Capitolul 7

DERIVATE. DIFERENŢIALE

Noţiunea de *derivată*, elementul fundamental al calculului diferenţial, are o deosebită importanţă în studiul matematic al mărimilor variabile. Problemele principale care au condus la introducerea noţiunii de derivată sunt problema tangentei, respectiv determinarea tangentei la o curbă într-un punct dat, fiind cunoscută ecuaţia curbei, şi problema vitezei, respectiv determinarea vitezei unui punct mobil, fiind cunoscută legea de mişcare a acestuia. În cele ce urmează, vom formula aceste probleme în termeni matematici, cu ajutorul noţiunii de limită.

Problema tangentei

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul I, fie G_f graficul funcţiei f şi fie $A(a, f(a))$ un punct pe G_f. Dorim să determinăm ecuaţia tangentei în A la G_f.

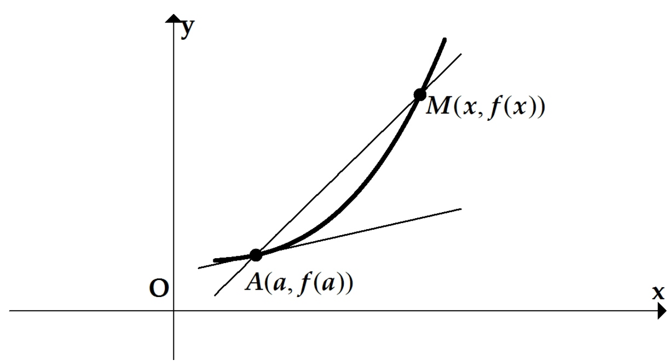


Figura 7.1: Tangenta în A la graficul funcţiei, respectiv secanta AM

Se poate observa că această tangentă poate intersecta G_f şi într-un alt punct decât A, iar dreptele care intersectează G_f doar în A nu sunt neapărat tangente la G_f. Nu putem deci defini această tangentă ca dreapta care are în comun cu G_f doar pe A, aşa cum s-a întâmplat pentru tangenta într-un punct la un cerc.

Fie $M(x, f(x))$ un alt punct pe G_f. Dreapta AM care intersectează G_f cel puţin în A şi M, se va numi dreaptă *secantă*; intuitiv, vom defini tangenta în A la G_f ca poziţia limită a secantei AM atunci când M tinde la A.

Cum panta dreptei AM este $m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (presupunem că AM nu este verticală, deci $x \neq a$), urmează că panta tangentei în A la G_f este $m_{\text{tg}} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. În aceste condiţii, ecuaţia tangentei în A la G_f este

$$y - f(a) = m_{\text{tg}}(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + m_{\text{tg}}(x - a),$$

rămânând a fi interpretate ulterior situaţiile în care m_{tg} (definită ca o limită) nu există, sau există, dar este infinită.

Problema vitezei

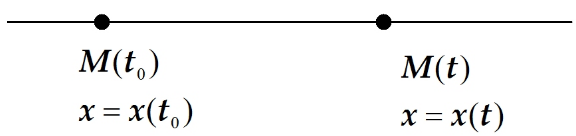


Figura 7.2: Poziţiile punctului M la momentele t_0, respectiv t

Considerăm un punct mobil M în mişcare rectilinie de-a lungul axei Ox, a cărui lege de mişcare este $x = x(t)$, unde t este timpul scurs de la momentul iniţial, iar x este abscisa punctului M.

Fie $[t_0, t]$ un interval de timp, $t > t_0$. În acest interval, M parcurge distanţa $x(t) - x(t_0)$, deci viteza sa medie (viteza pe care ar trebui s-o aibă M pentru a parcurge distanţa $x(t) - x(t_0)$ în timpul $t - t_0$, dacă s-ar mişca uniform) este $v_{[t_0,t]} = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$. Totuşi, cu cât intervalul de timp $[t_0, t]$ este mai mare, cu atât această viteză oferă mai puţine informaţii despre viteza lui M la momentul t_0. Intuitiv, intervalul $[t_0, t]$ trebuie să fie cât mai mic, iar viteza instantanee a lui M la momentul t_0 este atunci $v(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$.

7.1 Funcţii derivabile. Funcţii diferenţiabile

Derivata unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in D \cap D'$. Vom spune că *f are derivată* în x_0 dacă există limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, numită *derivata funcţiei f în punctul x_0* şi notată

$f'(x_0)$, în vreme ce dacă această limită există şi este finită vom spune că funcţia f este *derivabilă în* x_0.

Raportul $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se numeşte *raport incremental* şi măsoară viteza de variaţie a funcţiei pe intervalul $[x_0, x]$; prin analogie cu problema vitezei indicată mai sus, putem spune că $f'(x_0)$ reprezintă *viteza de variaţie instantanee a funcţiei f în punctul* x_0.

De asemenea, cu notaţia $x = x_0 + h$, obţinem că

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să studiem derivabilitatea funcţiei f în $x_0 = 2$. Observăm că

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4, \end{aligned}$$

deci f este derivabilă în $x_0 = 2$, iar $f'(2) = 4$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Să studiem derivabilitatea funcţiei f în $x_0 = 0$. Observăm că

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

deci f nu este derivabilă în $x_0 = 0$, dar are derivată în acest punct, iar $f'(0) = +\infty$.

Cu ajutorul noţiunii de derivată într-un punct, putem studia rezolvarea problemelor menţionate anterior.

Ecuaţia tangentei într-un punct la graficul unei funcţii

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi fie $a \in D \cap D'$. Conform consideraţiilor de mai sus, obţinem următoarele

1. Dacă f este derivabilă în a, atunci ecuaţia tangentei în $A(a, f(a))$ la G_f este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

observându-se că panta tangentei în $A(a, f(a))$ este valoarea derivatei $f'(a)$.

2. Dacă $f'(a) = +\infty$, sau $f'(a) = -\infty$, atunci tangenta în $A(a, f(a))$ la G_f este verticală, având ecuaţia $x = a$.

Viteza unui punct material în mişcare

Fie un punct mobil M în mişcare rectilinie de-a lungul axei Ox, a cărui abscisă x este dată prin $x = x(t)$, unde t este timpul scurs de la momentul iniţial. Atunci viteza instantanee a lui M la momentul t este $v(t) = x'(t)$.

Derivate laterale

Substituind în definiţia derivatei noţiunea de limită cu noţiunea de limită laterală, obţinem noţiunea de *derivată laterală*.

Astfel, dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare la stânga pentru D, vom spune că $f : D \to \mathbb{R}$ *are derivată la stânga* în x_0 dacă există limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, numită *derivata la stânga a funcţiei f în punctul x_0* şi notată $f_s'(x_0)$, în vreme ce dacă această limită există şi este finită vom spune că funcţia f este *derivabilă la stânga în x_0*. Analog definim noţiunile de *derivată la dreapta*, respectiv *derivabilitate la dreapta*. Cu notaţia $x = x_0 + h$, obţinem că

$$f_s'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$
$$f_d'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare atât la dreapta cât şi la stânga pentru D, atunci f are derivată în x_0 dacă şi numai dacă există ambele derivate laterale $f_s'(x_0)$ şi $f_d'(x_0)$, iar $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$. În aceste condiţii,

$$f'(x_0) = f_s'(x_0) = f_d'(x_0).$$

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Să studiem derivabilitatea funcţiei f în $x_0 = 0$. Observăm că

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1.$$

Cum $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, f nu are derivată în $x_0 = 0$, neputând fi deci derivabilă în acest punct.

Semitangente

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$ punct de acumulare la stânga al lui D. Dacă există $f'_s(a)$, spunem că G_f admite *semitangentă la stânga* în $A(a, f(a))$, înţelegând că există o dreaptă tangentă în A la partea din grafic aflată în stânga lui A. Ca mai sus, ecuaţia acestei semitangente este $y - f(a) = f'_s(a)(x - a)$, dacă $f'_s(a)$ este finită, respectiv $x = a$ dacă $f'_s(a) = +\infty$ sau $f'_s(a) = -\infty$. În mod analog se defineşte noţiunea de semitangentă la dreapta.

Puncte unghiulare, puncte de întoarcere

Fie acum $f : I \to \mathbb{R}$, I interval deschis, şi fie $a \in I$ un punct în care f este continuă.

Dacă $f'_s(a)$, $f'_d(a)$ există şi sunt infinite, dar diferite, semitangentele în A la G_f sunt în prelungire, spunându-se că $A(a, f(a))$ este un *punct de întoarcere*.

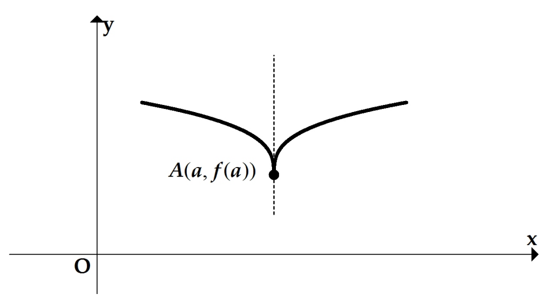


Figura 7.3: $A(a, f(a))$ punct de întoarcere, $f'_s(x_0) = -\infty$, $f'_d(x_0) = +\infty$

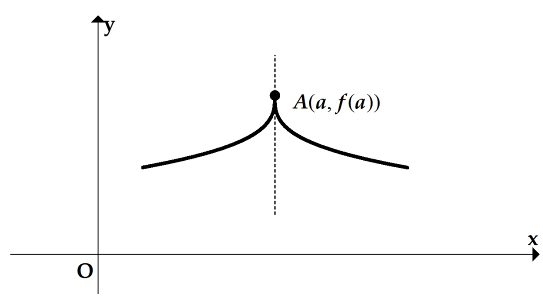


Figura 7.4: $A(a, f(a))$ punct de întoarcere, $f'_s(x_0) = +\infty$, $f'_d(x_0) = -\infty$

Dacă $f'_s(a)$, $f'_d(a)$ există, sunt diferite, şi măcar una dintre ele este finită, semitangentele în A la G_f nu sunt în prelungire, formând un unghi $\alpha \in (0, \pi)$. Se spune atunci că $A(a, f(a))$ este un *punct unghiular*.

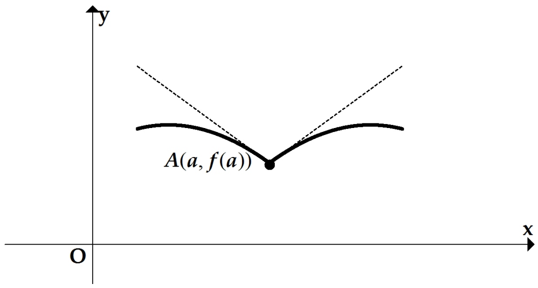


Figura 7.5: $A(a, f(a))$ punct unghiular, $f_s'(x_0)$, $f_d'(x_0)$ finite şi diferite

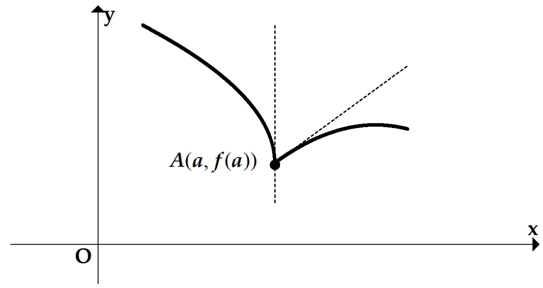


Figura 7.6: $A(a, f(a))$ punct unghiular, $f_s'(x_0) = -\infty$, $f_d'(x_0)$ finită

Din cele de mai sus, se observă că dacă $A(a, f(a))$ este un punct de întoarcere sau un punct unghiular, atunci f nu este derivabilă în a.

Funcţii derivabile pe o mulţime

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă f este derivabilă în fiecare punct al unei mulţimi $A \subseteq D$, spunem că *f este derivabilă pe A*. Dacă f este derivabilă în orice punct al domeniului său de definiţie, atunci se spune simplu că *f este derivabilă*.

Legătura între derivabilitate şi continuitate

În cele ce urmează, vom demonstra că o funcţie derivabilă într-un punct este neapărat continuă în acel punct.

Teorema 7.1. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi fie $a \in D \cap D'$ astfel încât f este derivabilă în a. Atunci f este continuă în a.*

Demonstraţie. Deoarece

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a), \quad \text{pentru } x \neq a,$$

urmează că

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right)\\ &= f(a) + \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\cdot \lim_{x\to a}(x - a)\\ &= f(a) + f'(a)\cdot 0\\ &= f(a),\end{aligned}$$

deci f este continuă în a. ∎

În mod similar, se poate arăta că derivabilitatea la stânga (dreapta) a funcţiei f în a antrenează continuitatea la stânga (dreapta) a funcţiei în a.

7.1.1 Operaţii cu funcţii derivabile

Se poate observa că operaţiile uzuale cu funcţii derivabile au ca rezultat funcţii derivabile, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 7.2. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$, f, g derivabile în x_0. Atunci*

1. *$f + g$, $f - g$ sunt derivabile în x_0, iar*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(derivata sumei este egală cu suma derivatelor), respectiv

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

(derivata diferenţei este egală cu diferenţa derivatelor).

2. *αf este derivabilă în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar*

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

(constanta cu care se înmulţeşte trece înaintea derivatei).

3. *fg este derivabilă în x_0, iar*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4. *$\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$, iar*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Demonstraţie. Vom demonstra doar 4), celelalte formule obţinându-se asemănător. Se observă că

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
&= \frac{1}{g(x_0)^2} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{g(x_0)^2} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\
&= \frac{1}{g(x_0)^2} \left(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right),
\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Se poate de asemenea demonstra prin inducţie matematică faptul că proprietăţile 1 şi 3 din Teorema 7.3 rămân valabile şi pentru mai mult de două funcţii. În speţă, are loc următorul rezultat.

Teorema 7.3. *Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D' \cap D$ astfel încât $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt derivabile în x_0. Atunci*

1. *Funcţia sumă $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ este derivabilă în x_0 şi*

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \ldots + f_n'(x_0).$$

2. *Funcţia produs $f_1 f_2 \ldots f_n$ este derivabilă în x_0 şi*

$$\begin{aligned}
(f_1 f_2 \ldots f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) \cdots f_n(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) \cdots f_n(x_0) \\
+ \ldots + f_1(x_0) f_2(x_0) \cdots f_n'(x_0).
\end{aligned}$$

7.1.2 Derivatele funcţiilor elementare

Vom calcula în cele ce urmeză derivatele unor funcţii uzuale.

Funcţia constantă

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0,$$

deci
$$\mathbf{c' = 0.}$$

Funcţia putere

Fie $n \in N^*$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1})}{h} = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

deci
$$\mathbf{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

Caz particular
$$\mathbf{(x)' = 1.}$$

Cu ajutorul unor raţionamente asemănătoare, se pot deduce formulele corespunzătoare de derivarea unor alte funcţii elementare, după cum urmează.

Funcţia radical

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\mathbf{(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,, \quad x \neq 0,} \text{ dacă } n \text{ este impar,}$$
$$\mathbf{(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,, \quad x > 0,} \text{ dacă } n \text{ este par.}$$

Caz particular
$$\mathbf{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,, \quad x > 0.}$$

Funcţia exponenţială cu bază e

$$\mathbf{(e^x)' = e^x\,, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Funcţia exponenţială cu bază oarecare

Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Atunci

$$\mathbf{(a^x)' = a^x \ln a\,, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Funcţia sinus

$$\mathbf{(\sin x)' = \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Funcţia cosinus

$$\mathbf{(\cos x)' = -\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Funcţia logaritmică cu bază e

$$\mathbf{(\ln x)' = \frac{1}{x}\,, \quad x > 0.}$$

Funcţia logaritmică cu bază oarecare

Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Atunci

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}\,,\ x > 0$$

deci

$$\mathbf{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\,, \quad x > 0.}$$

Funcţia tangentă

Fie $f : \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Atunci

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$$

deci

$$\mathbf{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \quad x \neq k\boldsymbol{\pi} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{2},\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Funcţia cotangentă

$$\mathbf{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, \quad x \neq k\boldsymbol{\pi},\ k \in \mathbb{Z}.}$$

7.1.3 Derivata funcţiei compuse

Teorema 7.4. *Fie I_1, I_2 două intervale din $\mathbb{R}$, $u : I_1 \to I_2$, $f : I_2 \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in I$ astfel încât u este derivabilă în x_0, iar f este derivabilă în $u(x_0)$. Atunci $f \circ u$ este derivabilă în x_0, iar*

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0)$$

Egalitatea menţionată în enunţul teoremei de mai sus se mai poate pune şi sub forma prescurtată

$$\mathbf{(f(u))' = f'(u) \cdot u',}$$

fiind deosebit de utilă pentru calculul derivatelor unor funcţii care, fără a fi elementare, se pot obţine prin compunerea unor funcţii elementare. În aceste situaţii, u se defineşte adesea cu ajutorul **tuturor** termenilor dintr-o paranteză, de la exponent, de sub radical, de la numitor, ş.a.m.d.. După această înlocuire se identifică apoi f, ţinând cont că funcţia de plecare se scrie ca $f(u)$.

Exemple. 1. $(\sin(x^2 + x + 2))'$.

Putem defini $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + x + 2$ (folosim toţi termenii din paranteză), iar în acest caz f este dată de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, deoarece după înlocuire $f(u) = \sin u$. Atunci

$$\begin{aligned}(\sin(x^2 + x + 2))' &= \sin'(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1).\end{aligned}$$

Echivalent,

$$\begin{aligned}(\sin(x^2 + x + 2))' &= (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1).\end{aligned}$$

2. $((3x + 2)^5)'$

Putem defini $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = 3x + 2$ (folosim toţi termenii din paranteză), iar în acest caz f este dată de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$, deoarece după înlocuire $f(u) = u^5$. Atunci

$$((3x + 2)^5)' = (u^5)' = 5u^4 \cdot u' = 5(3x + 2)^4(3x + 2)' = 15(3x + 2)^4.$$

3. $(\sqrt{x^2+1})'$

   Putem defini $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 1$ (folosim toţi termenii de sub radical), iar în acest caz f este dată de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, deoarece după înlocuire $f(u) = \sqrt{u}$. Atunci

$$(\sqrt{x^2+1})' = \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' = \frac{x}{x^2+1}.$$

7.1.4 $(\mathbf{f^g})'$

Formula de derivare a funcţiei compuse se poate aplica cu succes şi pentru derivarea funcţiilor exponenţiale în care atât baza cât şi exponentul conţin variabila. În acest sens, fie I un interval şi fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, unde $f(x) > 0$ pentru orice $x \in D$. Putem defini atunci funcţia $f^g : D \to \mathbb{R}$, $f^g(x) = (f(x))^{g(x)}$.

Deoarece $f(x)^{g(x)} > 0$ pentru orice $x \in D$, au loc relaţiile

$$f^g = e^{\ln\left(f^g\right)} = e^{g \ln f},$$

de unde, ţinând seama că $(e^u)' = e^u \cdot u'$, obţinem că

$$\begin{aligned}\left(f^g\right)' &= \left(e^{g\ln f}\right)' = e^{g\ln f} \cdot \left(g \ln f\right)' = e^{g \ln f}\left(g' \ln f + g\left(\ln f\right)'\right)\\ &= f^g\left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right),\end{aligned}$$

formulă care se poate scrie şi sub forma

$$\boldsymbol{\left(f^g\right)' = f^g \ln f \cdot g' + g f^{g-1} \cdot f'}.$$

Se poate observa că $\left(f^g\right)'$ este suma a doi termeni, primul reprezentând valoarea derivatei atunci când f este privită ca o constantă (iar f^g reprezintă în consecinţă o funcţie exponenţială), iar al doilea reprezentând valoarea derivatei atunci când g este privită ca o constantă (iar f^g reprezintă în consecinţă o funcţie putere).

7.1.5 Derivata unui determinant funcţional

Fie $f_{ij} : D \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, funcţii derivabile pe D. Atunci determinantul funcţional definit cu ajutorul acestor funcţii,

$$F : D \to \mathbb{R}, \quad F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

este la rândul său o funcţie derivabilă pe D şi

$$
\begin{aligned}
F' &= \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \dots & f'_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \dots & f'_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \dots & f'_{nn} \end{vmatrix}, \\
&= \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n,
\end{aligned}
$$

în determinantul Δ_i din membrul drept, $1 \leq i \leq n$, fiind derivate doar funcţiile de pe linia i. Demonstraţia se poate realiza cu ajutorul formulei de dezvoltare a unui determinant.

Exerciţiu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Conform formulei de mai sus,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \right)' \\
&= \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ -\sin(x+a) & -\sin(x+b) & -\sin(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}
$$

deoarece atât determinanţii în care două linii sunt proporţionale cât şi determinanţii în care toate elementele de pe o linie sunt egale cu 0 sunt nuli.

7.1.6 Derivata funcţiei inverse

Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ şi fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Atunci f este inversabilă, având loc relaţiile

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

respectiv

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pentru orice } y \in J,$$

iar f^{-1} este de asemenea continuă.

Ne propunem să determinăm transmiterea derivabilităţii de la f la f^{-1}. Derivând (formal, pentru moment) relaţia $f^{-1}(f(x)) = x$ cu ajutorul formulei de derivare a funcţiei compuse, obţinem că $\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x) = 1$, deci

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Rămâne acum sa dăm acestei formule un sens mai riguros.

Teorema 7.5. *Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ şi fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă f este derivabilă în x_0, iar $f'(x_0) \neq 0$, atunci $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$, iar*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exerciţiu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$. Demonstraţi că f este bijectivă şi calculaţi $(f^{-1})'(3)$.

Soluţie. Mai întâi, să observăm faptul că f este continuă şi strict crescătoare, fiind suma a două funcţii continue şi strict crescătoare. Fiind strict monotonă, f este injectivă. Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, iar f transformă un interval într-un interval, fiind continuă, urmează că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Cum f este atât injectivă cât şi surjectivă, urmează că ea este bijectivă, deci şi inversabilă.

Deoarece $f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, urmează că f^{-1} este derivabilă în orice $y = f(x) \in \mathbb{R}$, iar $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Pentru $y = 3$, urmează că $x^3 + 2x = 3$, deci $x = 1$ (cum f este injectivă, soluţia ecuaţiei $f(x) = 3$ este unică). Urmează că $\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$.

7.1.7 Diferenţiala unei funcţii

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval, şi fie $x \in I$. Să presupunem că f este derivabilă în x_0. În acest caz, conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, se obţine că

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

Să considerăm atunci funcţia $\alpha : I \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

şi să observăm că

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0,$$

deci α este continuă în x_0. În plus, pentru $x \neq x_0$, avem că

$$\begin{aligned} &f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \alpha(x)(x - x_0) \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right)(x - x_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

această egalitate fiind valabilă şi pentru $x = x_0$. Aceste consideraţii motivează introducerea definiţiei următoare.

Funcţii diferenţiabile într-un punct

Vom spune că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este *diferenţiabilă* în $x_0 \in I$ dacă există numărul $A \in \mathbb{R}$ şi funcţia $\alpha : I \to \mathbb{R}$, continuă şi nulă în x_0, astfel ca

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Conform celor de mai sus, dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este diferenţiabilă în x_0, iar $A = f'(x_0)$. Reciproc, să presupunem că f este diferenţiabilă în x_0. Atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = A,$$

deci f este derivabilă în x_0, iar $f'(x_0) = A$. Se obţine de aici următorul rezultat.

Teorema 7.6. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Atunci f este derivabilă în $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă este diferenţiabilă în $x_0 \in I$.*

Conform celor de mai sus, o funcţie derivabilă într-un punct x_0 admite în acel punct următoarea dezvoltare de ordinul întâi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \text{ cu } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

(de fapt, vom vedea ulterior că această dezvoltare reprezintă formula lui Taylor de ordinul întâi asociată funcţiei f în punctul x_0). Cum $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, termenul $\alpha(x)(x - x_0)$ este de ordin mai mic decat $f'(x_0)(x - x_0)$ pentru x apropiat de x_0. Ignorînd acest termen, obţinem următoarea formulă de aproximare

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0,$$

exprimabilă şi sub forma

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x - x_0 \approx 0,$$

sau, cu notaţia $x - x_0 = h$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h, \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în care diferenţa $f(x_0 + h) - f(x_0)$ reprezintă variaţia funcţiei atunci când argumentul variază de la x_0 la $x_0 + h$. Suntem atunci conduşi de considerentele de aproximare de mai sus la a defini următorul concept de diferenţială a unei funcţii.

Diferenţiala unei funcţii într-un punct

Fiind dată o funcţie $f : I \to R$ derivabilă în $x_0 \in I$, vom numi *diferenţială a funcţiei f în x_0* funcţia liniară $df(x_0)$ definită prin

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Urmează atunci că

$$f(x) - f(x_0) \approx df(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în loc de $df(x_0)(h)$ folosindu-se şi notaţia $df(x_0; h)$.

Pentru funcţia identică $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, urmează că

$$dx(x_0)(h) = h, \quad \text{pentru orice } x_0 \in \mathbb{R},$$

iar întrucât $dx(x_0)$ este independent de x_0, se va folosi în cele ce urmează notaţia simplificată dx. Cu notaţiile de mai sus,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)dx(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R},$$

de unde obţinem următoarea egalitate de funcţii liniare

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

care conduce la următoarea notaţie diferenţială alternativă a derivatei unei funcţii într-un punct

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Pentru un punct arbitrar x, obţinem deci

$$df(x) = f'(x)dx, \quad \text{respectiv} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \tag{7.1}$$

7.1.8 Operaţii cu funcţii diferenţiabile

Datorită relaţiei (7.1), regulile de calcul ale derivatelor unor funcţii se transmit şi la diferenţiale.

Teorema 7.7. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$, f, g derivabile în x. Atunci*

1. *$f + g$, $f - g$ sunt diferenţiabile în x, iar*

$$d(f+g)(x) = (f+g)'(x)dx = df(x) + dg(x),$$

   respectiv

$$d(f-g)(x) = (f-g)'(x)dx = df(x) - dg(x).$$

2. *αf este diferenţiabilă în x pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar*

$$d(\alpha f)'(x) = (\alpha f)'(x)dx = \alpha df(x).$$

3. *fg este diferenţiabilă în x_0, iar*

$$d(fg)(x) = (fg)'(x)dx = df(x)g(x) + f(x)dg(x).$$

4. *$\frac{f}{g}$ este diferenţiabilă în x dacă $g(x) \neq 0$, iar*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)dx = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}$$

Regulile de calcul de mai sus se mai pot scrie şi sub următoarele forme prescurtate, prin omiterea punctului curent

$$\mathbf{d(f+g) = df + dg, \quad d(f-g) = df - dg, \quad d(\boldsymbol{\alpha} f) = \boldsymbol{\alpha} df,}$$
$$\mathbf{d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}.}$$

Exemple. 1. $d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$.

2. $d(\cos^3 x) = (\cos^3 x)'dx = 3\cos^2 x(\cos x)'dx = -3\cos^2 x \sin x dx$

3. $d(x^2e^x) = (x^2e^x)'dx = (2xe^x + x^2e^x)dx$.

4. $d(x^2e^x) = d(x^2) \cdot e^x + x^2 \cdot d(e^x) = 2xe^x dx + x^2e^x dx = (2x + x^2)e^x dx$.

7.1.9 Diferenţiala funcţiei compuse

Are de asemenea loc şi o formulă de diferenţiere a funcţiei compuse similară celei de derivare.

Teorema 7.8. *Fie I_1, I_2 două intervale din $\mathbb{R}$, $u : I_1 \to I_2$, $f : I_2 \to \mathbb{R}$ şi fie $x \in I_1$ astfel încât u este diferenţiabilă în x, iar f este diferenţiabilă în $u(x)$. Atunci $f \circ u$ este diferenţiabilă în x, iar*

$$d(f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x)dx = f'(u(x))du(x).$$

Prin omiterea punctului curent, regula de mai sus se poate scrie sub următoarea formă prescurtată

$$\mathbf{d(f \circ u) = f'(u)du.}$$

De remarcat faptul că diferenţiala funcţiei compuse se calculează ca şi cum u ar fi variabilă independentă.

Exemple. 1. $d(\cos^3 x) = d(u^3) = 3u^2 du = 3\cos^2 x d(\cos x) = -3\cos^2 x \sin x dx$.

2. $d(e^{\sin x}) = d(e^u) = e^u du = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x dx$.

7.2 Derivate şi diferenţiale de ordin superior

7.2.1 Derivate de ordin superior

Fie I un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe o vecinătate a lui $x_0 \in I$. Dacă f' este la rândul său derivabilă în x_0, vom spune că f este *de două ori derivabilă în* x_0 iar derivata lui f' în x_0 se va numi *derivata a doua a lui* f sau *derivata de ordinul al doilea a lui* f, fiind notată $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$. Conform definiţiei,

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă f este de două ori derivabilă în orice $x \in I$, atunci f se numeşte *de două ori derivabilă pe* I.

În mod inductiv, dacă f este derivabilă de $n-1$ ori pe o vecinătate a lui x_0, iar derivata de ordinul $n-1$ este la rândul său derivabilă în x_0, vom spune că f este de n ori derivabilă în x_0. Derivata de ordinul n a lui f în x_0, notată prin $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$, este definită ca derivată a derivatei de ordinul $n-1$, în sensul că

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Similar, dacă f este de n ori derivabilă în orice $x \in I$, atunci f se numeşte *de n ori derivabilă pe* I.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2+3x}$. Atunci

$$f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x},$$
$$f''(x) = \left((2x+3)e^{x^2+3x}\right)' = (4x^2+12x+11)e^{x^2+3x}$$

$$f'''(x) = \left((4x^2+12x+11)e^{x^2+3x}\right)' = (8x^3+36x^2+66x+45)e^{x^2+3x}.$$

Funcţii de clasă C^k. Difeomorfisme

Vom nota

$$C^n(I) = \left\{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ de } n \text{ ori derivabilă pe } I,\ f^{(n)} \text{ continuă pe } I\right\}$$
$$C^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ derivabilă de orice ordin pe } I\}.$$

Dacă $f \in C^n(I)$ (respectiv $f \in C^\infty(I)$), atunci f se va numi *de clasă C^n pe I* (respectiv *de clasă C^∞ pe I*, sau *indefinit derivabilă pe I*). Dacă $f : I \to J$, f inversabilă este în aşa fel încât atât f cât şi f^{-1} sunt derivabile pe domeniile lor (respectiv sunt de clasă C^n pe domeniile lor), f se va numi *difeomorfism* (respectiv *C^n-difeomorfism* sau *difeomorfism de clasă C^n*) pe I.

Exemple.

1. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ (funcţia polinomială de gradul al doilea) este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$, $f^{(m)}(x) = 0$ pentru $m \geq 3$.

2. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n-1$, $a_n \in \mathbb{R}^*$ (funcţia polinomială de gradul n) este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f^{(n)}(x) = n!a_n$, $f^{(m)}(x) = 0$ pentru $m > n$.

3. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, putându-se demonstra prin inducţie că $f^{(n)}(x) = e^x$ pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $n \geq 1$.

4. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducţie că

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ şi } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\sin^{(4k)}(x) = \sin x, \quad \sin^{(4k+1)}(x) = \cos x$$
$$\sin^{(4k+2)}(x) = -\sin x, \quad \sin^{(4k+3)}(x) = -\cos x$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $k \geq 0$.

5. Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\cos x = \cos(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducţie că

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ şi } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned} \cos^{(4k)}(x) &= \cos x, \quad \cos^{(4k+1)}(x) = -\sin x \\ \cos^{(4k+2)}(x) &= -\cos x, \quad \cos^{(4k+3)}(x) = \sin x \end{aligned}$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ şi $k \geq 0$.

6. Funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f(x) = \frac{1}{x+a}$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, iar $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(x+a)^3}$, putându-se demonstra prin inducţie că

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\} \text{ şi } n \geq 1.$$

7.2.2 Formula lui Leibniz

Fiind date $f, g : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I, ne propunem să determinăm o formulă pentru derivata de ordinul n a produsului fg al acestora.

Teorema 7.9. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I, $n \in N^*$. Atunci fg este de clasă C^n pe I, iar*

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \ldots + C_n^n f g^{(n)}.$$

Formula de calcul a derivatei de ordinul n a unui produs demonstrată mai sus poartă numele de *formula lui Leibniz*. Remarcăm asemănarea între această formulă şi formula binomială

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n.$$

În aplicaţii, formula se utilizează în special pentru funcţii produs în care unul dintre factori este o funcţie polinomială (şi deci pentru care derivatele de la un anumit ordin încolo sunt nule, micşorând numărul termenilor nenuli din sumă), iar celălalt factor are derivatele de ordin superior uşor de determinat.

Exerciţiu. Determinaţi $(x^2e^{2x})^{(50)}$.

Soluţie. Considerând $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = e^{2x}$, observăm că $f^{(k)}(x) = 0$ pentru orice $k \geq 3$, iar $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ pentru orice $k \geq 0$. Atunci

$$\begin{aligned}(x^2e^{2x})^{(50)} &= C_{50}^{48}(x^2)''(e^{2x})^{(48)} + C_{50}^{49}(x^2)'(e^{2x})^{(49)} + C_{50}^{50}x^2(e^{2x})^{(50)}\\ &= C_{50}^{48}2\cdot 2^{48}e^{2x} + C_{50}^{49}2x\cdot 2^{49}e^{2x} + C_{50}^{50}x^2\cdot 2^{50}e^{2x}\\ &= 2^{49}e^{2x}(1225 + 100x + 2x^2).\end{aligned}$$

7.2.3 Diferenţiale de ordin superior

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in I$. Vom spune că f este *de două ori diferenţiabilă în* x_0 dacă f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0, iar f' este diferenţiabilă în x_0. În aceste condiţii, vom numi *diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei f în x_0*, notată $d^2f(x_0)$, funcţia de gradul al doilea definită prin

$$d^2f(x_0)(h) = f''(x_0)h^2, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obţinem atunci următoarea egalitate de funcţii de gradul al doilea

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)dx^2,$$

care conduce la următoarea notaţie diferenţială alternativă a derivatei de ordinul al doilea a unei funcţii într-un punct

$$f''(x_0) = \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}.$$

Aici, prin dx^2 se va înţelege $dx \cdot dx$. Inductiv, vom spune că f este *de n ori diferenţiabilă în x_0* dacă f este derivabilă de $n-1$ ori într-o vecinătate a lui x_0, iar $f^{(n-1)}$ este diferenţiabilă în x_0. În aceste condiţii, vom numi *diferenţiala de ordinul n a funcţiei f în x_0*, notată $d^nf(x_0)$, funcţia de gradul n definită prin

$$d^nf(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obţinem atunci următoarea egalitate de funcţii de gradul n

$$d^nf(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n,$$

care conduce la următoarea notaţie diferenţială alternativă a derivatei de ordinul n a unei funcţii într-un punct

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$$

Pentru un punct arbitrar x, obţinem deci

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad \text{respectiv} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Exemple. 1. $d^n(e^{ax}) = (e^{ax})^{(n)}dx^n = a^n e^{ax}dx^n$, pentru $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

2. $d^n(\ln(ax+b)) = (\ln(ax+b))^{(n)}dx^n = \frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}dx^n$, pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $ax+b > 0$.

7.3 Teoremele fundamentale ale calculului diferenţial

În această secţiune vom prezenta câteva proprietăţi importante ale funcţiilor derivabile şi unele aplicaţii ale acestora în studiul monotoniei şi aproximării funcţiilor. Începem prin a defini noţiunea de punct de extrem.

Puncte de minim local. Valori minime locale

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. Vom spune că $x_0 \in I$ este un *punct de minim local* dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$, adică valoarea $f(x_0)$ a lui f în x_0 este cea mai mică valoare a acestei funcţii pe o vecinătate a lui x_0. În aceste condiţii $f(x_0)$ se numeşte *valoare minimă locală*.

Puncte de maxim local. Valori maxime locale

Similar, vom spune că $x_0 \in I$ este un *punct de maxim local* dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$, adică valoarea $f(x_0)$ a lui f în x_0 este cea mai mare valoare a acestei funcţii pe o vecinătate a lui x_0. În aceste condiţii $f(x_0)$ se numeşte *valoare maximă locală*.

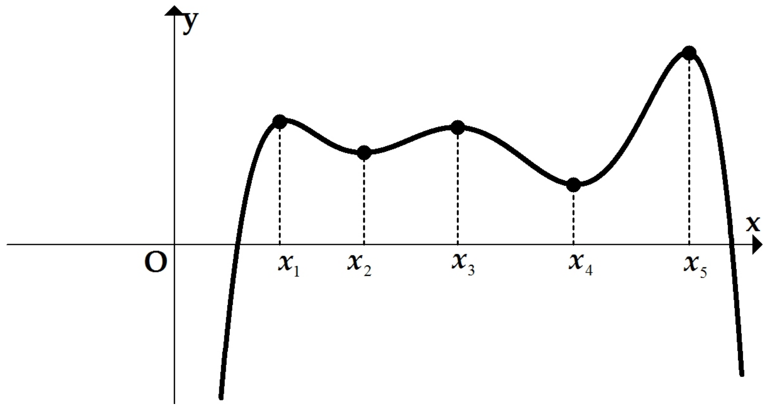


Figura 7.7: x_2, x_4 puncte de minim local, x_1, x_3, x_5 puncte de maxim local

Puncte de extrem local. Valori extreme locale

Dacă x_0 este un punct de minim sau maxim local al funcţiei f, se spune atunci că x_0 este un *punct de extrem local* al funcţiei f, valorile funcţiei f în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme locale* ale funcţiei f. De asemenea, dacă x_0 este un punct de minim (maxim) local al funcţiei f, punctul corespunzător $(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcţiei f se numeşte *punct de minim (maxim) local al graficului*.

Puncte de extrem global. Valori extreme globale

Dacă x_0 este în aşa fel încât $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in I$, vom spune că x_0 este *punct de minim global* al lui f, iar dacă $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in I$, vom spune că x_0 este *punct de maxim global* al lui f. Dacă x_0 este un punct de minim sau maxim global al funcţiei f, se spune atunci că x_0 este un *punct de extrem global* al funcţiei f, valorile funcţiei f în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme globale* ale funcţiei f. De asemenea, dacă x_0 este un punct de minim (maxim) global al funcţiei f, punctul corespunzător $(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcţiei f se numeşte *punct de minim (maxim) global al graficului*.

Se observă că orice punct de extrem global este şi punct de extrem local, nu însă şi reciproc. De exemplu 2 este punct de minim local al funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)^2$, deoarece $f(2) = 0$, iar pe o vecinătate suficient de mică a sa f ia doar valori pozitive, dar nu este punct de minim global, deoarece f ia şi valori negative (de exemplu, $f(0) = -4$).

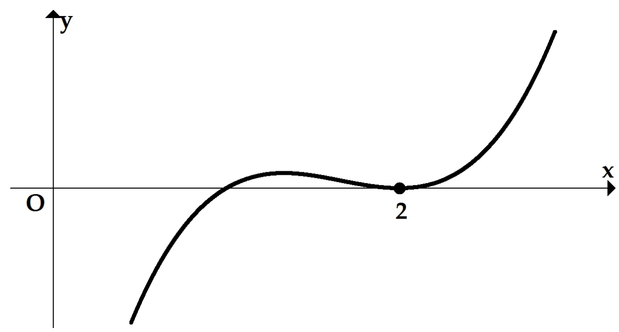


Figura 7.8: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)^2$

Se poate observa că o funcţie f poate admite mai multe puncte de minim sau maxim local, putând exista deasemenea valori minime locale mai mari decât valori maxime locale.

Exemple. 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ are 0 ca punct de minim global, deoarece $f(0) = 0$, iar $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie, 0 este şi punct de minim local. Se observă de asemenea că $f'(0) = 0$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)^2$ are 1 ca punct de maxim local, deoarece $f(1) = 0$, iar $f(x) \leq 0$ pentru x apropiat de 1 şi pe 3 ca punct de minim local, deoarece $f(3) = 0$, iar $f(x) \geq 0$ pentru x apropiat de 3. Totuşi, acestea nu sunt puncte de extrem global, deoarece f ia atât valori strict negative (de exemplu $f(0) = -18$), cât şi valori strict pozitive (de exemplu $f(4) = 18$).

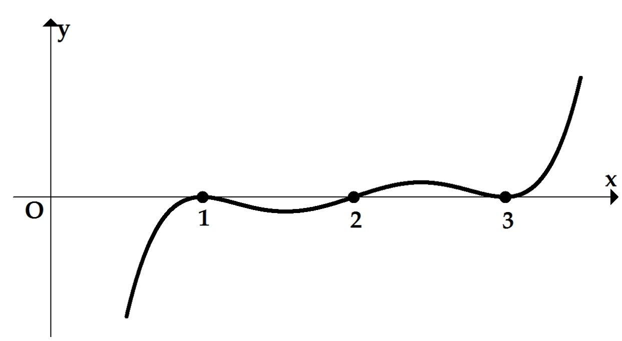


Figura 7.9: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)^2$

7.3.1 Teorema lui Fermat

Vom preciza în cele ce urmează un principiu de localizare a punctelor de extrem ale unei funcţii date, cunoscut sub numele de *teorema lui Fermat*

Teorema 7.10. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie x_0 un punct de extrem interior lui I în care f este derivabilă. Atunci $f'(x_0) = 0$.*

Se poate observa că dacă x_0 este un punct de extrem care nu este interior intervalului I, atunci $f'(x_0)$ poate să nu fie 0. În acest sens, fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Atunci 0 şi 1 sunt puncte de minim global, respectiv de maxim global, deoarece f este strict crescătoare pe $[0,1]$, deci sunt şi puncte de extrem local. Totuşi, $f'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$.

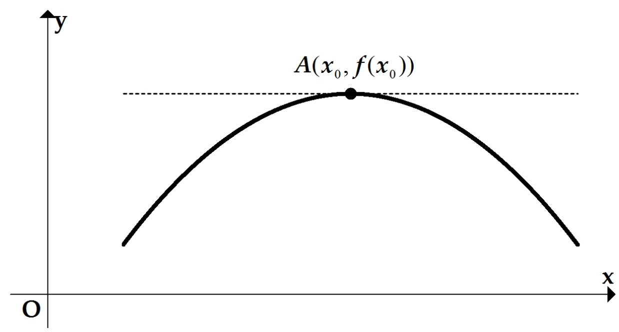
De asemenea, reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată, în sensul că dacă $f'(x_0) = 0$, atunci x_0 nu este neapărat punct de extrem, chiar dacă este interior intervalului I. În acest sens, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = 3x^2$, pentru $x \in \mathbb{R}$, deci $f'(0) = 0$. Totuşi, 0 nu este punct de extrem, deoarece $f(0) = 0$, iar f ia în orice vecinătate a lui 0 atât valori strict negative (pentru $x < 0$), cât şi valori strict pozitive (pentru $x > 0$).

În fine, să observăm şi că o funcţie poate avea puncte de extrem în care nu este derivabilă. În acest sens, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Atunci $0 = f(0) \leq f(x)$ pentru $x \in \mathbb{R}$, deci 0 este punct de minim global, dar $f_s'(0) = -1 \neq f_d'(0) = 1$, deci f nu este derivabilă în 0.

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Fermat.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ şi x_0 este un punct de extrem interior lui I în care f este derivabilă, atunci tangenta la grafic în punctul de extrem corespunzător $A(x_0, f(x_0))$ al graficului, de pantă $f'(x_0) = 0$, este paralelă cu Ox.



Puncte critice

Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Vom spune că x_0 este un *punct critic* al lui f dacă f este derivabilă în x_0, iar $f'(x_0) = 0$.

Altfel spus, punctele critice ale lui f sunt rădăcinile lui f'. Cu această precizare, teorema lui Fermat arată că punctele de extrem ale unei funcţii situate în interiorul domeniului de definiţie şi în care acea funcţie este derivabilă se găsesc printre punctele critice. Totuşi, s-a observat anterior că nu orice punct critic este punct de extrem.

Cu ajutorul teoremei lui Fermat, se poate demonstra şi următorul rezultat.

Teorema 7.11. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I. Atunci f' are proprietatea lui Darboux pe I.*

7.3.2 Teorema lui Rolle

Funcţie Rolle pe un interval

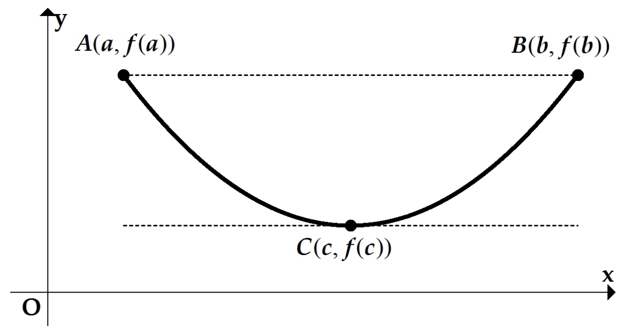
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este *funcţie Rolle* pe $[a, b]$ dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b). Următorul rezultat poartă numele de *teorema lui Rolle*.

Teorema 7.12. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f funcţie Rolle pe $[a, b]$, pentru care $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.*

Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Rolle.

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie Rolle pe $[a, b]$ pentru care $f(a) = f(b)$, atunci există pe graficul funcţiei f un punct $C(c, f(c))$ în care tangenta la grafic este paralelă cu Ox.



Teorema lui Rolle admite două consecinţe importante privind localizarea unor rădăcini ale derivatei, respectiv ale funcţiei.

Corolar 7.12.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I. Între două rădăcini ale lui f se află cel puţin o rădăcină a lui f'.*

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, astfel că $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Atunci f este funcţie Rolle pe $[x_1, x_2]$ şi aplicând teorema lui Rolle pe acest interval obţinem că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f'(c) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Corolar 7.12.2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I. Între două rădăcini consecutive ale lui f' se află cel mult o rădăcină a lui f.*

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ rădăcini consecutive ale lui f'. Presupunem prin reducere la absurd că există două rădăcini a, b ale lui f, $a < b$, situate între x_1 şi x_2, deci $x_1 < a < b < x_2$. Conform Corolarului 7.12.1, există cel puţin încă o rădăcină x_3 a lui f' situată între a şi b, ceea ce înseamnă că x_1, x_2 nu sunt rădăcini consecutive, contradicţie. ■

Cu ajutorul acestor corolarii se va preciza un algoritm de determinare a numărului rădăcinilor unei ecuaţii situate într-un interval dat.

Şirul lui Rolle

Fiind dată funcţia derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, dorim să determinăm numărul rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$. În acest scop, procedăm în următoarele etape.

1. Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ şi determinăm rădăcinile $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ale lui f'.

2. Determinăm $f(c_1)$, $f(c_2)$, $\ldots$, $f(c_n)$ şi limitele l_1 şi l_2 în capătul inferior, respectiv superior al lui I.

3. Construim şirul $R_0 = \operatorname{sgn}(l_1)$, $R_1 = \operatorname{sgn} f(c_1)$, $R_2 = \operatorname{sgn} f(c_2)$, $\ldots$, $R_n = \operatorname{sgn} f(c_n)$, $R_{n+1} = \operatorname{sgn} f(l_2)$, numit *şirul lui Rolle*, cu convenţia că $\operatorname{sgn}(+\infty) = 1$, $\operatorname{sgn}(-\infty) = -1$, întrucât limitele l_1 şi l_2 pot fi şi infinite. De asemenea, în acest şir se pot trece $+$ şi $-$ în loc de $+1$ şi respectiv -1. Dacă doi termeni consecutivi R_i şi R_{i+1} sunt identici, atunci între abscisele care le corespund nu se află nicio rădăcină a lui f. Dacă R_i şi R_{i+1} sunt diferiţi, dar nenuli, atunci între abscisele care le corespund se află exact o rădăcină a lui f. În fine, dacă un termen R_i este nul, aceasta înseamnă că abscisa care-i corespunde este rădăcină de ordinul cel puţin 2 a lui f, pentru determinarea exactă a ordinului de multiplicitate fiind necesară determinarea valorilor derivatelor de ordin superior în acest punct.

Exerciţiu. Determinaţi numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $2x^3 - 12x^2 + 18x + 3 = 0$.

Soluţie. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 2$. Atunci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 24x + 18 = 0$, de unde $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, iar $f(x_1) = 11$, $f(x_2) = 3$. Cum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, urmează că şirul lui Rolle este $- + + +$, schimbarea de semn petrecându-se între R_0 (corespunzător lui $x = -\infty$) şi R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$). Atunci ecuaţia dată are o singură rădăcină reală, situată în intervalul $(-\infty, 1)$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$

Exerciţiu. Determinaţi numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $x^2 - 2\ln x + m = 0$ în funcţie de valorile parametrului real m.

Soluţie. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\ln x + m$. Atunci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{x} = 0$, de unde $x_1 = 1$ (rădăcina $x_2 = -1$ nu convine, întrucât nu aparţine domeniului de definiţie al logaritmului natural), iar $f(x_1) = 1 + m$. De asemenea, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$1+m$	$+$

Dacă $m < -1$, şirul lui Rolle este $+ - +$, schimbările de semn petrecându-se între R_0 (corespunzător lui $x = 0$) şi R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$), respectiv între R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$) şi R_2 (corespunzător lui $x = +\infty$). Atunci ecuaţia dată are două rădăcini reale, situată în intervalele $(0,1)$ şi respectiv $(1,\infty)$.

Dacă $m = 1$, şirul lui Rolle este $+\ 0\ +$, $x_1 = 1$ fiind rădăcină de ordinul cel puţin 2. Cum $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$, urmează că $f''(1) \neq 0$, iar $x_1 = 1$ este rădăcină dublă a ecuaţiei date, aceasta neavând alte rădăcini reale.

Dacă $m > -1$, şirul lui Rolle este $+ + +$, fără schimbări de semn. Urmează că ecuaţia dată nu are rădăcini reale.

7.3.3 Teorema lui Lagrange

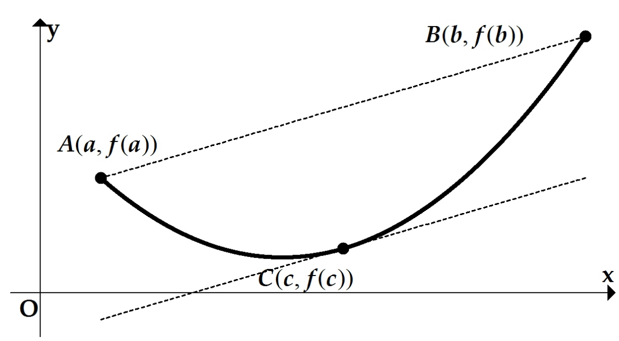
Teorema lui Rolle este un caz particular al următorului rezultat, numit *teorema lui Lagrange* sau *teorema creşterilor finite*.

Teorema 7.13. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f funcţie Rolle pe $[a,b]$. Atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Lagrange.

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie Rolle pe $[a,b]$, atunci există pe graficul funcţiei f un punct $C(c, f(c))$ în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda AB, unde $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ sunt capetele graficului lui f.



Teorema lui Lagrange are consecinţe importante în studiul monotoniei funcţiilor, enunţate în următorul rezultat.

Corolar 7.13.1. 1. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I, iar derivata sa este identic nulă pe I, atunci f este constantă pe I.*

2. *Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$, I interval, sunt derivabile pe I, iar derivatele lor sunt egale pe I, atunci f şi g diferă printr-o constantă pe I.*

3. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I, iar derivata sa este pozitivă (respectiv strict pozitivă) pe I, atunci f este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe I. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I, iar derivata sa este negativă (respectiv strict negativă) pe I, atunci f este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe I.*

Exemplu. Prima parte a Corolarului 7.13.1 se poate folosi pentru demonstrarea unor identităţi. În acest sens, să demonstrăm că

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{pentru } x \in (-1, 1).$$

Fie $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$. Atunci f este derivabilă pe $(-1, 1)$, iar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

de unde f este constantă pe $(-1, 1)$. Pentru a determina valoarea acestei constante, dăm lui x o valoare din intervalul $(-1, 1)$, de exemplu $x = 0$. Cum

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

urmează concluzia.

Exemplu. Cea de-a treia parte a Corolarului 7.13.1 este instrumentală în demonstrarea multor inegalităţi. În acest sens, să demonstrăm că

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Urmează că f este derivabilă pe $(0,\infty)$, iar

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0, \quad \text{pentru } x > 0,$$

deci f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Cum f este şi continuă în $x = 0$, urmează că $f(x) > f(0) = 0$ pentru $x > 0$, de unde rezultă prima parte a inegalităţii, cea de-a două parte demonstrându-se analog.

Exerciţiu. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ pe un interval $[a,b]$, $0 < a < b$, demonstraţi că

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}.$$

Soluţie. Cum f este funcţie Rolle pe $[a,b]$, urmează conform teoremei lui Lagrange că există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, deci $\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$, sau $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$. Cum $c \in (a,b)$, iar $a, b > 0$, urmează că $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, de unde concluzia.

Existenţa derivatelor laterale într-un punct

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange se poate determina de asemenea existenţa derivatei laterale a unei funcţii într-un punct, obţinută ca limită a unor alte derivate.

Corolar 7.13.2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subseteq I$, f este derivabilă pe $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ şi continuă la stânga în x_0. Dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(x) = \lambda$, atunci f are derivată la stânga în x_0, iar $f'_s(x_0) = \lambda$.*

Un rezultat asemănător se poate formula în ceea ce priveşte existenţa derivatei la dreapta într-un punct.

Corolar 7.13.3. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$, f este derivabilă pe $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ şi continuă la dreapta în x_0. Dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f'(x) = \lambda$, atunci f are derivată la dreapta în x_0, iar $f'_d(x_0) = \lambda$.*

Prin combinarea acestor corolarii se obţine următorul rezultat.

Corolar 7.13.4. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, şi fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că f este derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$, unde $V \in \mathcal{V}(x_0)$, continuă în x_0 şi există $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \lambda$. Atunci f este derivabilă în x_0, iar $f'(x_0) = \lambda$.*

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x^3 - a|$, $a \in \mathbb{R}$. Să determinăm a astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Se observă că f este continuă pe $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x(x^3 - a), & x \geq \sqrt[3]{a} \\ x(a - x^3), & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$, deci $f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - a, & x > \sqrt[3]{a} \\ a - 4x^3, & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$. Atunci $\lim\limits_{\substack{x \to \sqrt[3]{a} \\ x < \sqrt[3]{a}}} f'(x) = -3a$, deci, conform Corolarului 7.13.2, $f'_s(\sqrt[3]{a}) = -3a$. Similar, conform Corolarului 7.13.3, $f'_d(\sqrt[3]{a}) = 3a$. Ca f să fie derivabilă în $\sqrt[3]{a}$, este necesar şi suficient ca valorile acestor derivate laterale să fie egale, deci $-3a = 3a$, iar $a = 0$. Se observă atunci că $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x < 0 \end{cases}$, fiind derivabilă şi pentru orice $x \neq 0$.

Funcţii Lipschitz. Contracţii

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange, se poate demonstra că orice funcţie derivabilă cu derivata mărginită este o funcţie Lipschitz. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Corolar 7.13.5. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f funcţie Rolle pe $[a, b]$. Dacă există $L \geq 0$ astfel încât $|f'(c)| \leq L$ pentru orice $c \in (a, b)$, atunci f este funcţie Lipschitz pe $[a, b]$. Dacă, în plus, $L < 1$, atunci f este o contracţie pe $[a, b]$.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in [a, b]$, $x < y$. Conform teoremei lui Lagrange, aplicate pe intervalul $[x, y] \subseteq [a, b]$, pe care f este de asemenea funcţie Rolle, urmează că există $c \in (x, y)$ astfel ca $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Atunci

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq L|x - y|,$$

deci f este funcţie Lipschitz pe $[a,b]$. Dacă $L < 1$, conform definiţiei, f este o contracţie pe $[a,b]$. ∎

În particular, acest corolar poate fi utilizat pentru a stabili convergenţa unor şiruri recurente.

Exemplu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2x_n^2+1}{3x_n}$, $x_0 = 2$. Să demonstrăm că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să-i determinăm limita.

Fie $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x}$. Mai întâi, se observă că $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$, iar recurenţa dată se poate scrie sub forma $x_{n+1} = f(x_n)$. Totuşi, $(0,\infty)$ nu este o mulţime închisă, neputându-se aplica direct teorema de punct fix a lui Banach, deşi f transformă mulţimea $(0,\infty)$ în ea însăşi. Conform inegalităţii mediilor,

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{3x}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Deoarece

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \leq \frac{2}{3}x + \frac{1}{3\frac{2\sqrt{2}}{3}} < \frac{2}{3}x + 1, \quad \text{pentru orice } x \geq \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

se poate observa că $f(x) \leq 3$ pentru orice $x \in \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$, deci f transformă intervalul $D = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$ în el însuşi. Deoarece $f'(x) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$, urmează că $\frac{7}{21} \leq f'(x) \leq \frac{17}{27}$ pentru orice $x \in D$, deci f este o contracţie pe acest interval. Cum şi $x_0 \in D$, urmează conform teoremei de punct fix a lui Banach (teorema 6.14) că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la punctul fix l al lui f pe D. Din condiţia de punct fix, $l = \frac{2l^2+1}{3l}$, deci $l^2 = 1$, iar $l = 1$, deoarece $l_1 = -1 \notin D$. Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar limita sa este 1.

7.3.4 Teorema lui Cauchy

Următorul rezultat, atribuit lui Cauchy, constituie o generalizare a teoremei lui Lagrange.

Teorema 7.14. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g funcţii Rolle pe $[a,b]$. Dacă $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$, atunci $g(b) \neq g(a)$ şi există $c \in (a,b)$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} =$*

$\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

7.3.5 Regulile lui L'Hôpital

În unele dintre situaţiile în care calculul limitelor unor funcţii conduce la cazuri de nedeterminare de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ sau $\frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}$, pot fi utilizate cu succes aşa-numitele *reguli ale lui L'Hôpital*.

Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Teorema 7.15. *Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I şi fie f, g două funcţii definite pe I, cu excepţia eventuală a lui x_0. Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.
2. *f, g sunt derivabile pe I, cu excepţia eventuală a lui x_0.*
3. *$g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$.*
4. *Există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finită sau infinită.*

Atunci $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$, funcţia $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Să determinăm valoarea limitei $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. În acest scop, să observăm că funcţiile

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3,$$

sunt în aşa fel încât $\lim\limits_{x \to 0}(x - \operatorname{arctg} x) = \lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$, f, g sunt derivabile pe $\mathbb{R}$

iar $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. În plus,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3},$$

de unde obţinem că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

Uneori, este necesar să se aplice de mai multe ori succesiv regula lui L'Hôpital, întrucât noua limită $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ este tot de tip $\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

Exemplu. Să determinăm valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ În acest scop, să observăm că funcţiile

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \quad g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ g(x) = x - \sin x,$$

sunt în aşa fel încât $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - e^{-x} - 2x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - \sin x) = 0$, f, g sunt derivabile pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ iar $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. În plus,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Funcţiile

$$f_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad g_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ g_1(x) = 1 - \cos x$$

sunt în aşa fel încât $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + e^{-x} - 2) = \lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$, f_1, g_1 sunt derivabile pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ iar $g_1'(x) = \sin x \neq 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. În plus,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x}$$
$$= 2.$$

Urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2.$$

Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\dfrac{\infty}{\infty}$

Teorema 7.16. *Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I şi fie f, g două funcţii definite pe I, cu excepţia eventuală a lui x_0. Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.
2. *f, g sunt derivabile pe I, cu excepţia eventuală a lui x_0.*
3. *$g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$.*
4. *Există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, finită sau infinită.*

Atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Să calculăm limita $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}$, $a, b \in (0, \infty)$. În acest scop, să observăm că funcţiile

$$f : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(\sin(ax)), \quad g : (0, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln(\sin(bx))$$

sunt în aşa fel încât $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(\sin(bx)) = -\infty$, f, g sunt derivabile pe $(0, \varepsilon)$ iar $g'(x) = \frac{b \cos bx}{\sin bx} \neq 0$ pentru orice $x \in (0, \varepsilon)$. În plus,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(\sin(ax)))'}{(\ln(\sin(bx)))'} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \frac{\sin bx}{\sin ax}$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx}{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Urmează că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))} = 1.$$

Alte cazuri de nedeterminare

Regulile lui L'Hôpital sunt destinate în mod explicit calculului limitelor unor rapoarte de funcţii ce conduc la cazurile de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ şi $\frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}$. Totuşi, după rearanjarea unor termeni sau executarea unor operaţii de logaritmare, şi alte cazuri de nederminare pot fi tratate prin intermediul acestor reguli.

Cazul $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$

În situaţia în care calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$ conduce la cazul de nedeterminare $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ (adică $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$), atunci se încearcă scrierea produsului ca un raport. Folosind formula $\mathbf{fg} = \dfrac{\mathbf{f}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g}}}$ se obţine cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, iar folosind formula $\mathbf{fg} = \dfrac{\mathbf{g}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}}}$ se obţine cazul de nedeterminare $\frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}}$.

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3\ln x$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, limita se încadrează în cazul de nedeterminare $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$. Atunci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3\ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^3}{-3} = 0.$$

Cazul $\boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty}$

În situaţia în care calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)$ conduce la cazul de nedeterminare $\boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty}$ (adică $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$), atunci se încearcă obţinerea unui factor comun. Folosind formulele $\mathbf{f}-\mathbf{g} = \mathbf{f}(\dfrac{\mathbf{g}}{\mathbf{f}}-\mathbf{1})$ sau $\mathbf{f}-\mathbf{g} = \mathbf{g}(\dfrac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}-\mathbf{1})$, limita dată se transformă într-un produs, iar folosind formula $\mathbf{f}-\mathbf{g} = \dfrac{\frac{\mathbf{f}-\mathbf{g}}{\mathbf{fg}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{fg}}} = \dfrac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{fg}}}$ se obţine cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x - x\right)$.

Soluţie. Se va da factor comun e^x, deoarece acesta creşte mai rapid decât x pentru $x \to \infty$. Se obţine că

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x - x\right) = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

De asemenea

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0,$$

de unde

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x - x\right) = \infty(1-0) = \infty.$$

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Soluţie. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2},$$

limita iniţială fiind transformată într-o limită în cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$. Totuşi, în locul aplicării directe a regulii lui L'Hôpital, se recomandă simplificarea preliminară prin aplicarea limitelor fundamentale. Se obţine că

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x+\operatorname{tg} x)(x-\operatorname{tg} x)}{x\cdot x \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{tg} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^3}\\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=\!=} 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2}\\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=\!=} \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{2x} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Cazurile $\mathbf{1^\infty, 0^0, \infty^0}$

În situaţia în care calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ conduce la unul dintre aceste cazuri de nedeterminare, iar $f(x) > 0$ pe o vecinătate a lui x_0, se foloseşte formula $\mathbf{f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g\ln f}}$. Pentru cazul de nedeterminare $\mathbf{1^\infty}$, se poate ţine seama şi de faptul că $\lim\limits_{f\to 1}\dfrac{\ln f}{f-1} = 1$.

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\cos 2x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$, limita dată este în cazul de nedeterminare $\mathbf{1^\infty}$. Atunci

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x - \ln\cos 2x}{x^2}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x}{2x}}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(-\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 2\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}\cdot 2\right)} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{x}\right| = \infty$, limita dată este în cazul de nedeterminare $1^{\mathbf{\infty}}$. Atunci

$$\lim_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+e^x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e^x)}{x+e^x-1}\lim_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{e^x-1}{x}\right)} = e^2.$$

Exerciţiu. Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-\cos x}{1-\cos x}\right)^{\sin^2 x}$.

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-\cos x}{1-\cos x}\right) = \infty$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x = 0$, limita dată este în cazul de nedeterminare $\mathbf{\infty^0}$. Atunci

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\cos x}{1-\cos x}\right)^{\sin^2 x} &= e^{\lim_{x\to 0}\sin^2 x\ln\left(\frac{2-\cos x}{1-\cos x}\right)}\\
&= e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}x^2(\ln(2-\cos x)-\ln(1-\cos x))}\\
&= e^{\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln(2-\cos x)\right)-\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln(1-\cos x)\right)}\\
&= e^{-\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln(1-\cos x)\right)} = e^{-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x^2}}}\\
&\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=\!=} e^{-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{1-\cos x}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=\!=} e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin x + x^3\cos x}{\sin x}}\\
&= e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3x^2+\frac{x}{\sin x}\cdot x^2\cos x\right)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Exerciţiu. Determinaţi $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{x-\frac{\pi}{2}}$.

Soluţie. Deoarece $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)=0$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$, limita dată este în cazul de nedeterminare $\mathbf{0^0}$. Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{x-\frac{\pi}{2}} &= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ln(1-\sin x)} = e^{\lim_{u\to 0} u\ln(1-\sin(u+\frac{\pi}{2}))}\\ &= e^{\lim_{u\to 0} u\ln(1-\cos u)} = e^{\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1-\cos u)}{\frac{1}{u}}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} e^{\lim_{u\to 0}\frac{\frac{\sin u}{1-\cos u}}{-\frac{1}{u^2}}}\\ &= e^{-\lim_{u\to 0}\frac{u^2\sin u}{1-\cos u}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=\!=} e^{-\lim_{u\to 0}\frac{2u\sin u+u^2\cos u}{\sin u}}\\ &= e^{-\lim_{u\to 0}\left(2u+\frac{u}{\sin u}\cdot u\cos u\right)} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

7.3.6 Formula lui Taylor

Conform definiţiei diferenţiabilităţii, a fost observat anterior că dacă $f: I\to\mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0\in I$, atunci există $\alpha: I\to\mathbb{R}$ cu $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\alpha(x_0)=0$, astfel ca

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0),$$

iar în concluzie

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\quad \text{pentru } x\approx x_0.$$

Polinomul lui Taylor de ordinul n

În cele ce urmează, dorim să extindem această formulă de aproximare la una cu acurateţe superioară. Să presupunem că $f: I\to\mathbb{R}$ este derivabiă de ordinul n în $x_0\in I$, $n\geq 1$. Atunci derivatele de ordin până la $n-1$ inclusiv există pe o vecinătate a lui x_0; pentru simplitatea expunerii, să presupunem că acestea există pe întreg I. Funcţia polinomială $T_n: I\to\mathbb{R}$ definită prin

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se numeşte *polinomul lui Taylor de grad n* ataşat funcţiei f în punctul x_0.

Restul formulei lui Taylor de ordinul n

Fie acum $R_n : I \to \mathbb{R}$, definită prin

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Atunci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

sau

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &+ R_n(x), \end{aligned}$$

relaţie numită *formula lui Taylor de ordinul n* corespunzătoare funcţiei f în punctul x_0. Funcţia R_n astfel definită poartă numele de *restul formulei lui Taylor de ordinul n* şi măsoară eroarea cu care polinomul T_n aproximează funcţia f.

În ceea ce urmează, vom încerca să obţinem forme ale restului R_n care să precizeze mai multe informaţii despre precizia aproximării. Să observăm mai întâi că, în definiţia diferenţiabilităţii într-un punct x_0,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

funcţia polinomială de gradul 1

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

reprezintă de fapt polinomul Taylor T_1. Cum $R_1 = \alpha(x)(x - x_0)$, urmează că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Vom demonstra o proprietate similară pentru restul de ordin n. În acest scop, să calculăm mai întâi derivatele polinomului Taylor T_n. Se obţine că

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\ T_n''(x) &= f''(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$

$$\dots\dots$$

$$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0), \qquad T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0)$$

$$T_n^{(m)}(x) = 0, \quad \text{pentru } m > n.$$

Putem obţine de aici următoarele evaluări ale restului de ordin n şi ale derivatelor sale în x_0

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Să notăm $g : I \to R$, $g(x) = (x-x_0)^n$. Analog relaţiilor de mai sus, se observă că

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad g^{(n)}(x_0) = n!.$$

Fie $x \in I$ arbitrar. Aplicând teorema lui Cauchy funcţiilor R_n şi g pe intervalul $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$), obţinem că există c_1 între x_0 şi x astfel ca $\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}$, iar cum $R_n(x_0) = g(x_0) = 0$, urmează că

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Aplicând încă o dată teorema lui Cauchy funcţiilor R_n' şi g' pe intervalul $[x_0, c_1]$ (sau $[c_1, x_0]$), obţinem că în mod similar că există c_2 între x_0, şi c_1) astfel ca

$$\frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)},$$

deci

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Aplicând în mod iterativ teorema lui Cauchy, obţinem că există c_{n-1} între x_0 şi x astfel încât

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1)}(c_{n-1})}{g^{(n-1)}(c_{n-1})}.$$

Fie acum $(\overline{x}_k)_{k\geq 0}$ un şir convergent la x_0, $\overline{x}_k \neq x_0$. Conform celor de mai sus, există $c_{k,n-1}$ între x_0 şi $\overline{x}_k$ astfel încât

$$\frac{R_n(\overline{x}_k)}{g(\overline{x}_k)} = \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1})}{g^{(n-1)}(c_{k,n-1})} = \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0}}.$$

Prin trecere la limită, obţinem că

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R_n(\overline{x}_k)}{g(\overline{x}_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1})-R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1})-g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1}-x_0}}$$

Cum $c_{k,n-1}$ se află între x_0 şi $\overline{x}_k$, urmează că $\lim_{k\to\infty} c_{k,n-1} = x_0$, de unde

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0} = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0} = g^{(n)}(x_0) = n!,$$

iar

$$\lim_{k\to\infty} \frac{R_n(\overline{x}_k)}{g(\overline{x}_k)} = 0.$$

Deoarece $(\overline{x}_k)_{k\geq 0}$ era un şir arbitrar convergent la x_0, urmează conform definiţiei limitei că

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Consideraţiile de mai sus conduc la următorul rezultat.

Teorema 7.17. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. Dacă f este derivabilă de n ori în $x_0 \in I$, atunci există o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ şi*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Demonstraţie. Să considerăm atunci funcţia $\alpha : I \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} n!\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

şi să observăm că $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$, conform celor de mai sus. În plus, $R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$, pentru orice $x \in I$ (chiar şi pentru $x = x_0$, deoarece ambii membri sunt 0), de unde concluzia. ■

Restul de ordin n din formula de mai sus,

$$R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numeşte *restul lui Peano*.

În teorema precedentă s-a presupus că f este derivabilă de n ori în punctul x_0, obţinându-se cu acest prilej o estimare a restului formulei lui Taylor. Vom presupune în cele ce urmează că f este derivabilă de $n+1$ ori pe întreg intervalul I, lucru care ne va ajuta să obţinem exprimări mai precise ale restului.

Fie $x_0, x \in I$. Fie deasemenea $p \in \mathbb{N}^*$ şi fie $C \in \mathbb{R}$ definit prin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + C(x - x_0)^p.$$

Definim $\varphi : I \to \mathbb{R}$ prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + C(x - t)^p.$$

Atunci

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = f(x),$$

şi aplicând teorema lui Rolle funcţiei φ pe intervalul $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$) obţinem existenţa lui c situat între x_0 şi x (dependent de x_0, x, n şi p) astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Însă

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'(t)}{1!}\right) + \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x - t)\right) + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1}\right) - pC(x - t)^{p-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - pC(x - t)^{p-1}\end{aligned}$$

şi atunci

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n - pC(x - c)^{p-1} = 0,$$

de unde

$$C = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x - c)^{n-p+1}$$

Se obţine atunci că restul R_n al formulei Taylor de ordinul n are forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x - x_0)^p (x - c)^{n-p+1}.$$

Pus sub această formă generală, restul R_n al formulei Taylor de ordinul n se numeşte *restul lui Schlömilch-Roche*. Prin particularizarea lui p în expresia de mai sus obţinem alte forme importante ale restului de ordin n. Astfel, pentru $p = 1$ obţinem *restul lui Cauchy*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)(x - c)^n,$$

în vreme ce pentru $p = n + 1$ obţinem *restul lui Lagrange*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Deoarece c se află între x_0 şi x, există $\theta \in (0, 1)$ (dependent de x_0, x şi n) astfel încât

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),$$

iar cu notaţia $h = x - x_0$, formula lui Taylor se poate scrie astfel

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n,$$

unde R_n se poate pune sub una dintre următoarele forme

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!p}h^{n+1}(1 - \theta)^{n-p+1} && \text{(Schlömilch-Roche)} \\ R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!}h^{n+1}(1 - \theta)^{n} && \text{(Cauchy)} \\ R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} && \text{(Lagrange).} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Formula lui MacLaurin

Dacă în formula lui Taylor punem $x_0 = 0$, obţinem *formula lui MacLaurin*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

R_n obţinându-se din formulele (7.2) pentru $x_0 = 0$. De asemenea, pentru $n = 0$, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange reprezintă chiar teorema lui Lagrange.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$, deci $f^{(2k)} = 0$, iar $f^{(2k+1)} = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. De aici,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2}$, deci $f^{(2k+1)} = 0$, iar $f^{(2k)} = (-1)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. De aici,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta \in (0,1).$$

Exemple. 1. Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

avem că $f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$. De aici,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^n}, \quad \theta \in (0,1).$$

2. $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^p$. Cum

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)\ldots(p-n+1)(1+x)^{p-n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = p(p-1)\ldots(p-n+1)$. De aici,

$$(1+x)^p = 1 + \frac{px}{1!} + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)x^n}{n!} + R_n$$

unde

$$R_n = \frac{p(p-1)\ldots(p-n)(1+\theta x)^{p-n-1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0,1).$$

7.3.7 Puncte de extrem ale unei funcţii. Condiţii necesare şi suficiente

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. S-a observat anterior că punctele de extrem care sunt interioare lui I şi în care f este derivabilă se găsesc printre punctele critice ale funcţiei f, dar nu orice punct critic al unei funcţii este neapărat punct de extrem. De exemplu, fie $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$. Atunci $f_1'(x) = 3x^2$, deci $x = 0$ este punct critic al lui f_1. Totuşi, acesta nu este punct de extrem, deoarece $f_1(0) = 0$, iar în orice vecinătate a lui 0 funcţia f ia atât valori negative cât şi valori pozitive. În cele ce urmează, vom obţine condiţii de extrem cu ajutorul derivatelor de ordin superior.

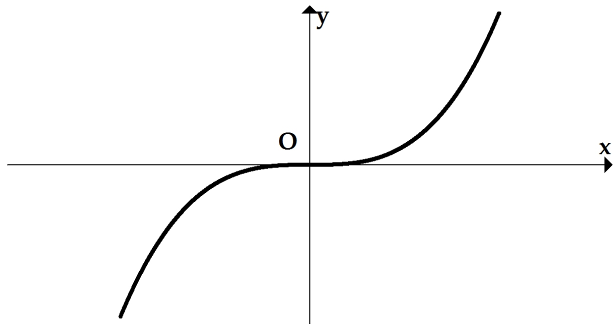


Figura 7.10: Graficul funcţiei $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$. $x = 0$ este punct critic, dar nu este punct de extrem

Teorema 7.18. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in I$ astfel încât*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. *Dacă $n = 2k$, atunci x_0 este punct de extrem local.*
   - (a) *Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.*
   - (b) *Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local.*
2. *Dacă $n = 2k + 1$, iar x_0 este punct interior lui I, atunci x_0 nu este punct de extrem local.*

Demonstraţie. Conform formulei lui Taylor cu restul lui Peano, în care primele $n-1$ derivate în x_0 se anulează conform ipotezei, obţinem că

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n,$$

cu $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$. Atunci

$$f(x) - f(x_0) = \left(f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

cu

$$\lim_{x \to x_0} \left(f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right) = f^{(n)}(x_0).$$

Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) > 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece $(x - x_0)^{2k} \geq 0$ pentru orice $x \in V$, urmează că

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar x_0 este punct de minim local.

Similar, dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) < 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar x_0 este punct de maxim local.

Fie acum $n = 2k+1$ şi fie x interior lui I. Dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ o vecinătate a lui x_0 astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece $(x - x_0)^{2k+1} < 0$ pentru orice $x \in V$, $x < x_0$, respectiv $(x - x_0)^{2k+1} > 0$ pentru orice $x \in V$, $x > x_0$, urmează că

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0$$

deci

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0,$$

iar

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

iar x_0 nu este punct de extrem local. Cazul în care $f^{(n)}(x_0) < 0$ se tratează analog. ■

Pentru $n = 2$, se obţine următorul corolar foarte util în studiul variaţiei funcţiilor.

Corolar 7.18.1. *Fie $f : I \to R$ derivabilă de două ori în $x_0 \in I$ astfel încât $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) \neq 0$.*

1. *Dacă $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.*

2. *Dacă* $f''(x_0) < 0$, *atunci* x_0 *este punct de maxim local.*

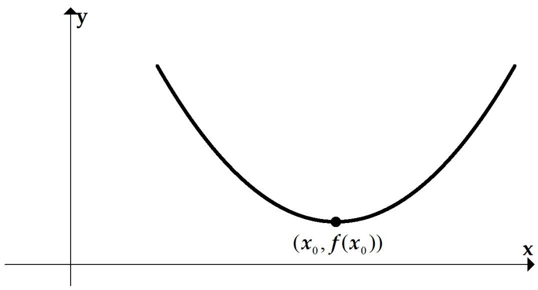


Figura 7.11: $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) > 0$. x_0 este punct de minim local

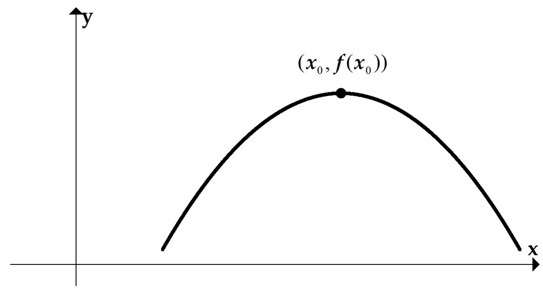


Figura 7.12: $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) < 0$. x_0 este punct de maxim local

Exerciţiu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Determinaţi punctele de extrem ale lui f.

Soluţie. Cum f este derivabilă pe întreg $\mathbb{R}$, iar toate punctele domeniului sunt puncte interioare acestuia, urmează conform teoremei lui Fermat că punctele de extrem sunt printre punctele critice. Deoarece $f'(x) = 3x^2 - 3$, f' se anulează pentru $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$. Cum $f''(x) = 6x$, urmează că $f''(-1) = -6 < 0$, iar $f''(1) = 6 > 0$, deci -1 este un punct de maxim local, iar 1 este un punct de minim local.

7.4 Aspecte grafice în studiul variaţiei funcţiilor

7.4.1 Asimptote

În situaţia în care este necesar să se studieze aspectul graficului unei funcţii sau viteza ei de creştere, devine adesea important să se determine dacă acest grafic are o formă apropiată de cea a unei linii drepte, respectiv daca funcţia are o creştere de un anumit tip precizat, de exemplu echivalentă cu cea a unei funcţii de gradul întâi. Dreapta de care se „apropie" graficul funcţiei se va numi *asimptotă*, iar în funcţie de poziţia acesteia se vor obţine, respectiv, noţiunile de asimptotă orizontală, verticală sau oblică.

Asimptote orizontale

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $+\infty$ (respectiv $-\infty$) fiind punct de acumulare al mulţimii D. Vom spune că dreapta $y = l$, $l \in \mathbb{R}$, este *asimptotă orizontală* la graficul funcţiei f spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcţiei f dacă $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectiv $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$).

Altfel spus, graficul unei funcţii f are asimptotă orizontală spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) dacă f are o limită finită l la $+\infty$ (respectiv la $-\infty$). În această situaţie, graficul funcţiei se apropie foarte mult de dreapta orizontală $y = l$ spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$), această dreaptă fiind asimptotă orizontală la graficul funcţiei spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$).

Desigur, dacă o funcţie nu are limită la $+\infty$, atunci graficul acesteia nu are asimptotă orizontală către $+\infty$. Mai departe, dacă $+\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcţiei (de exemplu, dacă acesta este un interval de tip $(-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$), atunci de asemenea nu putem vorbi despre asimptotă orizontală la graficul acesteia spre $+\infty$, afirmaţii similare putându-se face şi despre despre asimptotele orizontale spre $-\infty$.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{2x^2-3x+2}$. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2},$$

deci dreapta $y = \frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Printr-un calcul similar, se obţine că această dreaptă este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f şi spre $-\infty$.

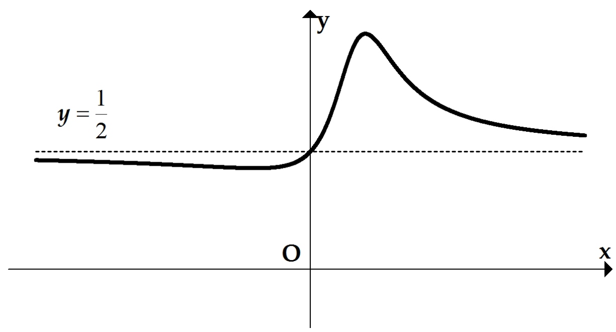


Figura 7.13: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{2x^2-3x+2}$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Deoarece

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1,$$

urmează că dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $-\infty$. Printr-un calcul similar, se obţine că dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $+\infty$, cele două asimptote orizontale, către $-\infty$ respectiv către $+\infty$, fiind diferite între ele.

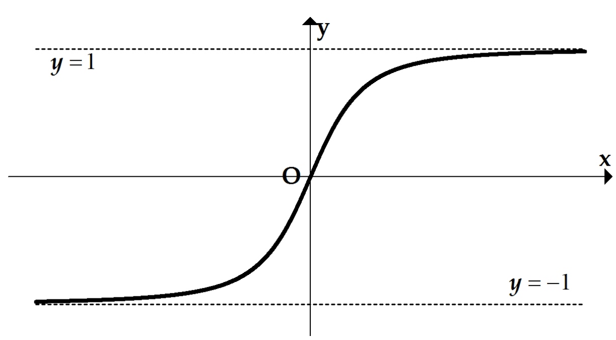


Figura 7.14: Graficul funcţiei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Deoarece $\lim_{x\to\infty} \sin x$ nu există, graficul funcţiei f nu are asimptotă orizontală către $+\infty$. Nu putem

vorbi despre asimptotă orizontală către $-\infty$, deoarece $-\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcţiei.

Asimptote oblice

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $+\infty$ fiind punct de acumulare al mulţimii D. Vom spune că dreapta $y = mx + n$, $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, este *asimptotă oblică* la graficul funcţiei f spre $+\infty$ dacă

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n.$$

Similar, fie $f : D \to \mathbb{R}$, $-\infty$ fiind punct de acumulare al mulţimii D. Vom spune că dreapta $y = mx + n$, $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, este *asimptotă oblică* la graficul funcţiei f spre $-\infty$ la graficul funcţiei f dacă

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = n.$$

În aceste situaţii, graficul funcţiei se apropie foarte mult de dreapta oblică $y = mx + n$ spre $+\infty$, respectiv spre $-\infty$.

Să notăm că, deoarece $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, o condiţie necesară (dar nu şi suficientă) ca graficul unei funcţi să aibă asimptotă oblică spre $+\infty$ este ca acea funcţie să aibă limită infinită la $+\infty$. În concluzie, existenţa unei asimptote oblice spre $+\infty$ exclude existenţa unei asimptote orizontale spre $+\infty$ şi reciproc, un raţionament similar putând fi efectuat relativ la existenţa asimptotelor orizontale sau oblice spre $-\infty$.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x+1}$. Atunci

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1,$$

iar

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + x + 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = -1.$$

De aici, dreapta $y = x - 1$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Printr-un calcul similar, se obţine că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcţiei f şi spre $-\infty$.

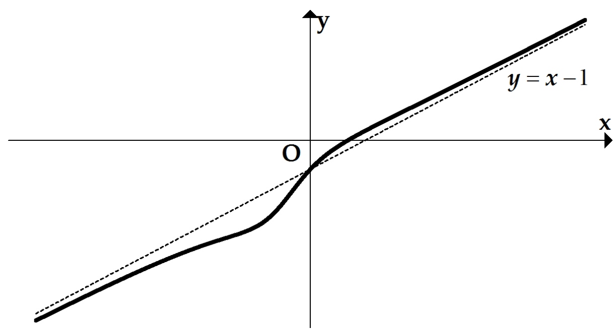


Figura 7.15: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x+1}$

2. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Atunci

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

iar

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty \cdot 1 = +\infty.$$

Cum $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = +\infty$, urmează că graficul lui f nu are asimptote oblice spre $+\infty$. Nu putem vorbi despre asimptote oblice spre $-\infty$ deoarece $-\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcţiei.

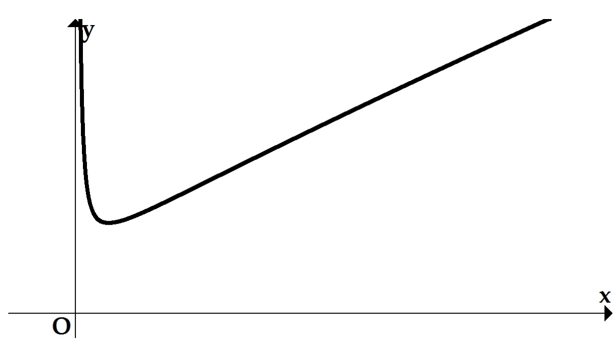


Figura 7.16: Graficul funcţiei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Asimptote verticale

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ fiind punct de acumulare la stânga al mulţimii D. Vom spune că dreapta $x = a$ este *asimptotă verticală* la stânga spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcţiei f dacă

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty, \quad \text{(respectiv } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty\text{)}.$$

Similar, fie $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ fiind punct de acumulare la dreapta al mulţimii D. Vom spune că dreapta dreapta $x = a$ este *asimptotă verticală* la dreapta spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcţiei f dacă

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty, \quad \text{(respectiv } \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty\text{)}.$$

În aceste situaţii, graficul funcţiei f se apropie foarte mult de dreapta verticală $x = a$, în circumstanţele precizate. Să notăm că existenţa asimptotelor verticale nu exclude nici existenţa asimptotelor orizontale, nici a celor oblice, deoarece acestea din urmă sunt determinate cu ajutorul unor limite pentru $x \to +\infty$ sau $x \to -\infty$, nu pentru x tinzând la valori finite, aşa cum este cazul asimptotelor verticale. De asemenea, întrucât existenţa asimptotelor verticale presupune existenţa unor limite infinite, graficele funcţiile mărginite pe domeniile de definiţie nu au asimptote verticale, iar asimptotele verticale ale funcţiilor nemărginite se caută în punctele "patologice" ale domeniului de definiţie sau funcţiei, de exemplu zerouri ale unor numitori sau ale unor argumente de funcţii logaritmice.

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty,$$
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x-1} = \infty,$$

iar dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei f spre $-\infty$, respectiv la dreapta spre $+\infty$.

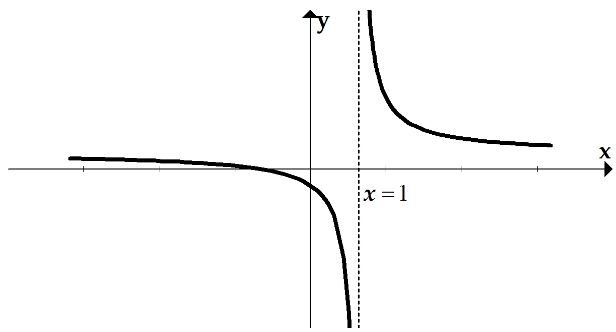


Figura 7.17: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

2. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Atunci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty,$$

iar dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta la graficul funcţiei f spre $-\infty$. Să notăm că 0 nu este punct de acumulare la stânga pentru domeniul lui f (de fapt, f nici măcar nu este definită pentru $x < 0$), dreapta $x = 0$ nefiind şi asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei f.

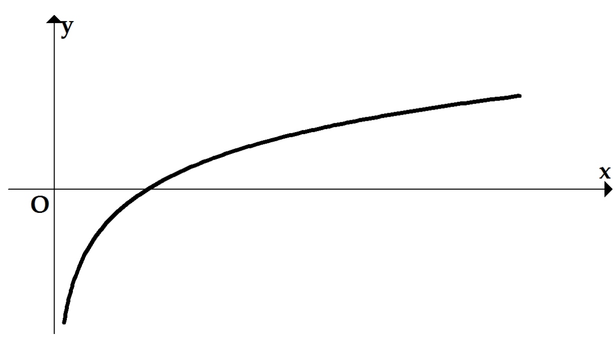


Figura 7.18: Graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

Exerciţiu. Determinaţi asimptotele funcţiei $f : \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$.

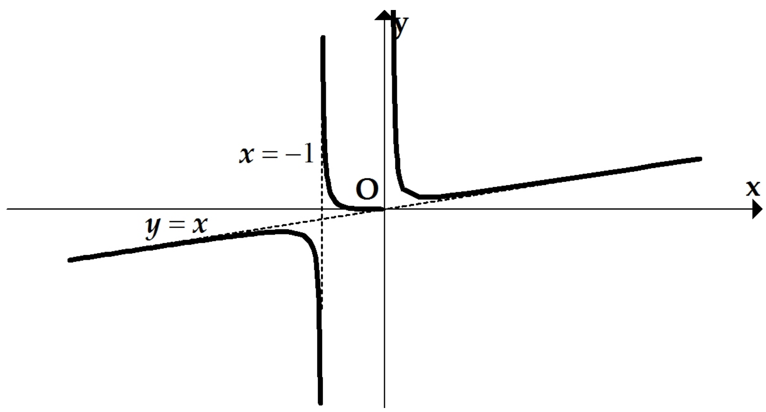


Figura 7.19: Graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$

Soluţie. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = \infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty,$$

graficul funcţiei nu are asimptote orizontale.

Studiem acum existenţa asimptotelor oblice, începând cu cea spre $+\infty$. Se observă că

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 1 = 1,$$
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

deci dreapta $y = x$ este asimptotă oblică la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Un calcul similar arată că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcţiei f şi spre $-\infty$.

În ceea ce priveşte existenţa asimptotelor verticale, observăm că

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0-} e^{-1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0+} e^{-1} = +\infty,$$

deci dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei f spre $-\infty$, respectiv asimptotă verticală la dreapta la graficul funcţiei f spre $+\infty$. Similar,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} \cdot e^{\frac{1}{0-}} = 0 \cdot 0 = 0,$$

în vreme ce

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=\!=} \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{1} = \infty,$$

deci dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta (nu însă şi la stânga) la graficul funcţiei f spre $+\infty$.

7.4.2 Convexitate. Concavitate

Adesea, informaţiile oferite de prima derivată a unei funcţii nu sunt suficiente pentru descrierea precisă a modului de variaţie a acelei funcţii. În special, aceste informaţii pot fi insuficiente pentru determinarea formei graficului funcţiei. In cele ce urmează, vom studia rolul derivatei a doua a unei funcţii în precizarea formei graficului acelei funcţii.

Funcţii convexe şi strict convexe

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. Vom spune că f este *convexă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ şi oricare ar fi $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

De asemenea, vom spune că f este *strict convexă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ şi oricare ar fi $t \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Interpretarea geometrică a convexităţii

Deoarece $M(tx + (1-t)y, f(tx + (1-t)y))$ este punctul de pe graficul funcţiei corespunzător abscisei $tx + (1-t)y$, iar $N(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y))$ este punctul cu aceeaşi abscisă de pe segmentul determinată de $A(x, f(x))$ şi $B(y, f(y))$, observăm că f este convexă dacă şi numai dacă pentru orice două puncte A, B de pe graficul funcţiei, porţiunea de grafic dintre A şi B se află sub segmentul AB determinat de acestea.

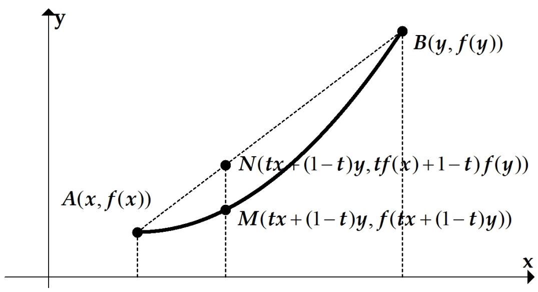


Figura 7.20: Graficul unei funcţii convexe

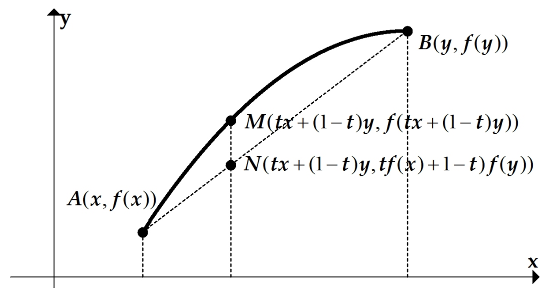


Figura 7.21: Graficul unei funcţii concave

Funcţii concave şi strict concave

Similar, vom spune că f este *concavă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ şi oricare ar fi $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y),$$

respectiv că f este *strict concavă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ şi oricare ar fi $t \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y).$$

Se observă că f este (strict) concavă dacă şi numai dacă $-f$ este (strict) convexă.

Interpretarea geometrică a concavităţii

Prin analogie cu interpretarea geometrică a convexităţii unei funcţii, se observă că f este concavă dacă şi numai dacă pentru orice două puncte A, B de pe graficul funcţiei, porţiunea de grafic dintre A şi B se află deasupra segmentului AB determinat de acestea.

O proprietate de monotonie

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unei funcţii de a fi convexă implică monotonia unui anumit raport incremental.

Teorema 7.19. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$, f convexă pe I. Fie deasemenea $a \in \mathbb{R}$. Atunci funcţia $g_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = \frac{f(x)-f(x)}{x-a}$, este crescătoare.*

Continuitatea funcţiilor convexe

Cu ajutorul proprietăţii de mai sus, putem deduce că o funcţie convexă este continuă pe interiorul domeniului ei de definiţie.

Teorema 7.20. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$, f convexă pe I. Fie deasemenea $a \in \overset{\circ}{I}$. Atunci f este continuă în a.*

O altă interpretare grafică a noţiunii de convexitate

Tot cu ajutorul Teoremei 7.19, putem demonstra următorul rezultat.

Teorema 7.21. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$, f convexă pe I. Fie de asemenea $a \in I$ un punct în care f este derivabilă lateral. Atunci*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'_s(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \quad \textit{pentru } x < a < y \in I.$$

În particular, dacă f este derivabilă în a, urmează că

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x-a), \quad \text{pentru } x \in I,$$

deci

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a), \quad \text{pentru } x \in I. \tag{7.3}$$

Cum $B(x, f(a) + f'(a)(x-a))$ este punctul de pe tangenta la graficul funcţiei f în $A(a, f(a))$ corespunzător abscisei x, urmează că o funcţie derivabila f este convexă pe I dacă şi numai dacă pentru orice punct $A(a, f(a))$ de pe grafic, graficul funcţiei este situat deasupra tangentei în A la grafic.

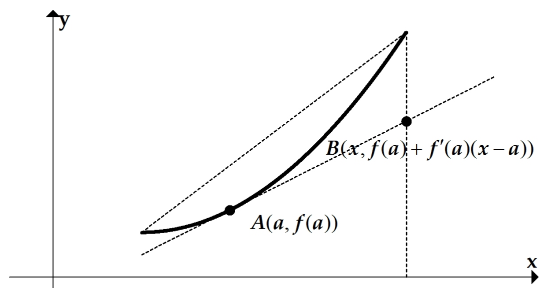


Figura 7.22: Graficul unei funcţii convexe

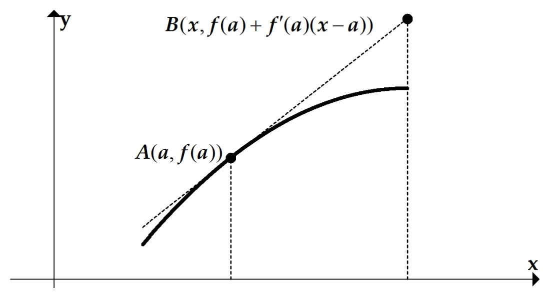


Figura 7.23: Graficul unei funcţii concave

Studiul convexităţii şi concavităţii cu ajutorul derivatei de ordinul al doilea

În cele ce urmează, vom vedea că se poate preciza convexitatea sau concavitatea unei funcţii cunoscând semnul derivatei de ordinul al doilea.

Teorema 7.22. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe I. Atunci au loc următoarele afirmaţii.*

1. $f''(x) \geq 0$ *pentru orice $x \in I$ dacă şi numai dacă f este convexă pe I.*
2. $f''(x) \leq 0$ *pentru orice $x \in I$ dacă şi numai dacă f este concavă pe I.*

Se poate observa că dacă $f'' > 0$ pe I, atunci f este strict convexă pe I.

Exemple. 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este convexă pe $\mathbb{R}$, deoarece $f''(x) = 2 > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

2. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ este concavă pe $(0, \infty)$, întrucât $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pentru $x \in (0, \infty)$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{6}$, este convexă pe $[0, \infty)$ şi concavă pe $(-\infty, 0]$, întrucât $f''(x) = x$, $f''(x) \geq 0$ pentru $x \in [0, \infty)$, $f''(x) \leq 0$ pentru $x \in (-\infty, 0]$.

Inegalitatea lui Jensen

Pornind de la definiţia convexităţii, se poate demonstra prin inducţie matematică faptul că dacă f este convexă pe I, atunci

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_n f(x_n)$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ şi orice $t_1, t_2, \ldots t_n \in [0, 1]$ cu $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, inegalitate cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Jensen*, pentru funcţii concave având loc inegalitatea inversă.

În particular, pentru $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1$, se obţine că

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, pentru funcţii concave având loc inegalitatea inversă.

Exemple. 1. Deoarece $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este concavă pe $[0, \pi]$, urmează că dacă A, B, C sunt unghiuri ale unui triunghi, atunci

$$\sin \frac{A + B + C}{3} \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3},$$

de unde, ţinând seama că $A + B + C = \pi$, obţinem că

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Deoarece $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ este concavă pe $(0, \infty)$, urmează că

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} &\geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n} \\ &= \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \end{aligned}$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$ ceea ce înseamnă că

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$, ceea ce, împreună cu observaţia că inegalitatea rămâne adevărată şi atunci când unul sau mai mulţi x_i sunt nuli, demonstrează validitatea inegalităţii mediilor.

Puncte de inflexiune

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Observăm că, deoarece $g''(x) = 6x$, g este concavă pe $(-\infty, 0]$ şi convexă pe $[0, \infty)$, în $x_0 = 0$ schimbându-se convexitatea funcţiei. Graficul funcţiei f are tangentă în punctul corespunzător $(x_0, g(x_0)) = (0, 0)$, porţiunea din graficul lui g corespunzătoare lui $x \geq 0$ aflându-se deasupra acestei tangente, iar porţiunea din graficul lui g corespunzătoare lui $x \leq 0$ aflându-se dedesubtul acesteia. În cele ce urmează, vom încadra această situaţie tipică într-un cadru mai general.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in \dot{I}$. Atunci x_0 se numeşte *punct de inflexiune al funcţiei* f dacă

1. f este continuă în x_0;

2. f are derivată în x_0, finită sau infinită;

3. Există $a, b \in I$, $a < x_0 < b$ astfel încât

   f este convexă pe (a, x_0) şi concavă pe (x_0, b), sau

   f este concavă pe (a, x_0) şi convexă pe (x_0, b).

În această sitaţie, se spune că punctul corespunzător $A(x_0, f(x_0))$ este *punct de inflexiune al graficului funcţiei* f.

Din punct de vedere geometric, faptul că x_0 este punct de inflexiune al funcţiei f înseamnă că graficul funcţiei f are tangentă în $A(x_0, f(x_0))$, iar tangenta în A „traversează" graficul funcţiei f, în sensul că de o parte a lui A tangenta se aflǎ sub grafic, iar de cealaltă parte se aflǎ deasupra graficului.

Având în vedere caracterizarea convexităţii unei funcţii cu ajutorul semnului derivatei de ordinul al doilea, se obţine următorul rezultat.

Teorema 7.23. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile*

1. *f este continuă în x_0;*

2. *f are derivată în x_0, finită sau infinită;*

3. *Există $a, b \in I$, $a < x_0 < b$ astfel încât*

   $f''(x) \geq 0$ pe (a, x_0) şi $f''(x) \leq 0$ pe (x_0, b), sau

   $f''(x) \leq 0$ pe (a, x_0) şi $f''(x) \geq 0$ pe (x_0, b),

atunci x_0 este punct de inflexiune al funcţiei f.

În condiţiile acestei teoreme, putem spune că x_0 este punct de inflexiune numai dacă f'' îşi schimbă semnul la trecerea de la stânga lui x_0 la dreapta lui x_0. De asemenea, are loc următorul rezultat.

Teorema 7.24. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe I, iar $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ un punct de inflexiune al lui f. Atunci $f''(x_0) = 0$.*

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Atunci f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f''(x) = 6x$. Atunci f este concavă pe $(-\infty, 0]$, respectiv convexă pe $[0, \infty)$. Cum f este continuă în 0, iar f are derivată în 0, $f'(0) = -3$, urmează că 0 este punct de inflexiune.

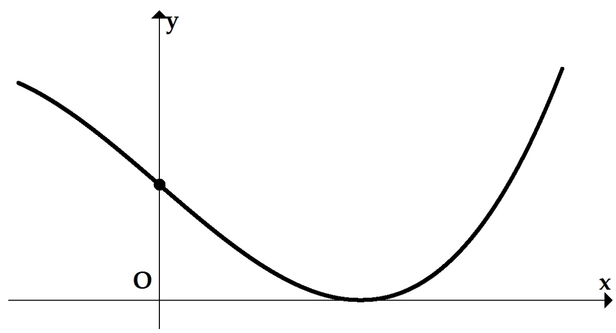


Figura 7.24: 0 este punct de inflexiune pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă de două ori pe $\mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, iar

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}.$$

Cum f are derivată în 2, $f'(2) = +\infty$, iar f este convexă pe $(-\infty, 2)$ respectiv concavă pe $(2, \infty)$, 2 este punct de inflexiune.

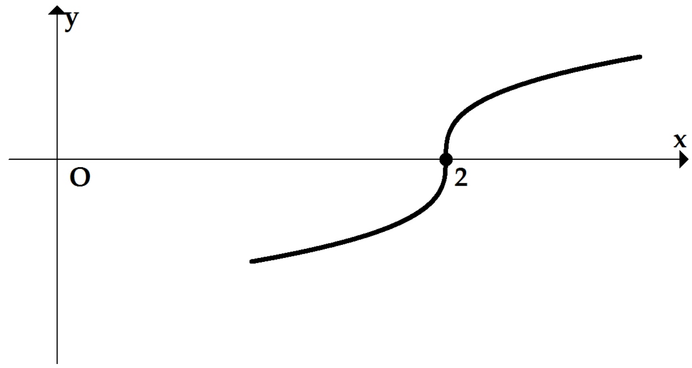


Figura 7.25: 2 este punct de inflexiune pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

Aplicaţii

7.1. *Cu ajutorul formulei de derivare* $(x^k)' = kx^{k-1}$, *determinaţi valoarea sumei* $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

7.2. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a^2 + x + 1, & x > 0 \\ a \sin x + b \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât* f *să fie derivabilă în* $x_0 = 0$.

7.3. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 0 \\ e^x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât* f *să fie derivabilă în* $x_0 = 0$.

7.4. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + |x|$, $g(x) = 1 - |x|$. *Demonstraţi că* f, g *nu sunt derivabile în* $x_0 = 0$, *dar* $f + g$ *este derivabilă în* $x_0 = 0$.

7.5. *Fie* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, f *pară şi derivabilă în* $x_0 = 0$. *Demonstraţi că* $f'(0) = 0$.

7.6. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f *derivabilă în* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Determinaţi*
1) $\lim_{n\to\infty} n\left(f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)\right)$; *2)* $\lim_{n\to\infty} n^2\left(f(x_0 + \frac{1}{n^2}) - f(x_0 - \frac{1}{n^2})\right)$;
3) $\lim_{n\to\infty} n\left(f(x_0 + \frac{1}{n}) + f(x_0 + \frac{2}{n}) + f(x_0 + \frac{3}{n}) - 3f(x_0)\right)$.

7.7. *Determinaţi (dacă există) punctele de pe graficul funcţiilor* f *următoare,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *în care tangenta este paralelă cu axa* Ox
1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$; *2)* $f(x) = x^5 + 2x + 1$; *3)* $f(x) = 4x + 2$.

7.8. *Fie* $f : (\frac{2}{3}, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(3x-2)$. *Determinaţi punctele de pe graficul funcţiei* f *în care tangenta este paralelă cu dreapta* $y = 3x+4$.

7.9. *Determinaţi ecuaţiile tangentelor la graficul funcţiei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$ *în punctele de abscise respectiv* 0, $\frac{1}{2}$, 1 *şi precizaţi unghiurile pe care aceste tangente le fac cu axa* Ox.

7.10. *Să se arate că dreapta* $y = 7x - 2$ *este tangentă la curba* $y = x^3 + 4x$.

7.11. *Determinaţi cea mai mică pantă posibilă a tangentei la curba* $y = x^3 - 3x^2 + 7x$.

7.12. *Demonstraţi că funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, *este continuă în* $x_0 = 0$, *dar graficul său nu are tangentă în* $A(0,0)$.

7.13. *Fie funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + 1$, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$. *Determinaţi* a, $b \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficele celor două funcţii să aibă tangentă comună într-un punct de abscisă* 1.

7.14. *Precizaţi dacă graficele funcţiilor* $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |1 - x^2|$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sqrt{|1-x^2|}$, $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \max(x^2 + 5x, 4x + 2)$, *au puncte unghiulare sau de întoarcere.*

7.15. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 4}$. *Demonstraţi că* f *verifică relaţia*

$$f(x)f'(x) = x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}, \quad \textit{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

7.16. *Fie* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}$. *Demonstraţi că* f *verifică relaţia*

$$xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0, \quad \textit{pentru } x \in (0, \infty).$$

7.17. *Demonstraţi că*

$$(\ln(ax+b))^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-1)! a^n}{(ax+b)^n}, \quad \textit{pentru } n \geq 1.$$

7.18. *Folosind eventual o descompunere în fracţii simple, demonstraţi că*

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2n!}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right], \quad \textit{pentru } n \geq 1.$$

7.19. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$. *Demonstraţi că* $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$, *unde* P_n *este un polinom de gradul* n *şi determinaţi o formulă de recurenţă pentru calculul lui* P_n.

7.20. *Determinaţi*
1) $(x \ln(3x-1))^{(n)}$; *2)* $(x^2 \cos x)^{(n)}$; *3)* $((x^2+x+3)e^{2x})^{(n)}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

7.21. *Fie* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$. *Demonstraţi că* $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{f(x)}{x^{2n}}$.

7.22. *Fie* $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$. *Demonstraţi că* f *este strict crescătoare şi precizaţi mulţimea valorilor funcţiei.*

7.23. *Fie* $f : (0,\infty) \to (1,\infty)$, $f(x) = e^x + x^2 + 3x$. *Demonstraţi că* f *este strict crescătoare, bijectivă şi calculaţi* $(f^{-1})'(e^2+10)$.

7.24. *Fie* $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{1}{3^x}$. *Demonstraţi că* f *este strict descrescătoare, bijectivă şi calculaţi* $(f^{-1})'(2)$.

7.25. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+a-2}{x^2+1}$, $a \in \mathbb{R}$. *Să se determine* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $x_0 = 1$ *să fie punct de extrem.*

7.26. *Fie* $a, b, c \in (0,\infty)$. *Dacă* $a^x + b^x + c^x \geq 3$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$, *demonstraţi folosind teorema lui Fermat că* $abc = 1$.

7.27. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie polinomială de gradul* n, $n \geq 2$, *cu* n *rădăcini reale distincte. Demonstraţi că ecuaţia* $f'(x) = 0$ *are exact* $n-1$ *rădăcini reale distincte.*

7.28. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$. *Demonstraţi că ecuaţia*

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-(n+1)} = 0,$$

are exact n *rădăcini reale.*

7.29. *Determinaţi numărul de rădăcini reale ale ecuaţiilor*
1) $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$; *2)* $x^4 - 14x^2 + 24x - 6 = 0$; *3)* $x^5 - 5x + 1 = 0$;
4) $3x \ln x + 2 = 0$; *5)* $xe^x - 2 = 0$

7.30. *Demonstraţi că ecuaţia* $2x^3 + 3x + m = 0$ *are o unică rădăcină reală indiferent de valoarea parametrului* $m \in \mathbb{R}$.

7.31. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie Rolle pe $[a,b]$ cu proprietatea că $f(a)^2+b^2=f(b)^2+a^2$. Să se demonstreze că ecuaţia $f(x)f'(x)=x$ are măcar o rădăcină în intervalul (a,b).*

7.32. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie Rolle pe $[a,b]$.*

1. *Demonstraţi că $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$, este de asemenea o funcţie Rolle pe $[a,b]$.*
2. *Demonstraţi că există $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f'(c)}{f(c)}=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}$.*

7.33. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. Determinaţi punctele în care funcţia nu este derivabilă.*

7.34.
1. *Demonstraţi că $e^x\geq 1+x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.*
2. *Folosind această inegalitate, demonstraţi că*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

pentru orice $a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0$ (inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică a n numere pozitive).

7.35. *Folosind teorema lui Lagrange, demonstraţi inegalităţile*

1. $na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$, $0\leq a<b$, $n\in\mathbb{N}^*$.
2. $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$, $0\leq a<b<\frac{\pi}{2}$.
3. $3^p+6^p>4^p+5^p$, $p>1$.
4. $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1}-x\cos\frac{\pi}{x}$, *pentru* $x\geq 2$.

7.36. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^6+5}$. Demonstraţi cu ajutorul teoremei lui Lagrange că $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.*

7.37. *Folosind teorema lui Lagrange, demonstraţi că* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x-\sin x}=1$.

7.38. *Folosind teorema lui Lagrange, arătaţi că ecuaţia $3^x+4^x=2^x+5^x$, $x\in\mathbb{R}$, are doar soluţiile $x=0$ şi $x=1$.*

7.39. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ două funcţii derivabile cu proprietăţile că $f(2012) = g(2012)$ şi $f' \cdot g^2 = g' \cdot f^2$. Demonstraţi că $f = g$.*

7.40. *Demonstraţi că pe intervalele indicate funcţiile următoare diferă printr-o constantă, a cărei valoare se cere*

1. $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ *pe* $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2)$, $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2}{2}$ *pe* $\mathbb{R}$.

7.41. *Fie $f, g : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Demonstraţi că f şi g au aceeeaşi derivată pe $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, dar $(f-g)(\sqrt{3}) = \pi$, $(f-g)(-\sqrt{3}) = -\pi$, deci f şi g nu diferă printr-o constantă. Cum explicaţi?*

7.42. *Demonstraţi inegalităţile*

1. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, *pentru orice* $x > 0$.

2. $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

3. $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

4. $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

5. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, *pentru orice* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

7.43. *Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Determinaţi valoarea maximă a lui f şi deduceţi de aici că $e^x \geq x^e$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.*

7.44. *Determinaţi valorile limitelor*

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{\sin(\operatorname{tg} x)}$; *3)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3}$; *5)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(4 + e^{3x}\right)}{\ln\left(3 + e^{4x}\right)}$; *6)* $\lim\limits_{x\to 0} x e^{\frac{1}{\sin x}}$; *7)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}\right)$;
8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$; *9)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; *10)* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \ln \dfrac{1}{x-2}$; *11)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$;
12) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; *13)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{2}{3+4\ln x}}$.

7.45. *Dezvoltaţi funcţia polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile lui $x - 2$.*

7.46. *Determinaţi polinomul lui Taylor de ordinul n asociat următoarelor funcţii în punctele date*

1) $f(x) = e^{-3x}$; $x_0 = -\frac{1}{3}$; *2)* $f(x) = \ln(1+3x)$; $x_0 = \frac{1}{3}$; *3)* $f(x) = \sqrt{4x-3}$; $x_0 = 1$; *4)* $f(x) = \cos^2 x$; $x = \frac{\pi}{6}$; *5)* $f(x) = \operatorname{sh} x$; $x_0 = 1$.

7.47. *Determinaţi asimptotele funcţiilor*

1. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x}$;
2. $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1+x)$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \\ 0, & x = 1 \text{ sau } x = 2 \end{cases}$;
4. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^3-x}{x+2}\right|}$;
5. $f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$;
6. $f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2-1}$;
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x + 2\cos 3x$;
8. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|^{\frac{1}{x-1}}$.

7.48. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficul funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ *să aibă dreapta* $y = 1$ *ca asimptotă orizontală.*

7.49. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficul funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+ax+a}$, *să aibă o unică asimptotă verticală.*

7.50. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficul funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+bx+1}{x+2}$ *să aibă dreapta* $y = x + 2$ *ca asimptotă oblică spre* $+\infty$.

7.51. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât graficul funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{ax^2 + bx}$ *să aibă dreapta* $y = 2x + 1$ *ca asimptotă oblică spre* $+\infty$.

7.52. *Demonstraţi că graficul unei funcţii polinomiale de grad n,* $n \geq 2$, *nu are asimptote.*

7.53. *Determinaţi o funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *care să aibă ca asimptote verticale toate dreptele* $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.54. *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, I interval, două funcţii convexe. Demonstraţi că $f + g$ este o funcţie convexă. Se poate spune acelaşi lucru şi despre $f - g$?*

7.55. *Determinaţi intervalele de convexitate şi concavitate pentru funcţiile*

1. $f : (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;
2. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$;
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x}$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3} \sin x + 2 \cos x$;
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

Au aceste funcţii puncte de inflexiune?

7.56. *Studiind eventual convexitatea funcţiei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, demonstraţi că $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$, pentru orice $x, y \geq 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

7.57. *Studiind eventual convexitatea funcţiei $f : [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sqrt{\sin x}$, demonstraţi că în orice triunghi ABC există relaţia $\sqrt{\sin \frac{A}{2}} + \sqrt{\sin \frac{B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{C}{2}} \leq 3\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

7.58. *Studiind eventual convexitatea funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, demonstraţi că $\ln \frac{x+y}{2} < \frac{x}{x+y} \ln x + \frac{y}{x+y} \ln y$, pentru orice $x, y > 0$.*