Capitolul 6

FUNCŢII CONTINUE

6.1 Continuitatea unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. În capitolul precedent s-a studiat comportarea lui f în vecinătatea unui punct dat $x_0 \in D'$, observându-se dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcţiei se apropie şi ele (sau nu) de o valoare fixă, numită limita funcţiei în x_0.

În acest capitol vom pune problema particulară a apropierii acestor valori de valoarea $f(x_0)$ a funcţiei în x_0; desigur, pentru a putea vorbi despre $f(x_0)$ va fi necesar ca x_0 să aparţină domeniului de definiţie D. În plus, faţă de studiul limitei funcţiei în x_0, se va avea în vedere şi cazul în care x_0 este punct izolat al lui D.

Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcţia f *este continuă* în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ urmează că $f(x) \in V$.

Întrucât se pune în fapt o problemă înrudită cu existenţa limitei $\lim_{x \to x_0} f(x)$, definiţia de mai sus se obţine din definiţia limitei unei funcţii în x_0 înlocuind l cu $f(x_0)$, fiind totuşi necesară înlocuirea condiţiei $x_0 \in D'$ cu condiţia $x_0 \in D$.

Continuitatea într-un punct de acumulare

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare al lui D, atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim_{x \to x_0} f(x)$, iar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right),$$

adică *operaţia de aplicare a funcţiei f comută cu operaţia de calculare a limitei în x_0*.

Intuitiv, cum valorile $f(x)$ ale funcţiei sunt apropiate de valoarea limitei (egală acum cu $f(x_0)$) pentru x apropiat de x_0, funcţiile continue într-un punct x_0 sunt acele funcţii pentru care o schimbare minoră a argumentului de la x_0 la x va produce o schimbare minoră a valorii funcţiei de la $f(x_0)$ la $f(x)$.

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare atât la dreapta cât şi la stânga pentru D, atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă există ambele limite laterale $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Continuitatea într-un punct izolat

Presupunem acum că x_0 este punct izolat al lui D şi fie $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ o vecinătate a lui $f(x_0)$. Cum x_0 este punct izolat al lui D, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $U \cap D = \{x_0\}$, şi cum $f(x_0) \in V$, urmează că definiţia funcţiei continue în x_0 este satisfăcută pentru acest U. Rezultă de aici că o funcţie este continuă în orice punct izolat al domeniului său de definiţie.

Studiul continuităţii unei funcţii $f : D \to \mathbb{R}$ în $x_0 \in D$ ne conduce deci la una dintre următoarele situaţii

1. $x_0 \in D'$
   (a) f are limită în x_0, cu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Atunci f este continuă în x_0.
   (b) f are limită în x_0, cu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Atunci f nu este continuă în x_0.
   (c) f nu are limită în x_0. Atunci f nu este continuă în x_0.
2. $x_0 \notin D'$. Atunci f este continuă în x_0.

Aspecte grafice ale noţiunii de continuitate

În fapt, conceptul de continuitate îşi are originea în consideraţii privind reprezentarea grafică a funcţiilor. Astfel, din punct de vedere intuitiv, o funcţie este continuă în x_0 dacă graficul său „nu se întrerupe" în x_0. În acest sens, să considerăm exemplele funcţiilor $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

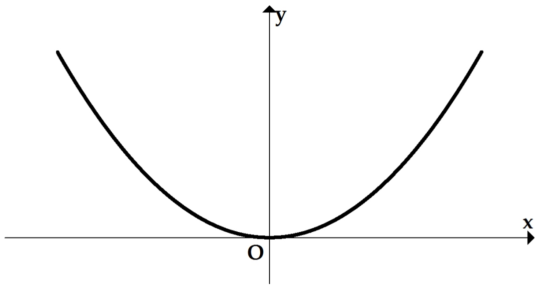


Figura 6.1: Graficul funcţiei f_1

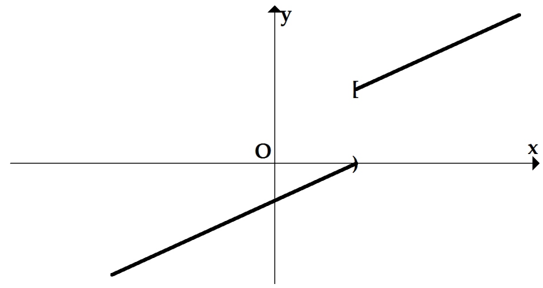


Figura 6.2: Graficul funcţiei f_2

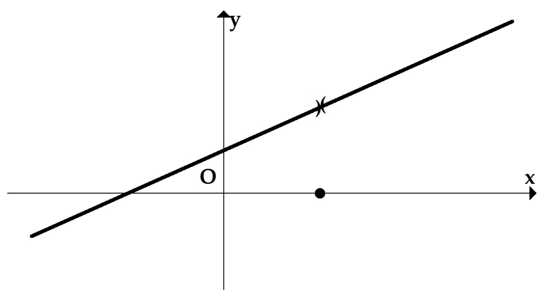


Figura 6.3: Graficul funcţiei f_3

Se observă că f_1 are limită în $x_0 = 1$ şi $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = 1$, iar cum $f_1(1) = 1$, urmează că $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = f_1(1)$, deci f_1 este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, egalitatea $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x) = f_1(1)$ revine la faptul că graficul lui f_1 „nu se întrerupe" în $x_0 = 1$.

De asemenea, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_2(x) = 0 \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_2(x) = 2$, deci f_2 nu este continuă în $x_0 = 1$, întrucât f_2 nu are limită în acest punct. Geometric, graficul lui f_2 „se întrerupe" la stânga lui $x_0 = 1$ (dar nu şi la dreapta lui $x_0 = 1$).

În plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_3(x) = 2 = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_3(x)$, deci f_3 are limită în $x_0 = 1$. Totuşi, deoarece $f_3(1) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 1} f_3(x)$, urmează că f_3 nu este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, graficul lui f_3 „se întrerupe" atât la stânga cât şi la dreapta lui $x_0 = 1$.

6.1.1 Continuitate laterală

Exemplul funcţiei f_2 de mai sus, pentru care graficul „se întrerupe" doar de o parte a lui $x_0 = 1$, cât şi existenţa noţiunii de limită laterală sugerează introducerea conceptului de *continuitate laterală*.

Pentru o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcţia f *este continuă la stânga* în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \leq x_0$, urmează că $f(x) \in V$.

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare la stânga al lui D, atunci f este continuă la stânga în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0),$$

adică limita la stânga a lui f în x_0 este egală cu $f(x_0)$.

În mod similar se defineşte noţiunea de continuitate la dreapta într-un punct x_0, obţinându-se că dacă x_0 este punct de acumulare la dreapta al lui D, atunci f este continuă la dreapta în x_0 dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Conform celor de mai sus, are loc următoarea proprietate.

Teorema 6.1. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Dacă x_0 este punct de acumulare atât la dreapta cât şi la stânga al lui D, atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă este continuă atât la dreapta cât şi la stânga lui x_0.*

6.1.2 Funcţii continue pe o mulţime

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă în fiecare punct al unei mulţimi $A \subseteq D$, spunem că *f este continuă pe A*. Dacă f este continuă în orice punct al domeniului său de definiţie, atunci se spune simplu că *f este continuă*. Din ceea ce s-a observat în capitolul anterior, funcţiile elementare sunt continue.

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ este continuă. Într-adevăr, pentru $x_0 < 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = \lim\limits_{x \to x_0} (-x) = -x_0 = |x_0|$, deci f este continuă în x_0. Similar, pentru $x_0 > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 = |x_0|$. În fine, pentru $x_0 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-x) = 0$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$, deci $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} |x| = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |x| = |0|$, iar f este continuă în $x_0 = 0$.

6.1.3 Puncte de discontinuitate

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Dacă f nu este continuă în x_0, se spune că f este *discontinuă* în D, sau că x_0 este *punct de discontinuitate* pentru f.

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate pentru f. Dacă ambele limite laterale $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ale lui f în x_0 există şi sunt finite, atunci x_0 se numeşte *punct de discontinuitate de specia (speţa) întâi*. În orice altă situaţie (adică dacă măcar una din limitele laterale nu există, sau există, dar nu este finită), x_0 se numeşte *punct de discontinuitate de specia (speţa) a doua*.

Dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, diferită de $f(x_0)$, atunci x_0 (care este punct de discontinuitate de specia întâi) se mai numeşte şi *discontinuitate înlăturabilă*, întrucât redefinind $f(x_0)$ ca fiind egală cu valoarea limitei în x_0, x_0 se transformă într-un punct de continuitate.

Exemple. 1. Fie $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f_1(x) = -1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_1(x) = 1$, ambele fiind finite (dar diferite, 0 nefiind deci punct de continuitate), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speţa întâi.

2. Fie $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Cum $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = 1$, iar $f_2(0) = 0 \neq 1$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de specia întâi, fiind în fapt o discontinuitate înlăturabilă.

3. Fie $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_3(x) = +\infty$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

4. Fie $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_4(x)$ nu există (deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$, iar funcţia sinus nu are limită la $+\infty$), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

5. Fie $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Există atunci două şiruri $(a_n)_{n\ge 0} \subseteq \mathbb{Q}$, $(b_n)_{n\ge 0} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, cu $a_n < x_0$, $b_n < x_0$ pentru $n \ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_5(a_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_5(b_n) = 0$, deci nu există $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f_5(x)$, iar x_0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

Ţinând cont de faptul că funcţiile monotone au limite laterale în fiecare punct al domeniului de definiţie, ele nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură. Mai mult, aceste puncte de discontinuitate nu pot fi arbitrar de multe.

Corolar 6.1.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă pe intervalul I. Atunci f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia întâi pe I, mulţimea tuturor acestor puncte fiind cel mult numărabilă.*

6.1.4 Prelungirea prin continuitate a unei funcţii într-un punct

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă f nu este definită în x_0 (deci $x_0 \notin D$), dar x_0 este punct de acumulare al domeniului D, iar f are limita finită l în x_0, atunci funcţia

$$\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = x_0 \end{cases},$$

obţinută prin definirea valorii în x_0 ca fiind egală cu valoarea limitei în acelaşi punct, celelalte valori rămânând neschimbate, se numeşte *prelungirea prin continuitate a lui f în x_0*. Desigur, deoarece

$$\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = l = \tilde{f}(x_0),$$

$\tilde{f}$ este continuă în x_0, ceea ce justifică denumirea de prelungire prin continuitate.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, prelungirea prin continuitate a lui f în 0 este

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

6.1.5 Caracterizarea cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct

Teorema următoare, denumită şi *teorema de caracterizare cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct* permite studiul continuităţii unei funcţii cu ajutorul limitelor de şiruri.

Teorema 6.2. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita $f(x_0)$.*

Demonstraţia este imediată, cu ajutorul rezultatului corespunzător pentru limite de funcţii, Teorema 5.3. Să observăm şi că teorema de mai sus (ca şi definţia continuităţii, de fapt) nu mai exclude valori ale argumentului diferite de x_0; dacă $a_n = x_0$, atunci $f(a_n) = f(x_0)$, valoare egală cu valoarea limitei.

Teorema de mai sus se poate exprima prin faptul că *funcţiile continue se pot aplica relaţiilor de convergenţă* (adică dacă f este continuă în x_0, iar $a_n \to x_0$ pentru $n \to \infty$, în condiţiile de mai sus, atunci $f(a_n) \to f(x_0)$ pentru $n \to \infty$.)

6.1.6 Caracterizarea cu $\varepsilon - \delta$ a continuităţii unei funcţii într-un punct

Următoarea *teoremă de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$* se poate obţine în mod imediat din rezultatul similar pentru limite de funcţii, Teorema 5.1.

Teorema 6.3. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon,x_0}$.*

In teorema de mai sus, $\delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ depinde (implicit) şi de punctul x_0 în care se studiază continuitatea funcţiei, pe lângă dependenţa de ε.

6.1.7 Operaţii cu funcţii continue

Se poate observa că operaţiile uzuale cu funcţii continue au ca rezultat funcţii continue, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 6.4. *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g continue în x_0. Atunci*

1. *$f + g$, $f - g$ sunt continue în x_0.*
2. *αf este continuă în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.*
3. *fg este continuă în x_0.*
4. *$\frac{f}{g}$ este continuă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$.*
5. *f^g este continuă în x_0 dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ este bine definită.*

Demonstraţia este imediată, obţinându-se cu ajutorul proprietăţilor operaţiilor cu limite de funcţii. O proprietate asemănătoare se poate formula în mod similar pentru funcţii continue pe întreg domeniul de definiţie.

Exemple.

1. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \log_2 x$ este continuă, fiind suma a două funcţii elementare.
2. $f : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^x$ este continuă, întrucât $f_1 : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + 2$, $f_2 : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x$ sunt continue, iar $f_1^{f_2}$ este bine definită.

Continuitatea funcţiei compuse

S-a observat anterior că operaţiile uzuale cu funcţii continue au ca rezultat tot funcţii continue. Teorema de mai jos exprimă faptul că prin compunerea a două funcţii continue se obţine tot o funcţie continuă.

Teorema 6.5. *Fie* $u : D \subseteq \mathbb{R} \to E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$ *astfel încât* u *este continuă în* x_0, *iar* f *este continuă în* $u(x_0)$. *Atunci funcţia compusă* $f \circ u : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este continuă în* x_0.

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir astfel ca $a_n \in D$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Deoarece funcţia u este continuă în x_0, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} u(a_n) = u(x_0)$, conform teoremei de caracterizare cu şiruri. Deoarece şi funcţia f este continuă, $\lim\limits_{n\to\infty} f(u(a_n)) = f(u(x_0))$, de unde concluzia. Cum $(a_n)_{n\geq 0}$ era arbitrar, urmează conform teoremei de caracterizare cu şiruri că $f \circ u$ este continuă în x_0. ■

Exemplu. Funcţia $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ este continuă, deoarece $f = f_1 \circ f_2$, unde $f_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2 : [1,\infty) \to [0,\infty)$, $f_2(x) = x^3 - 1$, sunt continue.

Cum funcţia modul este continuă, se poate demonstra că modulul unei funcţii continue este tot o funcţie continuă, iar maximul, respectiv minimul, a două funcţii sunt de asemenea funcţii continue.

Teorema 6.6. *Fie* $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g *continue în* x_0. *Atunci*

1. $|f|$ *este continuă în* x_0.
2. $\min(f, g)$ *şi* $\max(f, g)$ *sunt continue în* x_0.

Demonstraţie. 1. Cum $|f|$ reprezintă compunerea funcţiilor continue $|\cdot|$ şi f, $|f| = |\cdot| \circ f$, ea este continuă în x_0.

2. Este cunoscut că

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \quad \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Cum $f + g$, $f - g$ sunt continue, reprezentând operaţii uzuale cu funcţii continue, iar $|f - g|$ este de asemenea continuă, conform celor de mai sus, urmează că $\max(f, g)$ şi $\min(f, g)$ sunt continue, fiind obţinute prin operaţii uzuale cu funcţii continue. ■

6.1.8 Proprietăţi locale ale funcţiilor continue

Conform unei proprietăţi anterioare, continuitatea unei funcţii într-un punct presupune egalitatea între valoarea limitei şi valoarea funcţiei în punct, funcţiile continue moştenind pe această cale proprietăţile funcţiilor cu limită.

Mărginirea funcţiilor continue

Teorema 6.7. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ astfel încât f este continuă în x_0. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.*

Proprietatea de păstrare a semnului

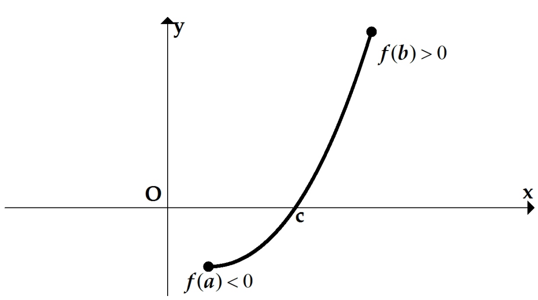
Teorema 6.8. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ astfel încât f este continuă în x_0, iar $f(x_0) \neq 0$. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f păstrează semnul lui $f(x_0)$.*

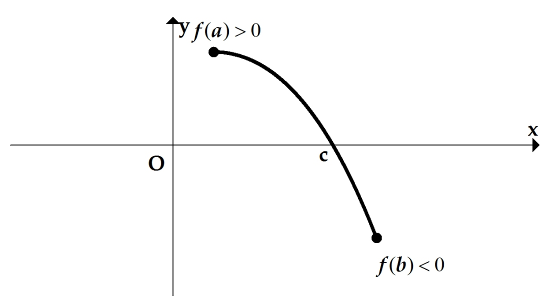
6.2 Proprietăţi ale funcţiilor continue pe o mulţime

6.2.1 Proprietatea lui Darboux

În cele ce urmează vom demonstra că o proprietate caracteristică a funcţiilor continue este aceea de a nu omite valori. Începem mai întâi prin a demonstra următoarea proprietate, numită *lema lui Bolzano*, ce exprimă faptul că dacă o funcţie continuă are valori de semne opuse la capetele unui interval, atunci ea are o rădăcină în interiorul acestui interval.

Teorema 6.9. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, cu proprietatea că $f(a)f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel ca $f(c) = 0$.*





Lema lui Bolzano, demonstrată mai sus, este instrumentală în determinarea aproximativă a radăcinilor unor ecuaţii care nu pot fi rezolvate explicit, un exemplu fiind indicat mai jos.

> **Exerciţiu.** Demonstraţi că ecuaţia $e^x = 2\cos x$ are cel puţin o rădăcină în intervalul $(0, \frac{\pi}{3})$.

Soluţie. Ecuaţia $e^x = 2\cos x$ poate fi pusă sub forma $e^x - 2\cos x = 0$. Fie atunci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2\cos x$. Atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}} - 1 > 0$. Cum f ia valori de semne opuse în capetele intervalului $[0, \frac{\pi}{3}]$, există cel puţin o rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval, ceea ce trebuia demonstrat.

> **Exerciţiu.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1 x + a_0$ o funcţie polinomială de grad impar. Atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină reală.

Soluţie. Deoarece f este o funcţie polinomială de grad impar, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, de unde, conform definiţiei limitei, există $x_1 < 0$ astfel ca $f(x_1) < 0$, deoarece într-o vecinătate a lui $-\infty$ valorile funcţiei f păstrează semnul limitei. Similar, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, de unde există $x_2 > 0$ astfel ca $f(x_2) > 0$. Cum f este continuă, fiind funcţie elementară, iar valorile lui f în capetele intervalului $[x_1, x_2]$ au semne opuse, există măcar o rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval.

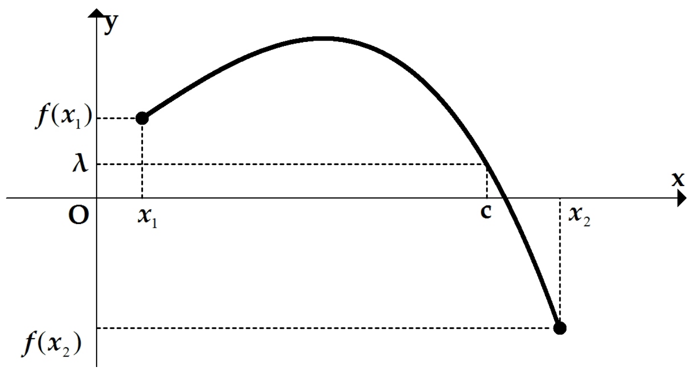
Existenţa rădăcinilor unor ecuaţii

Din cele de mai sus se desprinde următorul procedeu general de localizare a rădăcinilor unei ecuaţii.

Fie o ecuaţie de forma $f(x) = 0$, unde $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe un interval I. Se determină mai întâi două puncte x_1, $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, astfel încât $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ au semne opuse, adică $f(x_1)f(x_2) < 0$. Deoarece f este continuă pe I, rezultă atunci conform lemei lui Bolzano că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = 0$, adică ecuaţia $f(x) = 0$ are măcar rădăcina c în intervalul (x_1, x_2). Dacă $f(x_1)f(x_2) \leq 0$, ecuaţia $f(x) = 0$ are măcar rădăcina c în intervalul $[x_1, x_2]$. În plus, dacă f este strict monotonă pe intervalul $[x_1, x_2]$ (fiind deci şi injectivă pe acest interval), atunci această rădăcină este unică.

Dacă ecuaţia de rezolvat este prezentată sub forma $f(x) = g(x)$, unde $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continuă pe I, atunci această ecuaţie se pune mai întâi sub forma $f(x) - g(x) = 0$, aplicându-se apoi consideraţiile de mai sus.

Dat un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, vom spune că f *are proprietatea lui Darboux pe I*, sau a *valorii intermediare pe I* dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ şi $f(x_1) \neq f(x_2)$ şi orice număr real λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = \lambda$.



Altfel spus, o funcţie f are proprietatea lui Darboux dacă odată cu două valori arbitrare $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ aceasta ia pe intervalul (x_1, x_2) şi orice valori intermediare situate între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$ (adică toate valorile din intervalul deschis determinat de $f(x_1$ şi $f(x_2))$. Conform acestei observaţii, rezultă imediat că funcţiile cu proprietatea lui Darboux transformă intervalele în intervale.

Teorema 6.10. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux pe intervalul $I \subseteq D$. Atunci $f(I)$ este un interval.*

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$. Atunci $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, dar f nu ia pe intervalul $(0, 1)$ şi valoarea intermediară $\frac{1}{2}$, deci f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Alternativ, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$, deci f nu transformă intervalul deschis $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui Darboux.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$. Atunci $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$, deci f nu transformă $\mathbb{R}$ tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui

Darboux.

Restrângând în mod potrivit intervalul I de mai sus în jurul unui punct x_0 în care o funcţie cu proprietatea lui Darboux are o limită laterală, se obţine imediat următorul rezultat.

Teorema 6.11. *Fie $f : I_1 \to \mathbb{R}$, I_1 fiind un interval pe care f are proprietatea lui Darboux, şi fie $x_0 \in I_1$ astfel încât există o limită laterală a lui f în x_0. Atunci această limită este egală cu $f(x_0)$.*

Conform acestei proprietăţi, funcţiile cu proprietatea Darboux sunt „aproape continue", în sensul că nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură.

Corolar 6.11.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea lui Darboux pe intervalul I. Atunci f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia a doua pe I.*

Vom demonstra în cele ce urmează că funcţiile continue pe un interval au proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Teorema 6.12. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f are proprietatea lui Darboux pe I.*

Demonstraţie. Fie x_1, $x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ şi $f(x_1) \neq f(x_2)$ şi fie λ cuprins între $f(x_1)$ şi $f(x_2)$. Fie deasemenea $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda$.

Atunci g este continuă pe I, iar $g(x_1)g(x_2) = (f(x_1) - \lambda)(f(x_2) - \lambda) < 0$. Conform teoremei Cauchy-Bolzano, există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $g(c) = 0$, de unde $f(c) = \lambda$, iar f are proprietatea lui Darboux pe I. ∎

Corolar 6.12.1. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe intervalul $I \subseteq D$. Atunci $f(I)$ este un interval.*

6.2.2 Funcţii uniform continue

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Dacă f este continuă în x_0 atunci, conform teoremei de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon,x_0}$. Aşa cum s-a afirmat, δ_{ε,x_0} depinde atât de ε, cât şi de x_0, valoarea sa putând să se schimbe după substituirea lui x_0 cu un alt argument x_1. Când această valoare nu se schimbă indiferent de valoarea argumentului considerat, f se numeşte *uniform continuă*.

În acest sens, vom spune că f este *uniform continuă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$ cu proprietatea că $|x - y| < \delta_\varepsilon$.

Definiţia de mai sus exprimă faptul că, pentru o funcţie uniform continuă, dacă diferenţa între două argumente x şi y este suficient de mică, atunci diferenţa dintre valorile $f(x)$ şi $f(y)$ este de asemenea mică indiferent de locul argumentelor x şi y în domeniul de definiţie. Din punct de vedere geometric, imaginea oricărui interval cu o lungime mai mică decât δ_ε este tot un interval, cu lungime mai mică decât ε. Desigur, orice funcţie uniform continuă pe o mulţime este şi continuă pe acea mulţime, definiţia uniformei continuităţi fiind mai restrictivă.

Exemplu. 1. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $[0, 2]$. Într-adevăr,

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq 4|x - y|,$$

de unde f este uniform continuă, cu $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$.

2. $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0, 1]$. Să presupunem prin reducere la absurd că g este uniform continuă pe $(0, 1]$. Fie atunci $\varepsilon = 1$ şi fie δ_1, $0 < \delta_1 < 1$, astfel ca $|g(x) - g(y)| < 1$ pentru orice $x, y \in (0, 1]$, $|x - y| < \delta_1$. Pentru $x = \delta_1$, $y = \frac{\delta_1}{2}$, urmează că

$$|x - y| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1, \quad |g(x) - g(y)| = \frac{1}{\delta_1} > 1,$$

contradicţie. Urmează că g nu este uniform continuă pe $(0, 1]$

6.2.3 Funcţii Lipschitz. Contracţii

Vom preciză în cele ce urmează o categorie specială de funcţii uniform continue.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă există $L > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ pentru orice $x, y \in D$, atunci f se numeşte *funcţie Lipschitz* (sau *funcţie lipschitziană*) pe D, L numindu-se *constantă Lipschitz* a funcţiei f.

Teorema 6.13. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, f lipschitziană pe D. Atunci f este uniform continuă pe D.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar şi fie $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$, unde L este o constantă Lipschitz a funcţiei f. Atunci

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

pentru orice $x, y \in D$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon$, deci f este uniform continuă pe D. ■

Teorema de punct fix a lui Banach

Fie $T : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că $x_0 \in D$ este un *punct fix* al lui T dacă $T(x_0) = x_0$. De asemenea, vom numi *contracţie* o funcţie Lipschitz care admite o constantă Lipschitz $L < 1$. În cele ce urmează vom folosi notaţia simplificată $T(x) = Tx$, iar $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ ori } T}$.

Următoarea teoremă, numită *teorema de punct fix a lui Banach* precizează existenţa şi unicitatea punctului fix al unei contracţii a unei mulţimi închise D în ea însăşi, precizând şi o metodă de obţinere a acestui punct fix, lucru care o face utilă în determinarea aproximativă a soluţiilor unor clase largi de ecuaţii.

Teorema 6.14. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ închisă, iar $T : D \to D$ o contracţie a lui D în ea însăşi. Există atunci un unic punct fix al lui T, iar şirul $(T^n x_0)_{n \geq 0}$ este convergent la acest punct fix pentru orice punct iniţial $x_0 \in D$.*

6.2.4 Funcţii continue definite pe intervale închise şi mărginite

A fost demonstrat deja că funcţiile continue transformă intervalele în intervale. O precizare ce se poate aduce este că funcţiile continue transformă intervalele închise şi mărginite tot în intervale închise şi mărginite. Acest lucru este exprimat în următorul rezultat, numit *teorema lui Weierstrass*.

Teorema 6.15. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe $[a, b]$.*

Deşi s-a observat mai sus că funcţiile continue nu sunt necesar uniform continue, acestea devin totuşi uniform continue atunci când domeniul lor este un interval închis şi mărginit.

Teorema 6.16. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$. Atunci f este uniform continuă pe $[a,b]$.*

Aplicaţii

6.1. *Precizaţi un exemplu de funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pentru care $|f|$ este continuă fără ca f să fie continuă.*

6.2. *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^2}-a}{x^2}, & x > 0 \\ 2x^3 - 4x + b, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.*

6.3. *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ ax, & x = 2 \end{cases}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 2$.*

6.4. *Demonstraţi că funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x_0 = 0$.*

6.5. *Fie funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (0,\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.*

6.6. *Fie funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^p \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, & x \in (0,\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Determinaţi $p \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.*

6.7. *Precizaţi punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x^2]$ şi natura acestora.*

6.8.
1. *Precizaţi punctele de discontinuitate ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$ şi natura acestora.*
2. *Demonstraţi că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, este continuă pe $\mathbb{R}$.*

6.9. *Fie* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$. *Prelungiţi* f *prin continuitate în* $x_0 = 0$.

6.10. *Fie* $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2 \sin \frac{1}{x+2}$. *Prelungiţi* f *prin continuitate în* $x_0 = -2$.

6.11. *Fie* $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 3}{x - 1}, & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$. *Demonstraţi că* f *nu poate fi prelungită prin continuitate în* $x_0 = 1$.

6.12. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că* $|f(x) - x| \le x^2$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Determinaţi* $f(0)$.
2. *Demonstraţi că* f *este continuă în* 0.

6.13.

1. *Determinaţi funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue în* $x = 0$ *pentru care* $f(x) = f(2x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Determinaţi funcţiile* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *continue în* $x = 1$ *pentru care* $f(x) = f(x^2)$ *pentru orice* $x \in [0, \infty)$.

6.14. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue.*

1. *Dacă* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{Q}$, *atunci* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Dacă* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *atunci* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.
3. *Dacă* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{Z}$, *rezultă că* $f(x) = g(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$?

6.15. *Fie* $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f_1, f_2 *continue şi fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. *Atunci* f *este continuă în* $x_0 \in \mathbb{R}$ *dacă şi numai dacă* $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

6.16. *Fie* $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$.

1. *Dacă* f *este continuă în* x_0, *iar* g *este discontinuă în* x_0, *atunci* $f + g$ *este discontinuă în* x_0.
2. *Dacă* f, g *discontinue în* x_0, *rezultă că* $f + g$ *este discontinuă în* x_0?

6.17. 1. *Fie* $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$, f, g *continue în* x_0. *Dacă* $f(x_0) < g(x_0)$, *arătaţi că există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *cu proprietatea că* $f(x) < g(x)$ *pentru orice* $x \in U \cap D$.

2. *Fie* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D$, f *continuă în* x_0. *Dacă* $m, M \in \mathbb{R}$ *sunt astfel încât* $m < f(x_0) < M$, *arătaţi că există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *cu proprietatea că* $m < f(x) < M$ *pentru orice* $x \in U \cap D$.

6.18. *Demonstraţi că ecuaţia* $3^x(x^3+1) - 2 = 0$ *are o unică rădăcină în intervalul* $(0, 1)$.

6.19. *Demonstraţi că ecuaţia* $x^5 - 3x^4 - 2x + 1 = 0$ *admite cel puţin o rădăcină reală.*

6.20. *Demonstraţi că dacă* $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci ecuaţia* $x \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x}$ *are măcar o rădăcină în intervalul* $(\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi})$.

6.21. 1. *Demonstraţi că ecuaţia* $x^3 + 2x = 3 + \frac{1}{n}$ *are o unică soluţie reală* x_n *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

2. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

6.22. *Fie* $f : [a, b] \to [a, b]$, f *continuă. Demonstraţi că există* $c \in [a, b]$ *astfel încât* $f(c) = c$.

6.23. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *continuă. Demonstraţi că există* $c \in (a, b)$ *astfel încât* $f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$.

6.24. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *continuă şi fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. *Demonstraţi că există* $c \in [a, b]$ *astfel ca* $f(c) = \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big)$.

6.25. *Fie* $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & x \in [-2, -1) \\ x + a, & x \in [-1, 2] \end{cases}$. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* f *să aibă proprietatea lui Darboux pe* $[-2, 2]$.

6.26. *Demonstraţi că* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$, *este bijectivă.*

6.27. *Fie* $f : [0, 1] \to [0, 1] \cup [2, 3]$, f *continuă. Demonstraţi că* f *nu este surjectivă.*

6.28. *Fie* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, f *continuă, iar* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *este finită. Atunci* f *este mărginită.*

6.29. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *crescătoare. Demonstraţi că* $\operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$.

6.30. 1. *Folosind eventual inegalitatea* $\sin x < x$ *pentru* $x > 0$, *demonstraţi că* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$ *este uniform continuă pe* $[0, \infty)$.

2. *Folosind eventual inegalitatea* $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ *pentru* $x, y \geq 0$, *demonstraţi că* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, *este uniform continuă pe* $[0, \infty)$.

6.31. 1. *Dacă* $f : D \to \mathbb{R}$ *este uniform continuă pe* D, $D_1 \subseteq D$, *iar* $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ *este o restricţie a lui* f *la* D_1, *atunci* f_1 *este uniform continuă pe* D_1

2. *Demonstraţi că* $f_1 : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$, *este uniform continuă pe* $(0, 1]$.

6.32. 1. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f *continuă. Dacă există limitele* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *şi* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *şi sunt finite, atunci* f *este uniform continuă pe* $\mathbb{R}$.

2. *Demonstraţi că* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, *este uniform continuă pe* $\mathbb{R}$.

3. *Demonstraţi că* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, *este uniform continuă pe* $\mathbb{R}$.

6.33. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continuă şi periodică. Atunci* f *este uniform continuă.*

6.34. 1. *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$, f *continuă. Dacă există* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0} \subseteq D$ *astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$, *dar* $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, *atunci* f *nu este uniform continuă pe* D.

2. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f *continuă. Dacă există* $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0} \subseteq (a, b)$ *astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *sau* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *dar* $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, *atunci* f *nu este uniform continuă pe* (a, b).

3. *Demonstraţi că* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, *nu este uniform continuă pe* $(0, \infty)$.

4. *Demonstraţi că* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, *nu este uniform continuă pe* $(0, \infty)$.

5. *Demonstraţi că* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$, *nu este uniform continuă pe* $[0, \infty)$.

6.35. 1. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f *uniform continuă. Folosind eventual criteriul Cauchy-Bolzano, arătaţi că există limitele* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ *şi* $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ *şi sunt finite.*

2. *Demonstraţi că* $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, *nu este uniform continuă pe* $(0, \frac{\pi}{2})$.

3. *Demonstraţi că* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, *nu este uniform continuă pe* $(0, \infty)$.