

Analiză Matematică

Tema 1

Problema 1 Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |4x - 10| - 2|5 - 2x|$ este constantă.

Problema 2 Rezolvați ecuația $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{55}{6}$.

Problema 3 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$. Determinați $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $f(x)^2$.

Problema 4 Calculați suma $S = \lg(1 - \frac{1}{2}) + \lg(1 - \frac{1}{3}) + \dots + \lg(1 - \frac{1}{100})$.

Problema 5 Calculați suma $S = 1 + 5 + 9 + \dots + 201$.

Problema 6 Calculați produsul $P = \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \dots \operatorname{tg} 89^\circ$.

Problema 7 Fie $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2025}}$. Arătați că $S \in (1, 2)$.

Problema 8 Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4+4n^3+2n+7}{3n^3+4n^2+n-2}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(2n^3 + 3n + 6) - \ln(3n^3 + 2n + 5)]$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^3+2n+5)}{\ln(n^6+2n+3)}$.

Problema 9 Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n + \left(\frac{4}{3} \right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3} \right)^{2n+3} \right)$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+4^n}{4 \cdot 2^{n+1}+2 \cdot 4^{n+1}}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3+2n-1}{2n^4+3n^2+1} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

Problema 10 Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+2} \right)^{n^2}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n+2}{3^n+1} \right)^{3^n}$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+3\sqrt{n}+4}{3n+4} \right)^{4\sqrt{n}}$.

Problema 11 Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n + 6^n}$.

Problema 12 Folosind eventual teorema Stolz-Césaro, determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n^2(n+1)^2}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

Problema 13 Calculați sumele următoarelor serii:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{8^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Problema 14 Demonstrați că următoarele serii sunt divergente cu ajutorul criteriului general necesar:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{4n+2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 5^n}; \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n).$$

Problema 15 Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparație:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^4 + 3n + 2}.$$

Problema 16 Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului raportului:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{n^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}.$$

Problema 17 Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului radicalului:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{3n+2} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+2} \right)^{n+1}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2} \right)^{n \ln n}.$$

Problema 18 Studiați convergența următoarei serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 3n}.$$

Problema 19 Studiați convergența următoarei serii cu ajutorul criteriului de condensare

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Problema 20 Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^3 + 2 \ln n}.$$

Problema 21 Demonstrați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă.