac{2 + \frac{x}{t}}{4 - \frac{x}{t}}.$$

Efectuăm schimbarea de funcţie $u = \frac{x}{t}$ şi obţinem:

$$t\frac{du}{dt} + u = \frac{2+u}{4-u} \;\Rightarrow\; t\frac{du}{dt} = \frac{u^2 - 3u + 2}{4-u} \;\Rightarrow\; \frac{4-u}{(u-1)(u-2)}\,du = \frac{dt}{t}.$$

Calculăm ultima integrală prin descompunerea în fracţii simple

$$\frac{4-u}{(u-1)(u-2)} = \frac{-3}{u-1} + \frac{2}{u-2}$$

şi obţinem:

$$-3\int\frac{du}{u-1} + 2\int\frac{du}{u-2} = \int\frac{dt}{t} \;\Rightarrow\; -3\ln(u-1) + 2\ln(u-2) = \ln(t) + C \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{(u-2)^2}{t(u-1)^3}\right) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

şi deci

$$\frac{(u-2)^2}{t(u-1)^3} = e^C \overset{not}{=} C_1 \;\Rightarrow\; \frac{(x-2t)^2}{t^2} = C_1 t\frac{(x-t)^3}{t^3}.$$

Obţinem soluţia generală a ecuaţiei:

$$(x - 2t)^2 = C_1(x - t)^3.$$

Caz 2.

$$x' = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right)$$

Presupunem că $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ şi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Atunci sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} a_1t + b_1x + c_1 = 0 \\ a_2t + b_2x + c_2 = 0 \end{cases}$$

admite soluţie unică (t_0, x_0).

Efectuăm substituţiile:

de **variabilă** $s = t - t_0$

de **funcţie** $y = x - x_0$.

Atunci

$$y'(s) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = x'(t) \quad \left(\text{avem } \frac{dy}{dx} = 1,\ \frac{dt}{ds} = 1\right)$$

şi ecuaţia devine

$$y' = f\left(\frac{a_1t + b_1u}{a_2t + b_2u}\right)$$

deci de tipul **Caz 1.**

Exemplul 2.3. *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei:*

$$x' = \frac{2t - x}{t + 2x - 5}.$$

Rezolvare: Observăm că $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ si

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

deci ne situam în cazul 2 şi, prin urmare vom efectua schimbările $y = x - x_0$, $s = t - t_0$, unde (x_0, t_0) este soluţia sistemului algebric:

$$\begin{cases} 2t - x = 0 \\ t + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

Rezultă imediat $x_0 = 2$ si $t_0 = 1$, şi deci $y = x - 2$, $s = t - 1$. Avem:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2(s+1) - y - 2}{s + 1 + 2y + 4 - 5} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{ds} = \frac{2s - y}{s + 2y}$$

care este o ecuaţie de tipul celor tratate la cazul 1. Facem deci o altă schimbare de funcţie

$$\frac{y}{s} = u(s) \quad\Rightarrow\quad y = su \quad\Rightarrow\quad y' = su' + u$$

şi obţinem:

$$s\frac{du}{ds} = \frac{2 - u}{1 + 2u} - u \;\Rightarrow\; s\frac{du}{ds} = \frac{2 - 2u - 2u^2}{1 + 2u},$$

pe care o putem integra separând variabilele:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2u + 1}{u^2 + u - 1}\,du = \int \frac{ds}{s}$$

şi deci

$$\ln(u^2 + u - 1)^{-1/2} = \ln|s| + C, \quad C \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \frac{1}{s\sqrt{u^2 + u - 1}} = e^C \;\Rightarrow\; s^2(u^2 + u - 1) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Revenind la funcţia x cu variabila t, găsim

$$y^2 + ys - s^2 = C_1 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 + (x-2)(t-1) - (t-1)^2 = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Caz 3.

$$x' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)$$

Presupunem că $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ şi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

Atunci

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$$

şi ecuaţia se scrie

$$x' = f\left(\frac{\lambda(a_2 t + b_2 x) + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right).$$

Substituţia de funcţie $z(t) = a_2 t + b_2 x(t)$ conduce la ecuaţia cu variabile separabile

$$z' = a_2 + b_2 f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right).$$

Exemplul 2.4. *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei:*

$$(x - t + 2)x' + t - x - 1 = 0.$$

Rezolvare: Ecuaţia este echivalentă cu

$$x' = \frac{x - t + 1}{x - t + 2}.$$

Observăm că $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ şi $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, şi vom face, deci, substituţia $z = x - t$. Obţinem succesiv

$$z' + 1 = \frac{z+1}{z+2} \;\Rightarrow\; z' = \frac{-1}{z+2} \;\Rightarrow\; \int (z+2)\,dz = -\int dt.$$

Rezultă

$$\frac{z^2}{2} + 2z = C - t \;\Rightarrow\; \frac{(x-t)^2}{2} + 2x - t = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 2.1. *Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii:*

(1) $tx' + \dfrac{x^2}{t} = x$;
(2) $(x^2 - 2tx)\,dt = (t^2 - 2tx)\,dx$;
(3) $(\sqrt{tx} - t)\,dx + x\,dt = 0$;
(4) $(3x + 2t + 4)\,dt + (4t + 6x + 5)\,dx = 0$
(5) $x' = \dfrac{x + t - 2}{x - t - 4}$.

3. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

O ecuaţie diferenţială de forma
$$x'(t) = a(t)x + b(t) \tag{5}$$
unde a, b sunt funcţii continue pe un interval real, se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul I**.

Ecuaţia poate fi scrisă echivalent:
$$x'(t) - a(t)x = b(t). \tag{6}$$
Prin înmulţirea ecuaţiei (6) cu $e^{-\int a(t)\,dt}$, obţinem
$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-\int a(t)\,dt}\right) = b(t)e^{-\int a(t)\,dt}$$
se găseşte soluţia generală a acestei ecuaţii - prin integrare- sub forma
$$x(t) = e^{\int a(t)\,dt}\left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)\,ddt}\,dt\right), \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemplul 3.1. *Să se determine soluţia generală ecuaţiei*
$$tx' - x + t = 0, t > 0.$$

Rezolvare: Paşii pe care-i urmăm sunt următorii:

- scriem ecuaţia echivalent:
$$x' - \frac{1}{t}x = -1 \tag{7}$$
- determinam *factorul integrant* notat $\mu(t)$
$$\mu(t) = e^{-\int \frac{1}{t}\,dt} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$$
- înmulţim ecuaţia (7) cu $\mu(t)$:
$$\frac{x'}{t} - \frac{1}{t^2}x = -\frac{1}{t}$$
şi remarcăm că expresia din partea dreaptă a semnului egal este o derivată totală:
$$\frac{d}{dt}\left(x \cdot \frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t}$$
- integrăm ultima ecuaţie şi obţinem:
$$\frac{x}{t} = -\ln t + C \;\Rightarrow\; x = t\,(C - \ln t)\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 3.2. *Să se rezolve problema Cauchy:*
$$\begin{cases} x' + \dfrac{2}{t^2-1}x = 2t + 2 \\ \\ x(0) = -3 \end{cases}$$

Rezolvare: Factorul integrant este
$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t^2-1}\,dt} = e^{\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|} = \frac{t-1}{t+1}$$
şi, deci, înmulţind ecuaţia cu $\mu(t)$, obţinem:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{t+1}x\right) = (2t+2)\frac{t-1}{t+1} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{t+1}{t-1}\left(C + 2\int (t-1)\,dt\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Obţinem succesiv

$$x = C\frac{t+1}{t-1} + \frac{t+1}{t-1}(t-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x = C\frac{t+1}{t-1} + (t+1)(t-1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Impunem acum condiţia iniţială $x(0) = -3$ şi deducem

$$-(C+1) = -3 \;\Rightarrow\; C = 2.$$

Soluţia problemei este

$$x(t) = 2\frac{t+1}{t-1} + (t+1)(t-1).$$

Exemplul 3.3. *Să se rezolve problema Cauchy:*

$$\begin{cases} x' + 2tx = t^3 \\ x(0) = (e-1)/2. \end{cases}$$

Rezolvare: Factorul integrant este

$$\mu(t) = e^{\int 2t\,dt} = e^{t^2}.$$

Înmulţim ecuaţia cu $\mu(t)$, obţinem:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^2}x(t)\right) = t^3 e^{t^2}$$

şi, prin urmare:

$$e^{t^2}x(t) = t^3 e^{t^2} + C \;\Rightarrow\; x(t) = e^{-t^2}\left(C + \int t^3 e^{t^2}\,dt\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pentru calculul integralei facem schimbarea de variabilă $t^2 = y, \quad 2t\,dt = dy$:

$$\Rightarrow \int t^3 e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int y e^y\,dy = \frac{1}{2}\left(ye^y - e^y\right) = \frac{1}{2}e^y(y-1) = \frac{1}{2}e^{t^2}(t^2-1).$$

Atunci

$$x(t) = Ce^{-t^2} + \frac{1}{2}(t^2-1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Constanta C o găsim impunând conditia iniţială

$$x(0) = C - \frac{1}{2} \;\text{ şi }\; x(0) = \frac{e-1}{2} \quad \Rightarrow C = \frac{e}{2}$$

În concluzie soluţia problemei Cauchy este:

$$x(t) = \frac{e^{1-t^2} + t^2 - 1}{2}.$$

Exerciţiul 3.1. *Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale*

(1) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t} = t^3 - 3$;

(2) $\cos^2(t)x' + x = \operatorname{tg}(t)$;

(3) $(1+t^3)x' + 6t^2x = 1 + t^2$.