Capitolul 3

SERII NUMERICE

Date fiind numerele reale $x_0, x_1, \ldots, x_n$, în număr finit, suma lor $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ se poate calcula fără dificultate, după regulile uzuale. Extinderea noţiunii de sumă pentru mulţimi infinite de numere nu este însă la fel de imediată. Acest lucru se poate observa încercând să se calculeze suma

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + 1 + (-1) + \ldots$$

(termenii sumei sunt, alternativ, 1 şi -1). Gruparea în modul

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + \ldots,$$

în care suma termenilor din fiecare grup este 0, poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 0. De asemenea, gruparea în modul

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \ldots + ((-1) + 1) + \ldots,$$

poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 1; desigur, asocierea a două valori distincte pentru o aceeaşi sumă de numere reale reprezintă o situaţie inacceptabilă. În special, din cele de mai sus se observă faptul că în cazul adunării unui număr infinit de numere reale nu are neapărat loc proprietatea de asociativitate.

În lipsa proprietăţii de asociativitate, singura posibilitate de calcul a unei sume infinite rămâne de a aduna termenii din sumă unul câte unul. În concluzie, pentru a calcula o sumă de forma

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

vom determina

$$S_0 = x_0, \quad S_1 = x_0 + x_1, \quad S_2 = x_0 + x_1 + x_2, \ldots,$$
$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots$$

şi vom încerca să extragem informaţii despre comportarea şirului $(S_n)_{n\geq 0}$, utilizând aceste informaţii pentru determinarea sumei.

Numim atunci *serie numerică de termen general* x_n (sau, mai simplu, *serie de termen general* x_n) cuplul $((x_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0})$ format din şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ al termenilor seriei şi şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale, definit după regula

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

În această situaţie, x_n se va numi şi *termenul de rang n* sau *indice n* al seriei. Vom nota o serie de termen general x_n prin

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Dacă primii k termeni $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nu sunt definiţi, vom nota seria de termen general x_n prin

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n + \ldots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

Notaţiile de mai sus sugerează şi denumirea de „sumă infinită" pentru o serie, deşi, conform exemplului anterior, sumele infinite de numere reale nu au neapărat aceleaşi proprietăţi ca şi sumele finite de numere reale, această denumire nefiind deci întrutotul justificată.

Serii convergente, serii divergente

Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, respectiv că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este *divergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este divergent. Dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ are limită, atunci

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *suma* seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Seriilor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ nu are limită nu li se asociază nicio sumă.

Exemplu. Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Termenul general al acestei serii este $x_n = \frac{1}{2^n}$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots.$$

Deoarece

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2,$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, iar suma sa este 2.

Exemplu. Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$. Termenul general al acestei serii este $x_n = n$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n + \ldots.$$

Deoarece

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty,$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ este divergentă, iar suma sa este $+\infty$.

Exemplu. Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Termenul general al acestei serii este $x_n =$

$(-1)^n$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + 1 + (-1) + \ldots$$

Deoarece

$$S_{2n} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + 1 = 1,$$

iar

$$S_{2n+1} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) = 0,$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = 0,$$

deci nu există $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ este divergentă, suma sa nepu-tând fi definită.

În cele ce urmează, vom preciza condiţii pentru a stabili dacă o serie dată este sau nu convergentă, acolo unde este posibil determinându-se explicit şi suma seriei.

Sume calculabile exact

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$

Termenul general al acestei serii este $x_n = q^n$. Dacă $q \neq 1$, atunci

$$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = n + 1$.

Urmează atunci că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $q \in (-1, 1)$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ pentru $q \in (-1, 1)$. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

De asemenea, pentru $q = 1$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, deoarece $\lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q = 1.$$

Dacă $q \in (1, +\infty)$, atunci $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, deoarece $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty$ pentru $q \in (1, \infty)$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q \in (1, +\infty).$$

Dacă $q \in (-\infty, -1]$, atunci $\lim_{n\to\infty} S_n$ nu există, deoarece $\lim_{n\to\infty} q^{n+1}$ nu există pentru $q \in (-\infty, -1]$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, acestei serii neputându-i-se asocia o sumă.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu este definită}, & \text{dacă } q \leq -1 \\ \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dacă } q \geq 1 \end{cases}.$$

Exemplu. Fie suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n}$. Atunci termenul general al acestei serii este

$$x_n = \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \left(\frac{(-1)2^3}{9}\right)^n = \left(-\frac{8}{9}\right)^n,$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{8}{9}\right)} = \frac{9}{17}.$$

Serii telescopice

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie telescopică* dacă există şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, astfel ca

$$x_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

adică există un şir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferenţa a doi termeni consecutivi ai acestui şir, primul cu acelaşi indice ca şi indicele termenului general al seriei. În această situaţie,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1}, \end{aligned}$$

de unde seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă si numai dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent. În această ultimă situaţie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \to \infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 - l,$$

unde $\lim_{n \to \infty} a_n = l$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Observăm că

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$. Observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k = \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \ldots + \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) \\ &= \sqrt{n+2}-1, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-1) = +\infty.$$

Proprietăţi generale ale seriilor

Eliminarea termenilor

În Capitolul 2, a fost observat că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai unui şir nu-i modifică acestuia proprietatea de a avea sau nu avea limită. Cum convergenţa unei serii este definită prin intermediul şirului sumelor parţiale, este natural ca nici eliminarea unui număr finit de termeni ai unei serii date să nu modifice natura acesteia. Prin „natură" înţelegem aici proprietatea unei serii de a fi convergentă sau divergentă, iar prin serii „cu aceeaşi natură" înţelegem două serii care sunt ambele convergente sau ambele divergente.

Teorema 3.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială, putându-se modifica în schimb suma sa, dacă seria este convergentă. Dacă suma seriei este* $+\infty$ *sau* $-\infty$*, aceasta nu se modifică.*

Comutativitate (Schimbarea ordinii termenilor)

Este cunoscut că o sumă finită are proprietatea de comutativitate, în sensul că valoarea sumei rămâne aceeaşi după orice schimbare a ordinii termenilor. Cu anumite precauţii (schimbarea ordinii va afecta doar un număr finit de termeni), această proprietate rămâne valabilă şi pentru serii.

Teorema 3.2. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială şi aceeaşi sumă.*

Proprietăţi generale ale seriilor convergente

Asociativitate

S-a observat deja că pentru cazul seriei divergente $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ asocierea termenilor cu ajutorul parantezelor conduce la mai multe valori posibile ale sumei sale. Totuşi, se poate demonstra că prin gruparea termenilor unei serii convergente cu ajutorul parantezelor se obţine tot o serie convergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.

Teorema 3.3. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie convergentă. Asocierea termenilor săi cu ajutorul parantezelor conduce la o serie convergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.*

Restul de ordin p

Dată fiind seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, vom numi *rest de ordin p* al acesteia seria

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots,$$

obţinută din seria iniţială prin eliminarea termenilor $x_0, x_1, \ldots, x_p$, cu indici mai mici sau egali cu p. Se observă atunci că

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S_p + R_p, \quad \text{pentru orice } p \geq 0,$$

unde $(S_n)_{n\geq 0}$ este şirul sumelor parţiale asociat seriei date. Din acest motiv, dacă seria dată este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale tinde la suma seriei, iar şirul resturilor tinde la 0, conform formulei de mai sus. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Teorema 3.4. *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă* R_p*, restul de ordin* p*, este o serie convergentă pentru orice* $p \in \mathbb{N}$*. În plus, dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$*.*

Criteriul de convergenţă Cauchy

A fost deja demonstrat în Capitolul 2 că un şir este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental (Cauchy). De aici, o serie dată este convergentă dacă şi numai dacă sirul sumelor sale parţiale este şir Cauchy. Acest lucru se reflectă în următorul rezultat.

Teorema 3.5. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un rang* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0.$$

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Atunci

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}|, \quad \text{pentru orice } n, p \geq 0.$$

Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este şir fundamental, adică dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0,$$

rezultă concluzia. ■

Divergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că şirul

$$(S_n)_{n\geq 1} : x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

nu este şir Cauchy. Cum acesta este şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. Seria de mai sus se numeşte şi *seria armonică*, întrucât fiecare termen al seriei este media armonică a termenilor care-l înconjoară, adică $\frac{1}{n} = \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{\frac{1}{n+1}}}$ pentru orice $n > 1$.

Limita termenului general

Teorema 3.6. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstraţie. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă, cu suma l. Deoarece

$$x_n = S_n - S_{n-1} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = l$, urmează concluzia. ■

Se observă de aici că dacă $\lim_{n\to\infty} x_n$ nu există, sau există şi nu este 0, atunci seria dată nu este convergentă. Se obţine deci următorul rezultat.

Corolar 3.6.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *nu există, sau există şi nu este* 0, *atunci seria dată este divergentă.*

Exerciţiu. Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}.$$

Soluţie. Putem calcula limita termenului general în fiecare dintre aceste cazuri. Cum

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3n+\frac{1}{n}}{2n}} = e^{\frac{3}{2}} \neq 0,$$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}}$ este divergentă. Se observă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n(\frac{2}{5}^n + 1)}{5^{n+1}(\frac{2}{5}^{n+1} + 1)} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}$ este divergentă. De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty \neq 0,$$

deci şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$ este divergentă.

Se poate observa de asemenea faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ nu este o condiţie suficientă pentru convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ (fiind doar necesară). În acest sens, se poate observa că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dar totuşi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Mărginirea şirului sumelor parţiale

Teorema 3.7. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Atunci şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale asociate seriei este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă şi fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei. Cum $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar cum orice şir convergent este mărginit, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

Reciproc, dacă şirul sumelor parţiale asociate unei serii date este nemărginit, atunci seria este divergentă. Se obţine deci următorul rezultat.

Corolar 3.7.1. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată şi fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei. Dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.*

Exerciţiu. Demonstraţi că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Soluţie. Are loc estimarea

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

Cum $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} = +\infty$, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit, şi atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Operaţii cu serii convergente

Întrucât, aşa cum s-a menţionat anterior, convergenţa unei serii se defineşte prin intermediul convergenţei şirului sumelor sale parţiale, se va observa că proprietatea unor serii de a fi convergente se păstrează după efectuarea operaţiilor uzuale de sumă, diferenţă şi produs cu o constantă.

Teorema 3.8. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii convergente de numere reale astfel ca $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$. Atunci seria sumă $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n)$ şi seria produs cu o constantă $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n$, $c\in\mathbb{R}$, sunt convergente. În plus, au loc relaţiile*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n = A+B;$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n = c\sum_{n=0}^{\infty} x_n = cA.$

Demonstraţia este imediată, utilizând proprietăţile operaţiilor cu şiruri convergente.

Serii cu termeni pozitivi, serii cu termeni negativi, serii alternante, serii cu termeni oarecare

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni pozitivi* dacă toţi termenii săi de la un indice încolo sunt pozitivi, adică există $N_1\in\mathbb{N}$ astfel că $x_n\geq 0$ pentru orice $n\geq N_1$. Similar, spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni negativi* dacă toţi termenii săi de la un indice încolo sunt negativi, adică există $N_2\in\mathbb{N}$ astfel că $x_n\leq 0$ pentru orice $n\geq N_2$.

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *serie cu termeni oarecare* dacă are atât o infinitate de termeni pozitivi, cât şi o infinitate de termeni negativi. Un caz particular de serii cu termeni oarecare sunt *seriile alternante*. O serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *alternantă* dacă termenii săi sunt alternativ pozitivi şi negativi de la un rang încolo, adică există $N_3 \in \mathbb{N}$ pentru care $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir de termeni nenuli cu semn constant. În concluzie, pentru o serie alternantă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, fie $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, fie $x_n = (-1)^{n+1} a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi.

În cele ce urmează, conform faptului că eliminarea unui număr finit de termeni ai seriei nu modifică natura acesteia, vom presupune acolo unde este necesar că proprietatea de pozitivitate (respectiv negativitate, alternanţă) are loc începând cu primul termen al seriei. De asemenea, întrucât înmulţirea cu un număr negativ nu modifică natura unei serii, seriile cu termeni negativi nu vor fi tratate separat, rezultate privind convergenţa acestora putând fi deduse cu uşurinţă din rezultatele corespunzătoare privind convergenţa seriilor cu termeni pozitivi.

3.1 Serii cu termeni pozitivi

Monotonia şirului sumelor parţiale

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Deoarece

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0,$$

urmează că şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător. Acest lucru are consecinţe importante asupra convergenţei unei serii cu termeni pozitivi, deoarece dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este monoton, o condiţie necesară şi suficientă pentru convergenţa sa este ca el să fie mărginit superior. Obţinem deci următorul criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi.

Teorema 3.9. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale asociate seriei este mărginit superior.*

În plus, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, atunci, deoarece $(S_n)_{n\geq 0}$ tinde monoton crescător către limita sa A, urmează că $S_n \leq A$ pentru orice $n \geq 0$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Deoarece

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{pentru orice } n \geq 2,$$

urmează că

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2, \end{aligned}$$

iar şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ al sumelor parţiale este mărginit superior, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

De asemenea, se poate observa că pentru serii cu termeni pozitivi are loc proprietatea de comutativitate, în care de această dată se pot schimba locurile unui număr infinit de termeni.

Teorema 3.10. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dacă se schimbă ordinea unor termeni din serie (chiar în număr infinit), seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ astfel obţinută este convergentă şi are aceeaşi sumă.*

3.1.1 Criteriul de condensare

Un criteriu util pentru stabilirea, între altele, a convergenţei aşa-numitei serii armonice generalizate, care va fi folosită ca termen de comparaţie pentru alte serii, este următorul rezultat, numit *criteriul de condensare*.

Teorema 3.11. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton descrescător cu termeni pozitivi. Atunci* *seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ *au aceeaşi natură.*

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Soluţie. Deoarece $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)_{n\geq 2}$ este un şir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeaşi natură. Cum $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ este divergentă.

Convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Dacă $p < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. Similar, pentru $p = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este de asemenea divergentă.

Fie acum $p > 0$. Conform criteriului de condensare, seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ au aceeaşi natură. Cum

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n,$$

iar $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ pentru $p \in (0, 1]$, respectiv $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ pentru $p > 1$, urmează că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă pentru $p \in (0, 1]$, respectiv convergentă pentru $p > 1$.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ este } \begin{cases} \text{divergentă,} & \text{dacă } p \leq 1 \\ \text{convergentă,} & \text{dacă } p > 1 \end{cases}.$$

Reprezentând o formă mai generală a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se mai numeşte şi *seria armonică generalizată*.

3.1.2 Criterii de comparaţie

În cele ce urmează vom prezenta un set de criterii care permit analiza convergenţei sau divergenţei unei serii cu termeni pozitivi date prin stabilirea unei relaţii între termenii seriei şi termenii unei alte serii a cărei natură este cunoscută (deseori cu seria armonică generalizată). Revenind la faptul că, pentru serii cu termeni pozitivi, convergenţa acestora este echivalentă cu nemărginirea şirului sumelor parţiale, interpretarea următorului rezultat este imediată: o serie ai cărei termeni sunt mai mari decât termenii unei serii „nemărginite" (i.e., divergente) date este de asemenea „nemărginită" (i.e., divergentă), în vreme ce o serie ai cărei termeni sunt mai mici decât termenii unei serii „mărginite" (i.e., convergente) date este de asemenea „mărginită" (i.e., convergentă).

Teorema 3.12. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *două serii cu termeni pozitivi. Dacă există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*

$$x_n \leq y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

Date fiind $c \in (0, \infty)$ şi o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, se observă că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ au aceeaşi natură. În aceste condiţii, se poate obţine uşor următorul corolar al teoremei de mai sus, numit *criteriul de comparaţie cu inegalităţi*.

Corolar 3.12.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *două serii cu termeni pozitivi şi fie* $c \in (0, \infty)$. *Dacă* *există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$x_n \leq c y_n \text{ pentru orice } n \geq N, \tag{3.1}$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*

2. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.*

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa următoarelor serii:
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

Soluţie. 1) Deoarece $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ este de asemenea convergentă.

2) Deoarece $\frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ este de asemenea convergentă.

3) Deoarece $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^4}} = \frac{1}{n+1}$, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ este divergentă (este acelaşi lucru cu seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ este divergentă.

4) Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $\sqrt[n]{n} \leq 2$ pentru orice $n \geq 2$, deci $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, urmează că şi seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ este divergentă.

Informaţii despre îndeplinirea relaţiei (3.1), necesară pentru utilizarea criteriului de comparaţie, se pot obţine studiind comportarea raportului $\frac{x_n}{y_n}$.

În acest sens, să presupunem că $y_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$. Conform Teoremei 2.36, dacă $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, iar $\varepsilon > 0$, atunci există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_n}{y_n} < L + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$. Se obţine că

$$x_n < (L + \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

Similar, dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, iar $\varepsilon \in (0, l)$, atunci există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_n}{y_n} > l - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$. De aici,

$$x_n > (l - \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

Putem atunci obţine următorul rezultat, numit *criteriul de comparaţie cu limite extreme*.

Corolar 3.12.2. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi.*

1. *Dacă* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, *iar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, *iar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1) Concluzia se obţine deoarece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă şi există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n < (L + \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

2) Concluzia se obţine deoarece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă şi există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n > (l - \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

■

În situaţia în care există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$. În plus, au loc egalităţile

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul de comparaţie cu limită*.

Corolar 3.12.3. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Au loc următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă* $l < \infty$, *iar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $l > 0$, *iar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $l \in (0, \infty)$, *atunci seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *au aceeaşi natură.*

În multe situaţii, un bun termen de comparaţie este seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\frac{1}{n^p}$ precizând comportarea „aproximativă" a termenului general al seriei de studiat. De exemplu, în studiul convergenţei seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ este utilă comparaţia cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, întrucât $\frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ are comportarea „aproximativă" a lui $\frac{1}{n^3}$ pentru $n \to \infty$, iar în studiul convergenţei seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ este utilă comparaţia cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, întrucât $\frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ are comportarea „aproximativă" a lui $\frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exemplu. Studiaţi convergenţa seriilor:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$;
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

Soluţie. 1) Vom compara seria dată cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{3}{2} > 1$, urmează că şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ este convergentă.

2) Vom compara seria dată cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+6n+11}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{n^2+6n+11} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind o serie armonică, urmează că şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ este divergentă.

3) Vom compara seria dată cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ este divergentă.

4) Este deja cunoscut că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = c \in (0,1)$. De aici,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n} = 0,$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ au aceeaşi natură. Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$: $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ este un şir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ şi $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{\ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeaşi natură. Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $2^n \frac{1}{n \ln 2} \geq \frac{1}{\ln 2}$, deci termenul general al seriei $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$ nu tinde la 0, aceasta fiind în concluzie divergentă. Urmează că şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$ este divergentă.

Vom preciza în cele ce urmează un alt criteriu, numit şi *criteriul de comparaţie cu rapoarte*, prin care convergenţa sau divergenţa unei serii se poate stabili prin intermediul comparaţiei cu o serie a cărei natură este cunoscută, ce poate fi dedus cu ajutorul Corolarului 3.12.1.

Teorema 3.13. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *două serii cu termeni strict pozitivi. Dacă există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N, \tag{3.2}$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Cu ajutorul (3.2) se deduce că

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{x_N}{y_N} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Cu notaţia $\frac{x_N}{y_N} = c$, urmează că

$$\frac{x_n}{y_n} \leq c \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde concluzia urmează conform Corolarului 3.12.1. ■

3.1.3 Criterii ale radicalului

Un dezavantaj al criteriilor de comparaţie este că utilizarea acestora necesită construcţia unor serii ajutătoare, alegerea acestora din urmă nefiind totdeauna imediată. Următorul criteriu, numit şi *criteriul radicalului cu inegalităţi*, este utilizat îndeosebi pentru studierea convergenţei unor serii pentru care termenul general conţine puterea de ordin n a unui alt şir şi nu necesită construcţia unei serii ajutătoare.

Teorema 3.14. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă există* $q < 1$ *şi* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă*

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$x_n \leq q^n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar cum $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă se obţine că şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Deoarece

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

se obţine că $x_n \geq 1$ pentru o infinitate de valori ale lui n, deci şirul termenilor generali $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este convergent la 0, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ∎

Se poate obţine atunci următorul *criteriu al radicalului cu limite extreme*.

Teorema 3.15. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limite extreme (spunem că este un caz de dubiu).*

În situaţia în care există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, iar

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

Teorema de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul radicalului cu limită*.

Corolar 3.15.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăţi:

1. *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $l > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $l = 1$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limită.*

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1} \right)^n$.

Soluţie. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \left(\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1} \right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$= \frac{3}{2} > 1$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1} \right)^n$ este divergentă.

Exerciţiu. Discutaţi natura seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{an+1}{n+2} \right)^n$, unde $a > 0$.

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \left(\dfrac{an+1}{n+2} \right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an+1}{n+2} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(a+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = a.$$

De aici, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{an+1}{n+2} \right)^n$ este convergentă dacă $a \in (0,1)$, respectiv divergentă dacă $a > 1$.

Dacă $a = 1$, urmează că $x_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$, deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{-(n+2)} \right]^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Urmează că $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este convergent la 0, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2} \right)^n$ este divergentă.

3.1.4 Criterii ale raportului

Un alt criteriu util pentru studiul convergenţei unor serii cu termeni pozitivi, în special a acelora pentru care termenul general conţine produse, este *criteriul raportului cu inegalităţi*, indicat mai jos. De asemenea, acesta nu necesită construcţia unei serii ajutătoare.

Teorema 3.16. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă există* $q < 1$ *şi* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Deoarece
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
urmează că
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
iar deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă, se obţine cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul de comparaţie cu rapoarte) că şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Se observă că
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1^{n+1}}{1^n} \text{ pentru orice } n \geq N,$$
iar cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ este divergentă, se obţine cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul de comparaţie cu rapoarte) că şi seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obţine atunci următorul *criteriu al raportului cu limite extreme*.

Teorema 3.17. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limite extreme.*

În situaţia în care există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. În plus, au loc egalităţile

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul raportului cu limită*.

Corolar 3.17.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăţi:

1. *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $l > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $l = 1$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limită.*

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa seriilor
1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$.

Soluţie. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$
$$= \frac{2}{e} < 1,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ este convergentă.

2) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n+2)(3n+5)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)(2n+3)}}{\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n+2)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$ este divergentă.

În ceea ce priveşte relaţia între domeniile de aplicabilitate ale criteriilor raportului şi radicalului, să notăm că dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi atunci, aşa cum reiese din Teorema 2.40, are loc inegalitatea

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Se observă de aici că dacă $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ atunci şi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, iar dacă $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci şi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$. De aici, dacă sunt îndeplinite condiţiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limite extreme, atunci sunt îndeplinite şi condiţiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limite extreme, obţinându-se aceleaşi rezultate. De asemenea, dacă există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci există şi limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ există şi are aceeaşi valoare, deci dacă sunt îndeplinite condiţiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limită, atunci sunt îndeplinite şi condiţiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limită, obţinându-se acelaşi rezultat.

În plus, există situaţii în care criteriile raportului nu sunt aplicabile, fiind aplicabile în schimb criterii ale radicalului. Un exemplu în acest sens este seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$. Deoarece termenul general este $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$, urmează că $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} \cdot \frac{1}{2}$, de unde

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{2} > 1; \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{6} < 1,$$

deci criteriul raportului cu limite extreme nu este aplicabil. Totuşi, $\frac{1}{2^n} \leq x_n \leq \frac{3}{2^n}$, de unde $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} < 1$, conform criteriului cleştelui. De aici, criteriul radicalului cu limită (şi de fapt şi cel cu limite extreme) este aplicabil, iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$ este convergentă. Se poate deci concluziona faptul că sus-menţionatele criterii ale radicalului au o arie de aplicabilitate mai largă decât criteriile corespunzătoare ale raportului.

3.1.5 Criteriul Raabe-Duhamel

Diversele variante are criteriului Raabe-Duhamel, menţionate în cele ce urmează, sunt în general utilizate atunci când aplicarea criteriul raportului conduce la un caz de dubiu. Vom prezenta mai întâi *criteriul Raabe-Duhamel cu inegalităţi*; a se remarca faptul că utilizarea raportului inversat ($\frac{x_n}{x_{n+1}}$, în contrast cu raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ utilizat în cadrul criteriului raportului) conduce la obţinerea unor situaţii inverse de convergenţă faţă de cele obţinute în criteriul raportului, respectiv „$\geq q > 1$" pentru convergenţă (în loc de „$\leq q < 1$" pentru criteriul raportului) şi „≤ 1" pentru divergenţă (în loc de „≥ 1" pentru criteriul raportului).

Teorema 3.18. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă există $q > 1$ şi $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*
$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*
$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Se poate obţine atunci următorul *criteriu Raabe-Duhamel cu limite extreme*.

Teorema 3.19. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă* $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq 1 \geq \liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limite extreme.*

În situaţia în care există limita $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi limitele $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$, $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$. În plus, au loc egalităţile
$$\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l.$$
Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul Raabe-Duhamel cu limită*.

Corolar 3.19.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăţi:

1. *Dacă* $l > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*
3. *Dacă* $l = 1$, *atunci natura seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limită.*

Exerciţiu. Demonstraţi că seria armonică generalizată $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$, respectiv divergentă pentru $p < 1$.

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{n^p}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p.$$

Concluzia urmează atunci conform criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

Exerciţiu. Studiaţi convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$.

Soluţie. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$, de unde

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+2)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+2)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}.
\end{aligned}$$

Urmează că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, deci aplicarea criteriul raportului conduce la un caz de dubiu. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria dată este divergentă.

3.2 Serii cu termeni oarecare

Comparativ cu situaţia seriilor cu termenilor pozitivi, pentru care studiul convergenţei se reduce la studiul mărginirii şirului sumelor parţiale, deoarece monotonia acestuia este asigurată *a priori*, situaţia seriilor cu termeni oarecare este mult mai complicată, întrucât această cale de abordare se pierde, şirul sumelor parţiale nemaifiind monoton. În concluzie, nici criteriile de convergenţă obţinute anterior (criteriile de comparaţie, ale raportului şi radicalului, ş. a. m. d.) nu mai sunt valabile.

Principala strategie de demonstrare a convergenţei seriilor cu termeni oarecare va fi acum scrierea termenului general ca un produs de doi factori, construirea seriei care are ca termen general unul din factori şi a şirului care are ca termen general pe cel de-al doilea factor şi determinarea unor proprietăţi de convergenţă, monotonie şi mărginire pentru acestea care vor conduce la convergenţa seriei iniţiale. În situaţia în care seria care are ca termen general modulului termenului general al seriei iniţiale este convergentă, convergenţa seriei iniţiale se va obţine din convergenţa acesteia din urmă; desigur, convergenţa celei de-a doua serii este mult mai simplu de obţinut, fiind vorba despre o serie cu termeni pozitivi. În fine, pentru cazul particular al seriilor alternante, convergenţa acestora se poate obţine demonstrând monotonia şirului obţinut prin eliminarea factorului alternant.

3.2.1 Criteriul lui Dirichlet

În situaţia în care $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie nu neapărat convergentă, dar cu şirul sumelor parţiale mărginit, înmulţirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui şir cu valori „mici" (monoton descrescător şi convergent la 0) „îmbunătăţeşte" convergenţa seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Dirichlet*.

Teorema 3.20. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie cu şirul sumelor parţiale mărginit, iar* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0*, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ *este convergentă.*

Exerciţiu. Demonstraţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Mai întâi, fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Fie $(S_n)_{n\geq 1}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

$$S_n = \sin 0x + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

Să observăm că

$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{2|\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

dacă $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ (adică $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), respectiv

$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = |0 + 0 + \ldots + 0| = 0,$$

dacă $\sin \frac{x}{2} = 0$ (adică $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), deci în orice caz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit . Cum $(y_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, urmează concluzia.

3.2.2 Criteriul lui Abel

Dacă se porneşte de această dată de la o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, înmulţirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui şir cu proprietăţi suficient de bune (i.e. monoton şi mărginit) păstrează convergenţa seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este de asemenea convergentă. Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Abel*.

Teorema 3.21. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie convergentă, iar $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton şi mărginit, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.*

Exerciţiu. Demonstraţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n}$ este convergentă.

Soluţie. Observăm mai întâi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos(\frac{1}{n}).$$

A fost deja demonstrat că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$, deci, pentru $x = 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ este convergentă. Cum şirul $(y_n)_{n\geq 1}$: $y_n = \frac{1}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, luând valori între 0 şi 1, iar funcţia cosinus este descrescătoare pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, urmează că $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. În plus, $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, deoarece funcţia cosinus este mărginită. Urmează că seria din enunţ este convergentă, conform criteriului lui Abel.

3.2.3 Serii alternante. Criteriul Leibniz

Pentru cazul particular al seriilor alternante, se poate observa cu ajutorul criteriului lui Dirichlet că pornindu-se de la seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, cu şirul sumelor parţiale mărginit, prin înmulţirea termenului general $(-1)^n$ cu termenul general y_n al unui şir cu valori monoton descrescător şi convergent la 0 se obţine o serie convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *criteriul lui Leibniz*.

Teorema 3.22. *Dacă* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0*, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Deoarece $S_{2k} = 1$, $S_{2k+1} = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ este convergentă. ■

Exerciţiu. Demonstraţi că seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă.

Soluţie. Se observă că

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+2}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Atunci şi seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, fiind obţinută prin înmulţirea seriei convergente $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ cu constanta -1.

Monotonia unor subşiruri ale şirului sumelor parţiale

Să presupunem acum că $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ este o serie alternantă, în condiţiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz, adică $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton descrescător şi convergent la 0. Fie deasemenea $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$. Se observă atunci că $(S_{2k})_{k\geq 0}$ este monoton descrescător iar $(S_{2k+1})_{k\geq 0}$ este monoton crescător. În plus, are loc relaţia

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

Într-adevăr,

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = (-1)^{2k+1} a_{2k+1} + (-1)^{2k+2} a_{2k+2} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$$

deci $(S_{2k})_{k\geq 0}$ este monoton descrescător. Similar,

$$S_{2(k+1)+1} - S_{2k+1} = (-1)^{2k+2} a_{2k+2} + (-1)^{2k+3} a_{2k+3} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0,$$

deci $(S_{2k+1})_{k\geq 0}$ este monoton crescător. Deoarece orice termen al unui şir crescător este mai mic sau egal cu limita şirului, respectiv orice termen al unui şir descrescător este mai mare sau egal cu limita şirului, urmează că

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

3.2.4 Serii absolut convergente

Cu ajutorul criteriului lui Leibniz, se poate observă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă. Totuşi, seria asociată a modulelor, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. În acelaşi timp, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este convergentă, iar seria asociată a modulelor, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este de asemenea convergentă.

Aceste exemple sugerează o posibilă clasificare a seriilor convergente în serii pentru care seria asociată a modulelor este convergentă, respectiv divergentă. În acest sens, o serie convergentă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă se va numi *absolut convergentă*, în vreme ce o serie convergentă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este divergentă se va numi *condiţionat convergentă* sau *semiconvergentă*. Din cele de mai sus, se observă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este absolut convergentă, în vreme ce seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este convergentă (este condiţionat convergentă, sau semiconvergentă).

Se observă de asemenea că pentru serii cu termeni pozitivi noţiunile de convergenţă şi absolută convergenţă coincid, deoarece modulul unui număr pozitiv este chiar numărul în cauză. În general, pentru serii cu termeni oarecare, convergenţa nu implică absolută convergenţă, după cum se poate deduce din exemplul seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de mai sus. Totuşi, are loc implicaţia inversă, în sensul că orice serie absolut convergentă este convergentă.

Teorema 3.23. *Dacă o serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă.*

Deoarece seria modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este o serie cu termeni pozitivi, pentru studierea convergenţei acesteia se pot utiliza criteriile de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi stabilite anterior. Acest lucru sugerează faptul că se poate obţine convergenţa unei serii cu termeni oarecare demonstrând mai întâi convergenţa seriei modulelor cu ajutorul unui criteriu oarecare de convergenţă, convergenţa seriei date fiind atunci o consecinţă a absolutei ei convergenţe.

Exerciţiu. Studiaţi absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Cum

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$, urmează că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|$ este convergentă, conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi. De aici, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ este absolut convergentă.

Exerciţiu. Studiaţi absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Soluţie. Deoarece
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$
iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nu este absolut convergentă. Ea este doar convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

3.2.5 Produsul după Cauchy a două serii

Fie seriile cu termeni oarecare $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Vom numi *seria produs după Cauchy* a celor două serii seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ definită prin
$$c_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \ldots + x_n y_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k},$$
pentru care c_n, termenul de ordin n, conţine suma tuturor produselor de forma $x_k y_l$ în care suma indicilor celor doi factori x_k şi y_l este n.

Se observă că, definită în acest mod, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ conţine într-adevăr toate produsele de forma $x_k y_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, câte o singură dată, un astfel de produs fiind un termen al sumei prin care este definit c_{k+l} şi numai al acesteia.

Totuşi, acest procedeu de sumare nu asigură proprietatea de păstrare a convergenţei a două serii. Mai precis, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt două serii convergente, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nu este neapărat convergentă. În acest sens, să considerăm exemplul seriilor
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \ \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \ \text{cu } x_n = y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 0.$$
În primul rând, se observă cu ajutorul criteriului lui Leibniz că aceste serii sunt convergente. În plus,
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Cum
$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \sqrt{(n+1)(n+1)} = n+1,$$
urmează că
$$|c_n| = \left|(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}\right| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1,$$
deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ este divergentă, întrucât termenul general c_n nu tinde la 0.

Totuşi, convergenţa seriei produs după Cauchy este asigurată dacă măcar una dintre cele două serii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este absolut convergentă. În acest sens, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Mertens*.

Teorema 3.24. *Dacă seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, măcar una dintre ele fiind şi absolut convergentă, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este şi ea convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii, adică*
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

În situaţia în care se îmbunătăţeşte convergenţa seriilor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$, în sensul că ambele serii sunt asumate a fi absolut convergente, se îmbunătăţeşte şi convergenţa seriei produs după Cauchy, în sensul că seria produs devine şi ea absolut convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Cauchy*.

Teorema 3.25. *Dacă seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt absolut convergente, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este şi ea absolut convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

Cum pentru cazul seriilor cu termeni pozitivi proprietăţile de convergenţă şi absolută convergenţă coincid, are loc următoarea consecinţă.

Corolar 3.25.1. *Dacă seriile cu termeni pozitivi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, atunci şi seria produs după Cauchy a celor două serii este convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

În fine, în situaţia în care $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ şi seria produs după Cauchy a celor două serii $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sunt toate convergente, acest lucru este suficient pentru a arăta că suma seriei produs este produsul sumelor celor două serii. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Abel*.

Teorema 3.26. *Dacă seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, cu* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$, *iar seria produs după Cauchy a celor două serii* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *este de asemenea convergentă, cu* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$, *atunci* $C = AB$.

3.3 Estimarea restului de ordin p

Din punct de vedere practic, pentru calculul aproximativ al sumei unei serii convergente, este important să se cunoască o estimare a restului de ordin p al seriei, această estimare reprezintând de fapt o estimare a erorii cu care S_p, suma parţială de ordin p, aproximează suma S a seriei.

Pentru serii cu termeni pozitivi, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condiţiile de aplicare ale criteriului radicalului, respectiv criteriului raportului.

Teorema 3.27. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Dacă*

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci
$$0 \leq R_p \leq \frac{q^{p+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

Demonstraţie. Se observă că

$$R_p = x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots \geq 0 \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Deoarece $\sqrt[n]{x_n} \leq q$ pentru orice $n \geq N$, urmează că $x_n \leq q^n$ pentru orice $n \geq N$. Atunci

$$\begin{aligned}
R_p &= x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots \\
&\leq q^{p+1} + q^{p+2} + \ldots \\
&\leq q^{p+1}(1 + q + q^2 + \ldots) \\
&\leq \frac{q^{p+1}}{1-q}, \quad \text{pentru orice } p \geq N,
\end{aligned}$$

de unde concluzia. ∎

Teorema 3.28. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Dacă*
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
atunci
$$0 \leq R_p \leq x_N \frac{q^{p-N+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

Pentru serii alternante, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condiţiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz.

Teorema 3.29. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ *o serie alternantă, unde* $(y_n)_{n \geq 0}$ *este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0*. Atunci*
$$|R_p| \leq y_{p+1} \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Aplicaţii

3.1. *Determinaţi sumele următoarelor serii folosind formula de sumare a progresiei geometrice*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{7^n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^{2n}}$;
5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{[3+(-1)^n]^n}$.

3.2. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!}, \quad n \geq 0,$$

determinaţi suma seriei telescopice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

3.3. *Ţinând seama de relaţia*

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{n+1} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n}, \quad n \geq 1,$$

determinaţi suma seriei telescopice $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

3.4. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1,$$

determinaţi suma seriei telescopice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3.5. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}, \quad n \geq 1,$$

determinaţi suma seriei telescopice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

3.6. *Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{1+3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{5}-1\right)$;
5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e^n+2)}{n}$; 7) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n)$.

3.7. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, $x_0 \in (0,1)$.

1. *Demonstraţi că* $x_n \in (0,1)$ *pentru orice* $n \geq 0$.
2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict descrescător.*
3. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
4. *Demonstraţi că seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă.*

3.8. *Demonstraţi că nu există şiruri* $(x_n)_{n\geq 0}$ *astfel ca seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (|x_n-2|+|3-x_n|)$ *să fie convergentă.*

3.9. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Demonstraţi, folosind eventual criteriul de convergenţă Cauchy, că dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă, rezultă neapărat că* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă?*

3.10. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie convergentă cu termeni strict pozitivi. Demonstraţi că seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_n+x_{n+1}}{2}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_{n+1}}}$ *sunt de asemenea convergente.*

3.11. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului de condensare*
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n(\ln n)^2}$.

3.12. *Demonstraţi cu ajutorul criteriului de condensare că seria* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ *este convergentă dacă* $p > 1$*, respectiv divergentă dacă* $p \leq 1$.

3.13. 1. *Determinaţi* $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$;

2. *Studiaţi convergenţa seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}$*, folosind eventual un criteriu de comparaţie.*

3.14. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparaţie*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin n}{n}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;
5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+(-1)^n)^2}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+4}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+n+2}$;
9) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)^2$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\frac{3}{n}}}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$;
13) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{2n}+1}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$.

3.15. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al raportului*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$;
9) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3}-\sqrt[3]{3})(\sqrt{3}-\sqrt[5]{3})\ldots(\sqrt{3}-\sqrt[2n+1]{3})$.

3.16. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al radicalului*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n+2}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{n\ln n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{n^2}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$;
9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$; 12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3n+5)^n}$;
13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{n+1}}{(2n+3)^n}$; 14) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^n$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)^n$.

3.17. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}{4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 4n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\ldots(3+\sqrt{n})}$;

3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{3n+2}{3n+1}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 6n}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)} \cdot \frac{1}{2^n+1}$.

3.18. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrilor $a > 0$ şi $p \in \mathbb{R}$*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a\frac{n^2-n+2}{n^2}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+a^2+\ldots+a^n)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\ldots(na+1)}{n^n}$; 7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$.

3.19. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrilor $a, b > 0$*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+(n-1))}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+(n-1))}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n+b^n}$.

3.20. *Discutaţi convergenţa seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$ *în funcţie de valorile parametrilor $a, b, c, d > 0$.*

3.21. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Dirichlet*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{\ln(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{\ln(n+2)}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)\sin 2n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos x}{n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n^3}$; 10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \sin n^2}{\sqrt[4]{n}}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$;

13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \sin nx \cos nx$, $n \in \mathbb{R}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sin(n+\frac{1}{2})$.

3.22. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Abel*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \sin \frac{1}{n}$; *2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \sqrt[n]{n}$; *4)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} n$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$; *6)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+2}} \sin \frac{1}{n}$; *7)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{n}$.

3.23. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; *2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n + \ln n}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{3} - 1)$; *4)* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}$;
5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{6^n}$; *6)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$; *7)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+3)}}$; *8)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \ln^2 n}$;
9) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+3} \left(\frac{3n+2}{6n+1}\right)^n$.

3.24. *Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente*
1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + \cos n}$; *2)* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2^n + 3)}{\ln(3^n + 2)}$; *3)* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+4)}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$.

3.25. *Studiaţi convergenţa absolută a următoarelor serii*
1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + n + 1}$; *2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{n\sqrt{n}}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{n \ln^2 n}$; *4)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2n^2 + \sin n}$; *6)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(-1)^n}}{n^2 + (-1)^n}$.

3.26. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$.*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{a+1}}$; *2)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + 2^n}$; *4)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n} + 1}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - an)$; *6)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a+3}{2a+1}\right)^n$; *7)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n + \sqrt{n}}$.

3.27. *Demonstraţi că seria* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$*, unde*

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

este divergentă.