Analiză Matematică
Tema 1

Problema 1 *Demonstraţi că, pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+y)^3 - (x^3+y^3) = 3xy(x+y)$$
$$(x+y)^5 - (x^5+y^5) = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

Problema 2 *Rezolvaţi ecuaţia* $16^{|x|} - 2 \cdot 4^{|x|} - 8 = 0$.

Problema 3 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$. *Determinaţi* $f(3x)$, $3f(x)$, $f(x^2)$, $f(x)^2$.

Problema 4 *Determinaţi valorile minime ale următoarelor funcţii:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|^2 + 6$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x^2-2x+5}$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2+6x-8}$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

Problema 5 *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n+1}{3n+5}$. *Precizaţi valorile lui n pentru care* $|x_n - \frac{1}{3}| < \frac{1}{33}$.

Problema 6 *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^5+n^2+3n+5}{4n^3-2n^2+n-6}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln(n^2+2n+3) - \ln(3n^2+n-6)\right)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n+1)}{\ln(n^6+2n+3)}$.

Problema 7 *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\right)$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n}{5\cdot 3^{n+1}+5\cdot 4^{n+2}}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+n-1}{3n^2+4n+1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Problema 8 *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{2n^2}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+4}{2^n+1}\right)^{3^n}$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4\sqrt{n}+7}{3n+7}\right)^{2\sqrt{n}}$.

Problema 9 *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 7^n}$.

Problema 10 *Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n^2(n+1)^2}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Problema 11 *Determinaţi sumele următoarelor serii*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$; *2)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}$; *3)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2^{2n}}$.

Problema 12 *Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$; *2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+3^n}$; *3)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n)$.

Problema 13 *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparaţie*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4+\sin n}{n}$; *2)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+4}$; *3)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2n+5}{n^5+n+2}$; *4)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)^2$.

Problema 14 *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului raportului*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$; *2)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$; *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 3^n}{n^n}$; *4)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$.

Problema 15 *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului radicalului*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; *2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n+2}$; *3)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$; *4)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{n\ln n}$; *6)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{n^2}$.

Problema 16 *Studiaţi convergenţa următoarei serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{4\cdot 8\cdot\ldots\cdot 4n}$.

Problema 17 *Studiaţi convergenţa următoarei serii cu ajutorul criteriului de condensare*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Problema 18 *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; *2)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2+\ln n}$; *3)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\sqrt[n]{5}-1)$.

Problema 19 *Demonstraţi că seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}$ *este convergentă, fără a fi absolut convergentă.*