Analiză Matematică
Tema 1

Problema 1 *Demonstraţi că, pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+y)^3 - (x^3+y^3) = 3xy(x+y)$$
$$(x+y)^5 - (x^5+y^5) = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

Problema 2 *Rezolvaţi ecuaţia* $9^{|x|} - 8 \cdot 3^{|x|} - 9 = 0$.

Problema 3 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$. *Determinaţi* $f(3x)$, $3f(x)$, $f(x^2)$, $f(x)^2$.

Problema 4 *Calculaţi* $\log_2(5-\sqrt{13}) + \log_2(5+\sqrt{13}) - \log_2 3$.

Problema 5 *Calculaţi suma* $S = 1 + 5 + 9 + \ldots + 401$.

Problema 6 *Demonstraţi că* $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 7 *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n+1}{3n+7}$. *Precizaţi valorile lui* n *pentru care* $|x_n - \frac{1}{3}| > \frac{1}{15}$.

Problema 8 *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+4n^2+2n+7}{3n^4+4n^2+n-2}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(4n^3+3n+6) - \ln(2n^3+3n-5))$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+3n+5)}{\ln(n^6+2n+3)}$.

Problema 9 *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} \right)$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n}{4\cdot 3^{n+1}+3\cdot 4^{n+2}}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+n-1}{2n^3+4n^2+1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Problema 10 *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+2}\right)^{2n^2}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{2^n}$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+3\sqrt{n}+5}{3n+5}\right)^{3\sqrt{n}}$.

Problema 11 *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$.

Problema 12 *Folosind eventual teorema Stolz-Césaro, determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n^2(n+1)^2}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Problema 13 *Calculaţi sumele următoarelor serii:*

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}$.

Problema 14 *Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general:*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{3n+2}$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+4^n}$; *3)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n)$.

Problema 15 *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparaţie:*

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2n+1}$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2n+5}{n^5+n+2}$.

Problema 16 *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului raportului:*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$; *3)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 3^n}{n^n}$; *4)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots \cdot (4n-1)}$.

Problema 17 *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului radicalului:*

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{n+2}\right)^n$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^{n+3}$ *3)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$.

Problema 18 *Studiaţi convergenţa următoarei serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel:*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot 3n}$.

Problema 19 *Studiaţi convergenţa următoarei serii cu ajutorul criteriului de condensare*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Problema 20 *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2+\ln n}$.

Problema 21 *Demonstraţi că seria* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ *este convergentă, fără a fi absolut convergentă.*