

Analiză Matematică 2

Temă (CC)

Problema 1 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} \sin 4x$. Calculați $df(x)$, $df(0)$, $df(0; \frac{1}{10})$.

Problema 2 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

1) Calculați $df(x)$, $df(\frac{\pi}{3})$, $df(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{180})$.

2) Precizați o valoare aproximativă a lui $\sin 61^\circ$ obținută cu ajutorul uneia dintre diferențialele de mai sus.

Problema 3 Calculați $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

1) $f(x, y) = x^5 + 4xy^3 - y^5$, 2) $f(x, y) = \frac{2x+4y}{3x+5y}$, 3) $f(x, y) = e^{x^2y+x} \cos y$,

4) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + 2xy - 4y^3}$.

Problema 4 Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$.

1) Demonstrați că $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in D$.

2) Calculați $df(x, y)$, $df(1, \frac{\pi}{2})$, $df(1, \frac{\pi}{2}; \frac{1}{10}, \frac{2}{10})$.

3) Precizați o valoare aproximativă a lui $f(1 + \frac{1}{10}, \frac{\pi}{2} + \frac{2}{10})$ obținută cu ajutorul uneia dintre diferențialele de mai sus.

Problema 5 Determinați punctele de extrem ale funcțiilor

1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 4y + 6z$

și precizați natura acestora.

Problema 6 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y^3 + 2y$. Calculați $\frac{df}{d\vec{v}}(1, 2)$, unde $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Crește f într-o vecinătate a lui $A(1, 2)$ după direcția lui \vec{v} , sau scade după această direcție?

Problema 7 Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 4^n}$.

1) Determinați raza de convergență, intervalul de convergență și mulțimea de convergență pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 4^n}$.

2) Este seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 4^n}$ convergentă, sau divergentă?

Problema 8 Determinați

1) $\int \sin(2x + 5) dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x + 2)^4}$.

Problema 9 Determinați

$$1) \int x \arctg x dx; \quad 2) \int x^2 \cos x dx.$$

Problema 10 Determinați

$$1) \int \sqrt[4]{\ln x} \frac{1}{x} dx; \quad 2) \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

Problema 11 Determinați primitivele următoarelor funcții raționale.

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}; \quad 2) \int \frac{x}{x^2 - 6x + 8} dx.$$

Problema 12 Determinați primitivele următoarelor funcții reducibile la funcții raționale.

$$1) \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}}.$$

Problema 13 Demonstrați că funcția

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{t^3} dt,$$

este strict crescătoare.

Problema 14 Determinați

$$1) \int_0^1 \ln(1+x^2) dx; \quad 2) \int_1^2 x e^{2x} dx.$$

Problema 15 Determinați

$$1) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx; \quad 2) \int_0^2 \frac{x^2}{1+x^6} dx.$$

Problema 16 Studiind paritatea integrandului, demonstrați că

$$1) \int_{-1}^1 \frac{x^7}{1+x^{12}} dx = 0; \quad 2) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx = 0.$$

Problema 17 Determinați $\int_0^\pi \cos x \sqrt{4 + \sin^2 x} dx$.

Problema 18 Determinați valorile următoarelor limite

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arcsin t dt}{x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\sin x} e^{t^2} dt}.$$

Problema 19 Determinați ariile domeniilor plane mărginite de graficele următoarelor funcții

$$1. f, g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3, g(x) = -4x.$$

Problema 20 Determinați ariile suprafețelor de rotație obținute prin rotația graficelor următoarelor funcții în jurul axei Ox

1. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

Problema 21 Determinați volumele corpurilor de rotație obținute prin rotația graficelor următoarelor funcții în jurul axei Ox

1. $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$.

Problema 22 Determinați valorile următoarelor integrale improprii

1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 9x + 20} dx$.

Problema 23 Studiați convergența următoarelor integrale improprii

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 5x^2 + 2x + 1}$; 2) $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1 + 4x^3 + 2x^6}} dx$.

Problema 24 Studiați convergența următoarelor integrale improprii

1) $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2(5-x)} dx$; 2) $\int_4^5 \frac{1}{(x-1)(x-4)} dx$.

Problema 25 Determinați $\int_C x ds$, unde $(C) : \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}, t \in [1, 2]$.

Problema 26 Determinați valorile următoarelor integrale pe domenii dreptunghiulare

1) $\iint_{[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \times [1, 2]} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1+y^2)}} dx dy$.

Problema 27 Determinați aria domeniului plan mărginit de dreapta $(D) : y = x$ și de parabola $(P) : y = x^2$.

Problema 28 Determinați

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de parabolele $(P_1) : x^2 = y$ și $(P_2) : y^2 = x$.

Problema 29 Cu ajutorul coordonatelor polare, determinați

1. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D = \{(x, y); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; x \geq 0, y \leq 0\}$.