

Analiză Matematică

Tema 1

Problema 1 Demonstrați că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x + y)^3 - (x^3 + y^3) = 3xy(x + y)$$
$$(x + y)^5 - (x^5 + y^5) = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2).$$

Problema 2 Rezolvați ecuația $4^{|x|} - 2 \cdot 2^{|x|} - 8 = 0$.

Problema 3 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$. Determinați $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $f(x)^2$.

Problema 4 Calculați $\log_3(5 - \sqrt{7}) + \log_3(5 + \sqrt{7}) - \log_3 2$.

Problema 5 Calculați suma $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 301$.

Problema 6 Demonstrați că $\sin(a + b) \cdot \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 7 Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{n+1}{3n+5}$. Precizați valorile lui n pentru care $|x_n - \frac{1}{3}| < \frac{1}{45}$.

Problema 8 Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 4n^2 + 2n + 7}{2n^3 + 4n^2 + n - 2}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(2n^3 + 2n + 5) - \ln(3n^3 + 2n - 6))$;
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^3 + 4n + 5)}{\ln(n^6 + 3n + 2)}$.

Problema 9 Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n + \left(\frac{1}{3} \right)^{n+2} + \left(\frac{3}{2} \right)^{2n+1} \right)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 5^n}{5 \cdot 4^{n+1} + 4 \cdot 5^{n+2}}$;
3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + n - 1}{3n^3 + 4n^2 + 1} \cdot \left(\frac{6}{5} \right)^n$.

Problema 10 Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n^2 + n + 2} \right)^{2n^2}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 5}{2^{n+1}} \right)^{4^n}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 3\sqrt{n} + 7}{3n + 7} \right)^{3\sqrt{n}}$.

Problema 11 Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$.

Problema 12 Folosind eventual teorema Stolz-Césaro, determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n^2(n+1)^2}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

Problema 13 Determinați sumele următoarelor serii

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2^{2n}}.$$

Problema 14 Demonstrați că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n+2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{2^n + 3^n}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n).$$

Problema 15 Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparație

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 3n + 4}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 5}{n^5 + n + 2}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1} \right)^2.$$

Problema 16 Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului raportului

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}.$$

Problema 17 Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului radicalului

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^{n+3}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n + 2};$$
$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{n \ln n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+5} \right)^{n^2}.$$

Problema 18 Studiați convergența următoarei serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{4 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4n}.$$

Problema 19 Studiați convergența următoarei serii cu ajutorul criteriului de condensare

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Problema 20 Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2 + \ln n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{4} - 1).$$

Problema 21 Demonstrați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă.