

Matematici Speciale

Tema 1

Problema 1 Determinați valorile următoarelor integrale pe domenii paralelipipedice

1.
$$\iiint_{[0,2] \times [0,1] \times [0,\frac{\pi}{4}]} x^2 y e^{y^2} \sin z \, dx \, dy \, dz.$$

2.
$$\iiint_{[1,e] \times [1,2] \times [0,1]} \frac{\ln^2 x}{x} y^2 e^z \, dx \, dy \, dz.$$

3.
$$\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}] \times [0,1] \times [0,\frac{\pi}{4}]} \sin x \cos z \, dx \, dy \, dz.$$

Problema 2 Folosind eventual reducerea la integrale iterate, calculați

1.
$$\iiint_{[0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x + y + z) \, dx \, dy \, dz.$$

Problema 3 Cu ajutorul coordonatelor cilindrice, determinați

1.
$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz, V = \{(x, y, z); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 3\}.$$

2.
$$\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz, V = \{(x, y, z); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Problema 4 Cu ajutorul coordonatelor sferice, determinați

1.
$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz, V = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

2.
$$\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz, V = \{(x, y, z); 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y, z \geq 0\}.$$

Problema 5 Determinați volumul domeniului spațial V mărginit de paraboloidul (PB) : $x^2 + y^2 = 2z$ și planul (P) : $z = 2$.

Problema 6 Determinați $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, unde V este domeniul spațial determinat de sfera (S) : $x^2 + y^2 + z^2 = 90$ și de paraboloidul (PB) : $z = x^2 + y^2$.

Problema 7 Rezolvați următoarele ecuații

1. $x'' = 0$, cu condițiile $x(2) = 1$, $x'(2) = 2$.
2. $x^{(3)} = 0$, cu condițiile $x(1) = 2$, $x'(1) = -2$, $x''(1) = 1$.

Problema 8 Rezolvați ecuația $x'' = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, știind că $x(0) = 2$, $x'(0) = 2$.

Problema 9 Rezolvați următoarele ecuații cu variabile separabile.

1. $(1 + t^4)x' - 4t^3x = 0$.
2. $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x+2}\cos t$, cu condiția $x(\pi) = 2$.

Problema 10 Rezolvați următoarele ecuații liniare

1. $x' = -2x + 6e^{4t}$.
2. $x' = x + t$.
3. $tx' = x + 2\ln t$.

Problema 11 Rezolvați următoarele ecuații Bernoulli

1. $t^2x' + x^3 = tx$.
2. $x' - x = 2tx^2$.

Problema 12 Rezolvați următoarele ecuații Riccati

1. $x' = (x - t)^2 + 1$, fiind dată soluția particulară $\varphi(t) = t$.
2. $x' = x^2 - \frac{x}{t} - \frac{1}{t^2}$, știind că admite o soluție particulară de forma $\varphi(t) = \frac{A}{t}$, care trebuie determinată.

Problema 13 Rezolvați următoarele ecuații cu diferențiale exacte

1. $(t^4 + x)dt + tdx = 0$. Poate fi rezolvată și ca ecuație liniară?
2. $2txdt + (t^2 + 2x)dx = 0$.

Problema 14 Rezolvați următoarele ecuații omogene

1. $x' = \frac{t^2 + x^2}{tx}$, $t > 0$.

2. $x' = \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2, t > 0$, cu condiția $x(1) = -1$.

Problema 15 1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale cu coeficienți constanți neomogene

(a) $x'' - 4x' + 3x = e^{2t}$.

(b) $x'' - 3x' - 4x = t + 1$.

(c) $x'' + 6x' + 10x = t + 2$.

Problema 16 1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale cu coeficienți constanți neomogene

(a) $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 6e^{4t} + t + 1$.

Problema 17 1. Rezolvați următoarele ecuații diferențiale cu coeficienți constanți neomogene

(a) $x'' + x = \frac{1}{\sin t}, t \in (0, \pi)$.

(b) $x'' + x = 3 \sin^2 t$.