Capitolul 2

ŞIRURI DE NUMERE REALE

2.1 Proprietăţi generale

Fie $A \neq \emptyset$ o mulţime dată. Se numeşte *şir de elemente din* A o funcţie $f : \mathbb{N} \to A$. Dacă $A = \mathbb{R}$, şirul respectiv se va numi *şir de numere reale*, *şir numeric* sau, mai simplu, *şir*. Fiind dat un şir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, se vor numi *termeni ai şirului* numerele $f(0), f(1), f(2), \ldots$, notate de obicei cu ajutorul unui indice sub forma

$$f(0) = x_0,\ f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ \ldots,\ f(n) = x_n,\ \ldots,$$

x_n numindu-se *termenul general al şirului*, sau *termenul de rang* n. Un şir cu termenul general x_n se va nota şi $(x_n)_{n\geq 0}$. Dacă primii k termeni $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nu sunt definiţi (ceea ce corespunde unei funcţii $f : \{k, k+1, \ldots\} \to \mathbb{R}$), vom nota şirul sub forma $(x_n)_{n\geq k}$.

2.1.1 Moduri de definire a unui şir

Un şir poate fi definit precizând formula termenului general, prin intermediul unei recurenţe sau în mod descriptiv.

Exemple. *Şiruri definite prin formula termenului general:*

$(x_n)_{n\geq 0} : x_n = 3n + 1; \qquad x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 7, \ldots$

$$(x_n)_{n\geq 0} : x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}; \qquad x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots.$$

Şiruri definite prin intermediul unei recurenţe

Dacă pentru un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ se cunosc primii k termeni $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, fiind dată de asemenea o relaţie prin care termenul general x_n se exprimă în funcţie de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}$ pentru orice $n \geq k$, se spune că $(x_n)_{n\geq 0}$ este definit printr-o *recurenţă de ordinul k.*

Şiruri definite în mod descriptiv.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, x_n=*aproximarea prin lipsa cu n zecimale exacte a lui* $\sqrt{2}$ este definit în mod descriptiv. Se obţine că $x_1 = 1.4$, $x_2 = 1.41$, $x_3 = 1.414$, ş.a.m.d.

Progresii aritmetice

Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin recurenţa de ordinul întâi dată de

$$x_0 = a \text{ şi } x_{n+1} = x_n + r,\ n \geq 0,$$

a şi $r \in \mathbb{R}$ fiind date, se numeşte *progresie aritmetică*, r numindu-se *raţia progresiei* (din orice termen al şirului se obţine termenul care-l succede prin adăugirea raţiei). Se obţine că formula termenului general este $x_n = a + nr$, $n \geq 0$, iar $x_m = x_n + (m-n)r$, $m, n \geq 0$. De asemenea, suma primilor $n+1$ termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &= a + (a+r) + \ldots + (a+nr) \\ &= (n+1)a + (r + 2r + \ldots + nr) \\ &= (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}r. \end{aligned}$$

Din cele de mai sus, se observă şi că

$$S_n = \frac{n(a_0 + a_n)}{2}.$$

Progresii geometrice

Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin recurenţa de ordinul întâi dată de

$$x_0 = b \text{ şi } x_{n+1} = x_n q,\ n \geq 0,$$

b şi $q \in \mathbb{R}$ fiind date, se numeşte *progresie geometrică*, q numindu-se *raţia progresiei* (din orice termen al şirului se obţine termenul care-l succede prin înmulţirea cu raţia). Se obţine că formula termenului general este $x_n = bq^n$, $n \geq 0$, iar $x_m = x_n q^{m-n}$, $m, n \geq 0$. De asemenea, suma primilor $n+1$ termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &= b + bq + \ldots bq^n \\ &= b(1 + q + \ldots + q^n) \\ &= b\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \text{ dacă } q \neq 1, \end{aligned}$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = (n+1)b$.

Exerciţiu. Determinaţi termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin

$$1)\ x_{n+1} = 2x_n - 1, n \geq 0,\ x_0 = 2; \quad 2)\ x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, n \geq 0,\ x_0 = 1.$$

Soluţie. 1) Relaţia de recurenţă este asemănătoare celei care defineşte o progresie geometrică, diferenţa fiind dată de prezenţa termenului liber -1. Acest termen liber va fi eliminat prin scăderea a două relaţii de recurenţă scrise pentru indici succesivi.

Punând $n = 0$ în relaţia de recurenţă se obţine că $x_1 = 3$. Scriind relaţia de recurenţă pentru $n = k+1$, respectiv $n = k$, şi scăzând cele două relaţii obţinute se deduce că $x_{k+2} - x_{k+1} = 2(x_{k+1} - x_k)$. Notând $y_n = x_{n+1} - x_n$, observăm că $y_{k+1} = 2y_k$, deci $(y_k)_{k\geq 0}$ este o progresie geometrică cu raţie 2. Deoarece $y_0 = x_1 - x_0 = 1$, se deduce că $y_n = y_0 2^n = 2^n$.

Cum $y_k = x_{k+1} - x_k$, urmează că $x_{k+1} - x_k = 2^k$. Punând succesiv $k = 0, k = 1, \ldots, k = n-1$ şi sumând relaţiile obţinute deducem că

$$x_n - x_0 = 1 + 2 + \ldots + 2^n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1,$$

deci $x_n = x_0 + 2^n - 1 = 2^n + 1$.

Similar, putem determina $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $(x_n + c)_{n\geq 0}$ să fie progresie geometrică. În acest scop, adunăm mai întâi c în ambii membri ai relaţiei de recurenţă. Obţinem că

$$x_{n+1} + c = 2x_n - 1 + c = 2(x_n + \frac{c-1}{2}).$$

În concluzie, pentru $c = \frac{c-1}{2}$, adică pentru $c = -1$, urmează că $(x_n + c)_{n\geq 0}$ este progresie geometrică de raţie 2. De aici,

$$x_n - 1 = 2^n(x_0 - 1) = 2^n,$$

de unde $x_n = 2^n + 1$.

2) Punând $n = 0$ în relaţia de recurenţă se obţine că $x_1 = \sqrt{3}$. Prin logaritmarea relaţiei de recurenţă se obţine că

$$\ln x_{n+1} = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln x_{n+1}.$$

Cu notaţia $z_n = \ln x_n$, se obţine că $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2}\ln 3$, $z_1 = \ln x_1 = \frac{1}{2}\ln 3$, $z_0 = \ln x_0 = 0$.

Scriind relaţia de recurenţă pentru $n = k+1$, respectiv $n = k$, şi scăzând cele două relaţii obţinute se deduce că $z_{k+2} - z_{k+1} = \frac{1}{2}(z_{k+1} - z_k)$. Notând $y_n = z_{n+1} - z_n$, observăm că $y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k$, deci $(y_k)_{k\geq 0}$ este o progresie geometrică cu raţie $\frac{1}{2}$. Deoarece $y_0 = z_1 - z_0 = \frac{1}{2}\ln 3$, se deduce că $y_n = y_0\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}\ln 3$.

Cum $y_k = z_{k+1} - z_k$, urmează că $z_{k+1} - z_k = \frac{1}{2^{k+1}}\ln 3$. Punând succesiv $k = 0, k = 1, \ldots, k = n-1$ şi sumând relaţiile obţinute deducem că

$$\begin{aligned} z_n - z_0 &= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2^2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{2^n}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 3\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 3\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\ln 3. \end{aligned}$$

deci $z_n = z_0 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\ln 3 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\ln 3$. Cum $z_n = \ln x_n$, urmează că

$$x_n = e^{z_n} = e^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\ln 3} = e^{\ln 3^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}} = 3^{1-\frac{1}{2^n}}.$$

2.1.2 Subşiruri ale unui şir dat

Numim *subşir* al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ ai cărui termeni sunt elemente ale mulţimii termenilor şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, cu $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots$.

Cum un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ nu conţine neapărat toţi termenii şirului iniţial $(x_n)_{n\geq 0}$, urmează că $k_n \geq n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$. Atunci subşirul $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$ se numeşte *subşirul termenilor de rang par ai şirului*. Subşirul $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n+1}, \ldots$ se numeşte *subşirul termenilor de rang impar ai şirului*. Un alt subşir este $(x_{n+3})_{n\geq 0}$: $x_3, x_4, x_5, \ldots$, obţinut prin eliminarea primilor trei termeni ai şirului.

Cum pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ putem construi şirul $(x_{kn})_{n\geq 0}$: $x_0, x_k, x_{2k}, \ldots, x_{kn}, \ldots$

al termenilor de rang divizibil cu k, urmează că orice şir are o infinitate de subşiruri.

2.1.3 Şiruri mărginite

Fie un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale şi $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ mulţimea termenilor săi. Vom spune că $(x_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *mărginit* dacă A este mărginită, respectiv că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *mărginit superior* (respectiv *mărginit inferior*) dacă A este majorată (respectiv minorată). Un şir care nu este mărginit (respectiv nu este mărginit superior sau nu este mărginit inferior) se numeşte *nemărginit* (respectiv *nemărginit superior* sau *nemărginit inferior*).

Conform caracterizării mulţimilor mărginite, aplicată mulţimii A a termenilor şirului, se obţin următoarele proprietăţi.

Teorema 2.1. *Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$.*

1. *$(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior dacă şi numai dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_n \leq b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

2. *$(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior dacă şi numai dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

3. *$(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \leq x_n \leq b$ pentru orice $n \geq 0$, ceea ce este echivalent cu faptul că există $M > 0$ astfel ca $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple.

1. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \sin\frac{n\pi}{3}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \frac{n}{3^n}$ este mărginit, deoarece conform inegalităţii lui Bernoulli, $3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n$, deci $\frac{n}{3^n} < \frac{1}{2}$. Se obţine că $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

4. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = (-1)^n n$ nu este mărginit, nefiind nici mărginit inferior,

nici mărginit superior.

Aplicând operatorul de negaţie logică afirmaţiilor din teorema de mai sus obţinem următoarea teoremă de caracterizare a şirurilor nemărginite.

Teorema 2.2. *Fie şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 0}$.

1. $(x_n)_{n\geq 0}$ *este nemărginit superior dacă şi numai dacă pentru orice* $b \in \mathbb{R}$ *există un rang* $n_b \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $x_{n_b} > b$.
2. $(x_n)_{n\geq 0}$ *este nemărginit inferior dacă şi numai dacă pentru orice* $a \in \mathbb{R}$ *există un rang* $n_a \in \mathbb{N}$ *astfel ca* $x_{n_a} < a$.

2.1.4 Şiruri monotone

Fie un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *crescător* (respectiv *strict crescător*) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al şirului este mai mic (respectiv strict mai mic) decât termenul care-i succede.

De asemenea, spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *descrescător* (respectiv *strict descrescător*) dacă $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al şirului este mai mare (respectiv strict mai mare) decât termenul care-i succede.

Un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ crescător sau descrescător se va numi şir *monoton*, iar un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ strict crescător sau strict descrescător se va numi şir *strict monoton*. Desigur, orice şir strict monoton este şi monoton; nu şi reciproc.

Pentru a preciza monotonia unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ se pot folosi următoarele metode.

Studierea semnului diferenţei $x_{n+1} - x_n$.

- Dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător.
- Dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător.

Compararea raportului $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ *cu 1, dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este un şir cu termeni strict pozitivi.*

- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător.
- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător.

Folosind inegalităţi stricte în locul inegalităţilor nestricte se obţin criteriile corespunzătoare de monotonie strictă.

Legătura între monotonia şi mărginirea unui şir

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir crescător, atunci

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots,$$

deci $x_0 \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior de primul termen x_0.

Similar, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir descrescător, atunci

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots,$$

deci $x_0 \geq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior de primul termen x_0. Au loc atunci următoarele proprietăţi.

Teorema 2.3. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir.*

1. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător, atunci el este mărginit inferior.*
2. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, atunci el este mărginit superior.*

2.2 Şiruri cu limită

Noţiunea de limită a unui şir este unul dintre cele mai importante concepte ale analizei matematice, precizând tendinţa termenilor unui şir de a se apropia de un anumit număr (cazul şirurilor cu limită finită), sau de a deveni oricât de mari, respectiv oricât de mici (cazul şirurilor cu limită infinită).

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ *are limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai şirului, adică există un rang $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$ (altfel spus, vecinătatea V conţine toţi termenii şirului de la rangul n_V încolo). În acest caz, vom nota $x_n \to l$ *pentru* $n \to \infty$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, spunându-se şi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ (sau termenul său general x_n) *tinde* la l.

Se poate observa că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai şirului nu-i schimbă acestuia natura de a avea sau nu limită şi nici limita, dacă aceasta există, putându-se modifica doar rangul începând cu care termenii şirului aparţin unei vecinătăţi date.

Exemple. 1. Un şir constant $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, este convergent la c, întrucât orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(c)$ conţine toţi termenii şirului.

2. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n$ are limita $+\infty$. Pentru a demonstra acest lucru, observăm că orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ conţine un interval de forma $(M_V, +\infty]$. Fie $n_V = [M_V] + 1$. Atunci $n_V > M$, deci $x_{n_V} \in (M, +\infty] \subseteq V$. Analog, $x_n \in V$ pentru orice $n > n_V$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$.

3. În mod asemănător se poate demonstra că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = -n$ are limita $-\infty$.

Unicitatea limitei unui şir

În cele ce urmează, se va observa mai întâi că limita unui şir, dacă există, este unică.

Teorema 2.4. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $l_1 = l_2$.*

Subşiruri ale unui şir cu limită

Este uşor de observat că proprietăţile de monotonie şi mărginire se transmit de la un şir către subşirurile sale. Astfel, dacă un şir este monoton, orice subşir al său este de asemenea monoton, cu acelaşi sens de monotonie, iar dacă un şir este mărginit, orice subşir al său este de asemenea mărginit, mulţimea termenilor subşirului fiind inclusă în mulţimea (mărginită) a termenilor şirului. Pe aceeaşi linie de gândire, proprietatea unui şir de a avea limită se transmite de asemenea către subşirurile sale.

Teorema 2.5. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al său are aceeaşi limită.*

Condiţie suficientă ca un şir să nu aibă limită

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are două subşiruri care tind la limite diferite, atunci el nu are limită, deoarece dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ ar avea limita l, atunci şi cele două subşiruri ar avea aceeaşi limită l.

Exemplu. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu are limită, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 1$ şi subşirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$.

2.2.1 Şiruri convergente

Un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ cu limită finită l se numeşte *şir convergent*, spunându-se şi că $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent către l*. Orice şir care nu este convergent se numeşte *divergent*.

În acest sens, şirurile divergente pot fi deci şiruri cu limită infinită sau şiruri fără limită. În plus, orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită ca şi şirul iniţial, conform Teoremei 2.5. De aici, dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir cu limită infinită, sau două subşiruri cu limite diferite, atunci el este divergent.

Exemplu. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}n$ este divergent, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 2n$ are limita $+\infty$.

Caracterizarea analitică a limitei unui şir

Definiţia cu vecinătăţi a limitei unui şir, deşi utilă teoretic, este greu de verificat sau folosit în aplicaţii. Vom prezenta în cele ce urmează câteva caracterizări echivalente cu un pronunţat aspect numeric, utile pentru demonstrarea unor proprietăţi verificabile practic. Mai întâi, este abordată situaţia şirurilor convergente.

Teorema 2.6. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent către l dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.*

De fapt, proprietatea din enunţul Teoremei 2.6 este echivalentă cu proprietatea de definiţie a şirurilor convergente, putând fi folosită în locul acesteia pentru definirea noţiunii de şir convergent.

Exerciţiu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2n+5}{n+2}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Soluţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Au loc relaţiile

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$$

cu condiţia ca

$$\frac{1}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

Atunci

$$n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon} - 2] + 1 = [\frac{1}{\varepsilon}] - 1,$$

iar pentru $n \geq n_\varepsilon$, $|x_n - 2| < \varepsilon$, de unde $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Exerciţiu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere întregi. Arătaţi că $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant de la un rang încolo.

Soluţie. Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{4}$, există $n_\varepsilon \in N$ astfel ca $|x_n - l| < \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, deci $x_n \in (l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Cum intervalul $(l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$ are lungime $\frac{1}{2}$, el nu poate conţine decât un singur număr întreg, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant începând cu rangul n_ε, termenii săi fiind egali cu numărul întreg respectiv.

Şiruri cu limită infinită (1)

În continuare, este abordată situaţia şirurilor cu limită infinită, observându-se că şirurile cu limita $+\infty$ au termeni „oricât de mari" de la un rang încolo, respectiv şirurile cu limita $-\infty$ au termeni „oricât de mici" de la un rang încolo.

Teorema 2.7. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci*

1. *$(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$.*

2. *$(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n < -M$ pentru orice $n \geq n_M$.*

Exerciţiu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n^2+2n+3}{n+1}$. Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Soluţie. Fie $M > 0$ arbitrar. Au loc relaţiile

$$x_n = n + 1 + \frac{2}{n+1} > M$$

cu condiţia ca

$$n + 1 > M \Leftrightarrow n > M - 1.$$

Atunci $n_M = [M-1]+1 = [M]$, iar pentru $n \geq n_M$, $x_n > M$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Şiruri cu limita 0

În aceste condiţii, studiul şirurilor convergente cărora le este cunoscută limita poate fi redus la studiul unor şiruri convergente la 0, observându-se că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $l \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă diferenţa dintre şir şi limita sa tinde la 0; acesta este doar un alt fel de a spune că termenii unui şir convergent devin „apropiaţi" de limita şirului de la un rang încolo.

Teorema 2.8. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - l) = 0$.*

Demonstraţie. Conform teoremei de caracterizare a şirurilor convergente (Teorema 2.6),

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = l &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |x_n - l| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |(x_n - l) - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - l) = 0.\end{aligned}$$

■

Proprietatea de păstrare a semnului

Se poate observa că termenii unui şir cu limită au, cu excepţia eventuală a unui număr finit dintre ei, acelaşi semn cu limita şirului.

Teorema 2.9. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Dacă $l > 0$, atunci toţi termenii şirului sunt strict pozitivi de la un rang încolo.*
2. *Dacă $l < 0$, atunci toţi termenii şirului sunt strict negativi de la un rang încolo.*
3. *Dacă $l \neq 0$, atunci toţi termenii şirului sunt nenuli de la un rang încolo.*

Şiruri cu limită infinită (2)

Teorema 2.10. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$*), atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$*, iar* $x_n > 0$ *(respectiv* $x_n < 0$*) de la un rang încolo, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$ *(respectiv* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$*).*

Rezulatele teoremei de mai sus pot fi prezentate sub forma prescurtată

$$\frac{\mathbf{1}}{+\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{1}}{-\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}+} = +\infty, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}-} = -\infty.$$

Cu ajutorul Teoremei 2.6, se poate acum obţine următorul rezultat frecvent folosit în aplicaţii.

Teorema 2.11. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton crescător de numere reale care este nemărginit superior. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Cu un raţionament asemănător, se poate demonstra şi următoarea teoremă complementară celei de mai sus.

Teorema 2.12. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton descrescător de numere reale care este nemărginit inferior. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Exemple. Pentru $k \in (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Pentru $q > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Pentru $q \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (deoarece $p = \frac{1}{q} > 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} (= \lim\limits_{n\to\infty} q^n) = 0$).

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} = 0$.

Criterii de majorare-minorare

Conform teoremei anterioare, pentru a arăta că limita unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferenţa dintre termenii şirului şi limita acestuia. Teorema următoare afirmă faptul că dacă această diferenţă poate fi estimată potrivit, cu valori din ce în ce mai mici (α_n de mai jos poate fi înţeles ca o eroare de aproximare), atunci într-adevăr şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita l.

Teorema 2.13. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Dacă există un şir $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de numere reale pozitive şi un rang oarecare $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$|x_n - l| \leq \alpha_n \text{ pentru orice } n \geq n_0, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0, urmează că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. De aici, $|x_n - l| \leq \alpha_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq \max(n_0, n_\varepsilon)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. ■

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Soluţie. Are loc relaţia

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+1}, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = n+1$ este un şir crescător şi nemărginit superior. De aici, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{\sin n}{n}$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Au loc relaţiile

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n}, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Se va observa acum că dacă termenii unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ pot fi minoraţi cu termeni „oricât de mari" ai unui şir $(a_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mari" (i.e. $(x_n)_{n\geq 0}$ are tot limita $+\infty$). De asemenea, dacă termenii unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ pot fi majoraţi cu termeni „oricât de mici" ai unui şir $(b_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $(b_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mici" (i.e. $(x_n)_{n\geq 0}$ are tot limita $-\infty$).

Teorema 2.14. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.*

1. *Dacă există un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi un rang $n_a \in N$ astfel ca $a_n \leq x_n$ pentru orice $n \geq n_a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*
2. *Dacă există un şir de numere reale $(b_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ şi un rang $n_b \in N$ astfel ca $x_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq n_b$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.*

Demonstraţie. 1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi fie $M > 0$ arbitrar. Există atunci un rang n_M astfel ca $a_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$. De aici, $x_n \geq a_n > M$ pentru orice $n \geq \max(n_a, n_M)$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Demonstraţia celei de-a două proprietăţi este asemănătoare. ■

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n + (-1)^n$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Soluţie. Are loc inegalitatea $x_n \geq n - 1$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = \infty$, de unde concluzia.

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Soluţie. Mai întâi, să observăm că

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \text{ pentru orice } k \geq 1,$$

deci, prin sumare după k de la 1 la n,

$$x_n > 2(\sqrt{n+1}-1) \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar cum $\lim\limits_{n\to\infty} 2(\sqrt{n+1}-1) = \infty$, urmează concluzia.

Şiruri conţinând funcţia modul

Prezentăm în continuare câteva consecinţe ale Teoremei 2.13, exprimând faptul că funcţia modul păstrează convergenţa şirurilor.

Teorema 2.15. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale. Atunci*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, *iar* $l \in \mathbb{R}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |l|$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.
3. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Se va observa că reciproca primei afirmaţii nu este adevărată. În acest sens, fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $|x_n| \to 1$ pentru $n \to \infty$, dar $(x_n)_{n\geq 0}$ nu are limită. În plus, afirmaţiile 2. şi 3. pot fi cumulate sub forma

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

De asemenea, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, cu un raţionament asemănător celui de mai sus.

Limita şirului $(q^n)_{n\geq 0}$

Din cele de mai sus, se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

Acest lucru a fost observat deja pentru $q \in (0, 1)$, conform Teoremei 2.11. Pentru $q \in (-1, 0)$, $|q^n| = |q|^n$, iar $|q| \in (0, 1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, conform celei de-a treia proprietăţi de mai sus. În fine, proprietatea este evidentă pentru $q = 0$.

Fie acum $q \in (-\infty, -1)$. Cum $q^{2n} \to \infty$ iar $q^{2n+1} \to -\infty$, urmează că nu există $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$. Se observă în mod analog ca nu există $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ nici pentru $q = -1$.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu există}, & \text{dacă } q \leq -1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}.$$

2.2.2 Proprietăţi ale şirurilor cu limită

Teorema ce urmează, numită şi *teorema de trecere la limită în inegalităţi* exprimă faptul că inegalităţile (nestricte) dintre termenii a două şiruri se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 2.16. *Fie două şiruri* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *cu proprietăţile*

1. *Există un rang* n_0 *astfel ca* $x_n \leq y_n$ *pentru* $n \geq n_0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $x \leq y$.

Inegalităţile nestricte dintre termenii a două şiruri nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1}{n+2}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+1}$, pentru care $x_n < y_n$ pentru orice $n \geq 0$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Teorema de mai jos, numită şi *teorema cleştelui*, ne permite să calculăm limita unui şir care poate fi încadrat între alte două şiruri având aceeaşi limită.

Teorema 2.17. *Fie trei şiruri de numere reale* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *cu proprietăţile*

1. *Există un rang* n_0 *astfel ca* $a_n \leq x_n \leq b_n$ *pentru* $n \geq n_0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *iar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie. Observăm că dintre cei n termeni conţinuţi în suma care defineşte x_n, $\frac{1}{n^2+n}$ este cel mai mic, iar $\frac{1}{n^2+1}$ este cel mai mare. Urmează că $n \cdot \frac{1}{n^2+n} \leq x_n \leq n \cdot \frac{1}{n^2+1}$, deci

$$\frac{1}{n+1} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n},$$

iar deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, urmează că de asemenea $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $(x_n)_{n\geq 1}$ fiind încadrat între şirurile $(\frac{1}{n+1})_{n\geq 1}$, $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ cu limita 0.

2.2.3 Relaţii între convergenţă, monotonie şi mărginire

În cele ce urmează, vom studia relaţiile dintre proprietăţile de monotonie, mărginire şi convergenţă.

Teorema 2.18. *Orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Punând $\varepsilon = 1$ în Teorema 2.6, obţinem că există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < 1$ pentru orice $n \geq n_1$, sau $l - 1 < x_n < l + 1$ pentru orice $n \geq n_1$. Pentru a obţine inegalităţi valabile şi pentru $x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}$, observăm că, pentru orice $n \geq 0$,

$$\min(x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}, l-1) \leq x_n \leq \max(x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}, l+1)$$

deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

Teorema 2.19. *Orice şir nemărginit este divergent.*

Demonstraţie. Se aplică operatorul de negaţie logică propoziţiei de mai sus. ■

Exemple. 1. *Nu orice şir mărginit este convergent.*
Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu este convergent, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 1$ şi subşirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$. În schimb, $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$.

2. *Nu orice şir convergent este monoton.*
Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ este convergent la 0, deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$, iar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât şi negative.

3. *Nu orice şir monoton este mărginit.*
Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = 2n + 1$ este monoton, dar nu este mărginit, fiind nemărginit superior.

4. *Nu orice şir mărginit este monoton.*
   Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ este mărginit, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât şi negative.

Teorema 2.20. *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Din cele de mai sus, se observă de asemenea că toţi termenii unui şir monoton crescător şi mărginit superior $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt mai mici sau egali cu valoarea l a limitei şirului. Similar, toţi termenii unui şir monoton descrescător şi mărginit inferior $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt mai mari sau egali cu valoarea limitei şirului.

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Arătaţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluţie. Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit. În acest scop, să observăm că, deoarece $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci şi mărginit inferior. De asemenea, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$, deci

$$x_n < \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2,$$

iar $(x_n)_{n\geq 1}$ este şi mărginit superior. Fiind monoton şi mărginit, $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Combinând Teorema 2.11, Teorema 2.12 şi Teorema 2.20, obţinem următorul rezultat, care precizează existenţa limitei unui şir monoton.

Teorema 2.21. *Orice şir monoton $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită, finită sau nu.*

2.2.4 Operaţii cu şiruri convergente

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unor şiruri de a fi convergente se păstrează după efectuarea operaţiilor uzuale de sumă, diferenţă, produs cu o constantă, produs termen cu termen, iar în anumite condiţii se păstrează şi după efectuarea inverselor sau a raportului termen cu termen.

Teorema 2.22. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri convergente de numere reale astfel ca* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. *Atunci şirul sumă* $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$, *şirul produs cu o constantă* $(cx_n)_{n\geq 0}$, $c \in \mathbb{R}$, *şi şirul produs* $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ *sunt convergente, iar dacă* $x \neq 0$ *şi* $x_n \neq 0$ *pentru orice* $n \geq 0$, *atunci şi şirul inverselor* $(\frac{1}{x_n})_{n\geq 0}$ *este convergent. În plus, au loc relaţiile*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x + y$
(limita sumei este egală cu suma limitelor).

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = cx$
(operaţia de înmulţire cu o constantă comută cu operaţia de calculare a limitei).

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = xy$
(limita produsului este egală cu produsul limitelor).

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x}$, *dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$
(limita inverselor este egală cu inversa limitei).

Exerciţiu. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Soluţie. Mai întâi, se observă că $x_1 = -\frac{1}{2} < x_0$. În plus,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n - 1 - \frac{1}{2}x_{n-1} + 1 = \frac{1}{2}\left(x_n - x_{n-1}\right),$$

deci

$$\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}\left(x_n - x_{n-1}\right) = \ldots = \operatorname{sgn}(x_1 - x_0).$$

Cum $x_1 < x_0$, urmează că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, deci şi mărginit superior de $x_0 = 1$.

Deoarece $x_{n+1} < x_n$, urmează că $x_n > \frac{1}{2}x_n - 1$, deci $x_n > -2$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este şi mărginit inferior. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. Fie l limita sa; atunci şirul $(\frac{1}{2}x_n)_{n\geq 0}$ are limita $\frac{1}{2}l$, iar şirul $(x_{n+1})_{n\geq 0}$ are tot limita l. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem că $l = \frac{1}{2}l - 1$, deci $l = -2$.

Proprietăţile de mai sus se pot extinde în mod asemănător la operaţii cu un număr mai mare (dar constant) de şiruri. De exemplu, dacă $(x_n^1)_{n\geq 0}$, $(x_n^2)_{n\geq 0}, \ldots$,

$(x_n^k)_{n\geq 0}$ sunt şiruri convergente, cu limitele respectiv $l_1, l_2, \ldots, l_k$, atunci şirul sumă $(x_n^1 + x_n^2 + \ldots + x_n^k)_{n\geq 0}$ este convergent, iar

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^1 + x_n^2 + \ldots + x_n^k\right) = \lim_{n\to\infty} x_n^1 + \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \ldots + \lim_{n\to\infty} x_n^k.$$

Cazul operaţiilor cu un număr variabil de şiruri trebuie tratat cu atenţie, aşa cum se observă din următorul exemplu

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \ldots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

diferenţa provenind din faptul că paranteza $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}\right)$ conţine un număr de n şiruri, n fiind variabil.

Teorema 2.23. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci şirul diferenţă $(x_n - y_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar dacă $y \neq 0$ şi $y_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci şi şirul raport $(\frac{x_n}{y_n})_{n\geq 0}$ este convergent. În plus, au loc relaţiile*

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = x - y$
   (limita diferenţei este egală cu diferenţa limitelor).

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{x}{y}$, *dacă* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$
   (limita raportului este egală cu raportul limitelor).

Demonstraţie. 1. Deoarece $x_n - y_n = x_n + (-1)y_n$, iar $((-1)y_n)_{n\geq 0}$ este convergent cu limita $-y$ (din Teorema 2.22), urmează că

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty}((-1)y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2. Ca mai sus, şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este bine definit, cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni. Deoarece $(\frac{1}{y_n})_{n\geq 0}$ este convergent cu limita $\frac{1}{y}$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

■

Se poate demonstra de asemenea următorul rezultat.

Teorema 2.24. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$, $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci şirul putere $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$ este convergent. În plus, are loc relaţia*

$\lim_{n\to\infty}(x_n^{y_n}) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ *(limita puterii se distribuie atât bazei şi exponentului).*

Alegând şirurile constante $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, respectiv $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, se obţine următoarea consecinţă a teoremei de mai sus.

Corolar 2.24.1. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere reale astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$, $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Atunci*

1. $\lim_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k = x^k$ *(limita puterii este egală cu puterea limitei).*
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} x_n} = \sqrt[p]{x}$ *(limita radicalului este egală cu radicalul limitei).*

Analizăm acum cazul în care $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita 0.

Teorema 2.25. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere reale strict pozitive astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ şi fie $(y_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere reale astfel ca $\lim_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$. Atunci*

1. *Dacă $y > 0$, atunci $\lim_{n\to\infty}(x_n^{y_n}) = 0$.*
2. *Dacă $y < 0$, atunci $\lim_{n\to\infty}(x_n^{y_n}) = +\infty$.*

Consideraţii asemănătoare se pot formula în cazul în care $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent de numere reale strict negative cu limita 0, sau măcar conţine termeni negativi, cu rezerva ca $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$ trebuie mai întâi sa fie bine definit. De exemplu, pentru $x_n = -\frac{1}{n}$ şi $y_n = \frac{1}{2n}$, $x_n^{y_n} = \sqrt[2n]{-\frac{1}{n}}$ nu este definit pentru nicio valoare a lui n.

Totuşi, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ au ambele limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa şirului $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$, spunându-se că 0^0 este un *caz de nedeterminare*. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă $x_n = \frac{1}{2^n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

- Dacă $x_n = \frac{1}{2^{n^2}}$, $y_n = -\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^n \to +\infty$.
- Dacă $x_n = \frac{1}{2^n}$, $y_n = -\frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$ nici măcar nu are limită.

2.2.5 Operaţii cu şiruri cu limită infinită

Teorema 2.26. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty$.*
2. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty$.*

Rezutatul Teoremei 2.26 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\infty + \mathbf{c} = \infty, \quad \infty + \infty = \infty,$$
$$-\infty + \mathbf{c} = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \mathbf{c} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.27. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.*
2. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.*
3. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.*
4. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.*

Rezutatul Teoremei 2.27 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\mathbf{c.p.} \cdot +\infty = +\infty, \quad \mathbf{c.n.} \cdot +\infty = -\infty,$$
$$\mathbf{c.p.} \cdot -\infty = -\infty, \quad \mathbf{c.n.} \cdot -\infty = +\infty,$$

unde prin **c.p.** şi **c.p.** înţelegem „constantă reală strict pozitivă" şi respectiv „constantă reală strict negativă".

Teorema 2.28. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
3. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
4. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Rezutatul Teoremei 2.28 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\frac{\infty}{\mathbf{c.p.}} = \infty, \quad \frac{\infty}{\mathbf{c.n.}} = -\infty,$$
$$\frac{-\infty}{\mathbf{c.p.}} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{\mathbf{c.n.}} = \infty.$$

Teorema 2.29. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.*
Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \{-\infty, +\infty\}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Rezutatul Teoremei 2.29 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\frac{\mathbf{c}}{\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{c}}{\infty} = \mathbf{0}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.30. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = +\infty$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

Rezutatul Teoremei 2.30 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\infty^{\mathbf{c.p.}} = \infty, \quad \infty^{\mathbf{c.n.}} = \mathbf{0}.$$

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita ∞ iar $(y_n)_{n\geq 0}$ are limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa şirului $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$, spunându-se că ∞^0 este un *caz de nedeterminare*. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2 \to 2$.
- Dacă $x_n = 2^{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^n \to +\infty$.
- Dacă $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$ nici măcar nu are limită.

În general, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa produsului dintre un şir convergent şi un alt şir care nu are neapărat limită. Totuşi, sub ipoteze adiţionale, are loc următorul rezultat.

Teorema 2.31. *Produsul dintre un şir mărginit $(x_n)_{n\geq 0}$ şi un şir $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent la 0 este un şir convergent la 0.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, există $M > 0$ astfel că $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent la 0, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0. ■

Exemplu. Dacă $(y_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0, atunci $((-1)^n y_n)_{n\geq 0}$ este de asemenea convergent la 0.

Demonstraţie. Este suficient să alegem $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$, care este mărginit. ■

2.2.6 Calculul unor limite fundamentale

Limitele funcţiilor polinomiale

Fie P o funcţie polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = P(n)$. Pentru calculul limitei şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se va scoate factor comun forţat n^k (k = grad P). Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^k \left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right)$$
$$= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}.$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{n\to\infty} a_k n^k = \infty \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui $P(n)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P.*

Exemple. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^3 - 2n^2 + n - 1\right) = +\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^3 este pozitiv.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^4 + 3n^3 - \sqrt{2}n + 5) = -\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^4 este negativ

Limitele funcţiilor raţionale

Fie P, Q două funcţii polinomiale de grad k, respectiv l, unde $k, l \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0,$$
$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, presupunând că $Q(n) \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$. Pentru calculul limitei şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se va scoate factor comun forţat n^k de la numărător ($k = \text{grad}\, P$), respectiv n^l de la numitor ($l = \text{grad}\, Q$). Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_1\frac{1}{n^{k-1}} + a_0\frac{1}{n^k}\right)}{n^l \left(b_l + b_{l-1}\frac{1}{n} + \ldots + b_1\frac{1}{n^{l-1}} + b_0\frac{1}{n^l}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^{k-l}\frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty\frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}.$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n\to\infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P şi Q.*

De asemenea, dacă $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$, deci *dacă gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, atunci limita lui* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este 0.*

Dacă $\operatorname{grad} P = \operatorname{grad} Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k}{b_l}$, deci *dacă gradul numitorului este egal cu gradul numărătorului, atunci limita lui* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este raportul coeficienţilor termenilor dominanţi.*

Dacă $\operatorname{grad} P > \operatorname{grad} Q$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = +\infty \frac{a_k}{b_l}$, deci *dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, atunci limita lui* $\frac{P(n)}{Q(n)}$ *este* $+\infty$ *dacă coeficienţii termenilor dominanţi au acelaşi semn, respectiv* $-\infty$ *dacă coeficienţii termenilor dominanţi au semne opuse.*

Exemple. 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 6n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2})}{n^2(3 + 6\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})} = \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 4n^2 - n + 2}{2n^2 - 3n + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1 + 4\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3})}{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 7\frac{1}{n^2})} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3n - 6}{n^3 + 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(5 + 3\frac{1}{n} - \frac{6}{n^2})}{n^3(1 + 4\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = 0 \cdot 5 = 0.$$

Subşiruri ale şirurilor mărginite şi nemărginite

A fost deja observat că nu orice şir monoton este convergent. Totuşi, cu ajutorul teoremei de convergenţă a şirurilor monotone, putem arăta că din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent, acest lucru reprezentând obiectul următorului rezultat, numit şi *Lema lui Césaro*.

Teorema 2.32. *Orice şir mărginit $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir convergent.*

În mod asemănător, putem observa că şirurile nemărginite conţin subşiruri cu limită infinită.

Teorema 2.33. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir.*

1. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, atunci el conţine un subşir cu limita $+\infty$.*

2. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci el conţine un subşir cu limita $-\infty$.*

2.2.7 Puncte limită ale unui şir

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir dat. Vom numi *mulţimea punctelor limită* ale şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$, mulţimea tuturor limitelor de subşiruri ale lui $(x_n)_{n\geq 0}$.

Mai întâi se observă că mulţimea punctelor limită ale unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ dat este totdeauna nevidă. Mai precis, dacă şirul este mărginit, atunci el conţine un subşir convergent (Teorema 2.32), cu o limită oarecare l, iar în această situaţie $l \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$. Dacă şirul este nemărginit superior (respectiv superior), atunci $+\infty \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$ (respectiv $-\infty \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$), conform Teoremei 2.33.

Exemplu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n = \{-1, 1\}$. În acest scop, se observă că orice subşir cu limită (care este în mod necesar finită, deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit) $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant de la un rang încolo, fiind un şir convergent de numere întregi. Fiind constant de la un rang încolo, termenii săi sunt toţi egali cu 1 sau -1 începând cu acel rang, iar $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ poate avea fie limita 1, fie limita -1.

Conform definiţiei, se pot observa următoarele proprietăţi.

1. Dacă o infinitate de termeni ai unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt egali cu un acelaşi număr real x, atunci putem construi un subşir convergent la x cu termenii în cauză, deci $x \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$.

2. Dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita l, finită sau nu, atunci $l \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$, pe post de subşir convergent la l putând lua chiar şirul $(x_n)_{n\geq 0}$.

3. Există şiruri care au o infinitate de puncte limită. De exemplu, pentru

$$(x_n)_{n\geq 0} : 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots,$$

orice număr natural este punct limită, întrucât $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine toate numerele naturale, repetate de o infinitate de ori.

4. Dacă $l \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$, atunci orice vecinătate V a lui l conţine o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, deoarece există un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ care este convergent la l şi deci V conţine toţi termenii subşirului $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ de la un rang încolo.

Teorema 2.34. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă şi numai dacă $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$ se reduce la un singur element.*

Limita superioară şi limita inferioară a unui şir

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi fie şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$a_n = \inf_{k\geq n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$
$$b_n = \sup_{k\geq n} x_k = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Cum $\{x_{n+1}, \ldots\} \subseteq \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, urmează că $a_n \leq a_{n+1}$ şi $b_n \geq b_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător, iar $(b_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător. Cum $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt monotone, ele admit limite. De asemenea, se observă că $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$.

Vom numi atunci *limită superioară* a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\limsup_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$, limita şirului $(b_n)_{n\geq 0}$. Similar, vom numi *limită inferioară* a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\liminf_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$, limita şirului $(a_n)_{n\geq 0}$. Deoarece $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Exemplu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = 2\sin\frac{n\pi}{3} + (-1)^n$. Pentru $n = 6k$, $k \geq 0$, urmează că $x_{6k} = \sin(2k\pi) + 1 = 1$. Similar, $x_{6k+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$, $x_{6k+2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $x_{6k+3} = -1$, $x_{6k+4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $x_{6k+5} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. Cum fiecare dintre aceste subşiruri este convergent, fiind constant, urmează că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_n \leq M$ pentru orice $n \geq 0$. Urmează că de asemenea $b_n \leq M$ pentru orice $n \geq 0$, deci $\limsup_{n\to\infty} x_n (= \lim_{n\to\infty} b_n)$ este finită. Similar, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior, atunci $\liminf_{n\to\infty} x_n$ este finită. De asemenea, conform Teoremei 2.33, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, atunci $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$, iar dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Fie acum $l \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$. Există atunci un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = l$. Cum

$$\inf_{l\geq k_n} x_l \leq x_{k_n} \leq \sup_{l\geq k_n} x_l \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

urmează că

$$a_{k_n} \leq x_{k_n} \leq b_{k_n} \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

iar trecând la limită în aceste inegalităţi obţinem că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq l \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Mai mult, se poate demonstra că $\limsup_{n\to\infty} x_n \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$ şi $\limsup_{n\to\infty} x_n$ este cel mai mare punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Similar, $\liminf_{n\to\infty} x_n \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$ şi $\liminf_{n\to\infty} x_n$ este cel mai mic punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. În plus, deoarece

$$a_n = \inf_{k\geq n} x_k \geq \inf_{k\geq 0} x_k, \quad b_n = \sup_{k\geq n} x_k \leq \sup_{k\geq 0} x_k,$$

urmează că

$$\inf_{k\geq 0} x_k \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \sup_{k\geq 0} x_k,$$

deci $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$ este cuprinsă între marginea inferioară şi marginea superioară a termenilor şirului. Teorema 2.34 se poate reformula atunci sub forma următoare.

Teorema 2.35. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă* *şi numai dacă* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. *În această situaţie,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Exemplul următor indică faptul că, dat fiind un şir $(x_n)_{n\geq 0}$, nu trebuie confundată $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ cu $\sup\limits_{n\geq 0} x_n$ şi nici $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ cu $\inf\limits_{n\geq 0} x_n$. Acest lucru este dealtfel evident din faptul că $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, fiind puncte limită, nu sunt influenţate de valorile primilor termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, pe când $\sup\limits_{n\geq 0} x_n$ şi $\inf\limits_{n\geq 0} x_n$ sunt.

Exemplu. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$. Atunci $x_{2n} = \frac{2n+2}{2n+1}$, care este strict descrescător cu limita 1, iar $x_{2n+1} = -\frac{2n+4}{2n+3}$, care este strict crescător, cu limita -1. Atunci

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -1, \quad \sup_{n\geq 0} x_n = x_0 = 2, \quad \inf_{n\geq 0} x_n = x_1 = -\frac{3}{2}.$$

Totuşi, $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ reţin unele proprietăţi de mărginire caracteristice $\sup\limits_{n\geq 0} x_n$ şi $\inf\limits_{n\geq 0} x_n$, chiar dacă într-o formă mai slabă. Aceste proprietăţi sunt cuprinse în următorul rezultat. Reamintim că

$$x_n \leq \sup_{n\geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \quad x_n \geq \inf_{n\geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0.$$

Teorema 2.36. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir mărginit şi fie* $\varepsilon > 0$. *Atunci*

1. *Există* $n^1_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel că* $x_n < \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ *pentru orice* $n \geq n^1_\varepsilon$.
2. *Există* $n^2_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel că* $x_n > \liminf\limits_{n\to\infty} x_n - \varepsilon$ *pentru orice* $n \geq n^2_\varepsilon$.

Cu un raţionament asemănător, folosind teoremele de caracterizare analitică a marginii superioare şi marginii inferioare a unei mulţimi, se poate demonstra că marginea superioară şi marginea inferioară a unei mulţimi mărginite se pot obţine ca limite de şiruri cu elemente din acea mulţime.

Teorema 2.37. *Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime mărginită. Există atunci două şiruri $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ de elemente din A astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf A$.*

2.2.8 Şiruri fundamentale (Cauchy)

În cazurile în care limita unui şir este dificit de intuit sau determinat numeric, poate fi util un criteriu de convergenţă care să nu facă apel la determinarea limitei şirului. Consideraţiile de mai jos permit demonstrarea convergenţei unui şir fără determinarea limitei acestuia.

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *şir fundamental*, sau *şir Cauchy*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$.

Echivalent, $(x_n)_{n\geq 0}$ este *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \geq 0$. Intuitiv, într-un şir Cauchy toţi termenii sunt apropiaţi unul de celălalt de la un rang încolo.

Teorema 2.38. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir Cauchy. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.*

În particular, fiind mărginit, orice şir Cauchy $(x_n)_{n\geq 0}$ admite un subşir convergent.

Teorema 2.39. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă este convergent.*

Exerciţiu. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este convergent.

Soluţie. Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este şir Cauchy. Să presupunem prin reducere la absurd că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy. Conform definiţiei şirului Cauchy, aplicată pentru $\varepsilon = \frac{1}{3}$, există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{3}$ pentru orice $m, n \geq n_1$. În particular, pentru $m = 2n$, urmează că

$$|x_n - x_{2n}| \leq \frac{1}{3} \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

De asemenea,

$$|x_n - x_{2n}| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

contradicţie. Urmează că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este şir Cauchy, deci nu este nici convergent.

Exerciţiu. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{2^n}$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluţie. Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy. Mai întâi, observăm că au loc inegalităţile

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\
&\leq \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. De aici,

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0.$$

Urmează că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, deci este convergent.

2.2.9 Criterii de convergenţă utilizând raportul $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

Prezentăm mai întâi o inegalitate între limitele unor şiruri de radicali, respectiv rapoarte, asociate unui şir cu termeni strict pozitivi.

Teorema 2.40. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Are loc inegalitatea*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Conform Teoremei 2.35, din rezultatul de mai sus se poate deduce imediat următorul criteriu de existenţă a limitei radicalului de ordin n al unui şir dat. În acest mod se poate reduce calculul unor limite care conţin radicali de ordin n la calculul unor limite de rapoarte, care pot fi mai simple decât cele dintâi.

Teorema 2.41. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.*

Exerciţiu. Demonstraţi că

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, unde $a > 0$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Soluţie. 1. Fie $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = a$. Atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a} = 1$, deci de asemenea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. Fie $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = n$. Atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, deci de asemenea $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Convergenţa şi divergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 0}$: $a_n = l^n$, pentru care raportul $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ are valoarea constantă $l \in [0, \infty)$, a fost discutată anterior. În cele ce urmează, vom observa că un şir cu termeni strict pozitivi $(x_n)_{n\geq 0}$ pentru care raportul $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ are limita l, fără a fi neapărat constant, are aceeaşi convergenţă sau divergenţă cu $(a_n)_{n\geq 0}$, cu excepţia eventuală a cazului în care $l = 1$.

Teorema 2.42. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci*

1. *Dacă $l \in [0, 1)$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*
2. *Dacă $l \in (1, \infty]$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*
3. *Dacă $l = 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul limitei raportului (spunem că este un caz de dubiu).*

Exerciţiu. Demonstraţi că

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, unde $a > 0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, unde $a > 1$, $k > 0$.

Soluţie. 1. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

deci de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n^k}{a^n}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \in (0,1),$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cea de-a doua proprietate poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcţia exponenţială creşte mai rapid către $+\infty$ decât funcţia putere.

Exerciţiu. Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}.$$

Soluţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n+2)\cdot(2n+4)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}}{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{3n+4} = \frac{2}{3} \in (0,1),$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.2.10 Teoremele Stolz-Césaro

Teoremele următoare, numite şi *Teoremele Stolz-Césaro*, sunt aplicabile limitelor de rapoarte de şiruri de forma $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, care pot fi reduse la calculul unor limite de rapoarte de şiruri de forma $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, posibil mai simple, mai ales dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ şi

$(b_n)_{n\geq 0}$ sunt definite cu ajutorul unor sume. Ele sunt denumite respectiv *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare* $\frac{0}{0}$ şi *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare* $\frac{\infty}{\infty}$ pentru a indica situaţiile uzuale de aplicabilitate, deşi pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ numai limita numitorului este cerută în mod explicit a fi $+\infty$.

Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 2.43. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale astfel încât*

1. *$(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.*
2. *Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Exerciţiu. Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}.$$

Soluţie. Fie

$$(a_n)_{n\geq 0} : a_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}$$
$$(b_n)_{n\geq 0} : b_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}$$

Deoarece $b_{n+1} - b_n = \sqrt{n} > 0$, urmează că $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Urmează că de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunţ este 0.

Exerciţiu. Fie $q \in (0,1)$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$.

Soluţie. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}.$$

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$: $a_n = n$, $(b_n)_{n\geq 0}$: $b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n$. Deoarece $\frac{1}{q} > 1$ iar $b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right) > 0$, urmează că $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right)} = 0.$$

Urmează că de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunţ este 0.

Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

Teorema 2.44. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale astfel încât*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. $(b_n)_{n\geq 0}$ *este strict descrescător şi* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
3. *Există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

2.2.11 Şiruri cu limita numărul *e*

Vom considera în continuare şirul $(x_n)_{n\geq 0} : x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, căruia îi vom demonstra convergenţa.

Teorema 2.45. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător şi mărginit.*

Demonstraţie. *Monotonie*

Folosind formula binomială, observăm că

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$

Cu acelaşi raţionament,

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!}.$$

Comparând factor cu factor, obţinem că

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right),$$

pentru orice $1 \leq k \leq n$, deci $x_n < x_{n+1}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

Mărginire

Observăm că

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!},$$

iar cum

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \geq 1 \cdot 2 \ldots \cdot 2 = 2^{k-1} \text{ pentru } k \geq 2,$$

obţinem că

$$x_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător, $x_n \geq x_1 = 2$ pentru orice $n \geq 1$. În concluzie

$$2 \leq x_n < 3 \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

Fiind monoton şi mărginit, $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Prin convenţie, se notează cu e limita sa, unde $e = 2.71828....$ ■

Din teorema de mai sus se obţine următoarea egalitate importantă

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

De asemenea, se observă că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n}{n-1}}$$
$$= e,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Teorema 2.46. *Şirul* $(y_n)_{n\geq 0}$*:* $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *este strict descrescător şi convergent la e.*

Demonstraţie. *Monotonie*

Pentru a demonstra că $(y_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, observăm că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} > \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Aplicând inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică numerelor 1, 1,. . . ,1, $\frac{n+1}{n+2}$, obţinem că

$$\sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n+2}} > \frac{n+1}{1+1+\ldots+1+\frac{n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2}.$$

Rămâne deci să demonstrăm că

$$\frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2} \geq \frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

ceea ce este imediat, deoarece

$$(n^2+2n+2)n(n+2) = [(n+1)^2+1][(n+1)^2-1] = (n+1)^4-1 < (n+1)^4.$$

Deoarece $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, el este mărginit superior de y_1. Conform inegalităţii lui Bernoulli,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{1}{n} > 2,$$

deci $(y_n)_{n\geq 1}$ este şi mărginit inferior. Cum $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. În plus

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. ■

Cum termenii unui şir strict crescător sunt strict mai mici decât valoarea limitei, respectiv termenii unui şir strict descrescător sunt strict mai mari decât valoarea limitei, obţinem din cele de mai sus că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

de unde, prin logaritmare

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Câteva consecinţe importante ale convergenţei şirurilor de mai sus, motivate de egalităţile deja obţinute, sunt indicate în cele ce urmează.

Teorema 2.47. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Fie $(p_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale strict pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$.*
2. *Fie $(m_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale strict negative cu $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = -\infty$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$.*
3. *Fie $(z_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule cu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (1+z_n)^{\frac{1}{z_n}} = e$.*

Exemple.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\frac{2}{2n-1}(n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n-1}} = e.$$

Aici,

$$(z_n)_{n\geq 1} : z_n = \frac{2}{2n-1} \to 0 \text{ pentru } n \to \infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{n+2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}}\right]^{\frac{-2n}{2n^2+n+1}(n+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2-4n}{2n^2+n+1}}$$
$$= e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Aici,

$$(z_n)_{n\geq 1} : z_n = \frac{2n}{2n^2+n+1} \to 0 \text{ pentru } n \to \infty.$$

Din Teorema 2.47 se pot deduce de asemenea şi următoarele proprietăţi.

Teorema 2.48. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale nenule cu* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. *Atunci*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$ *pentru orice* $a > 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+x_n)^k - 1}{x_n} = k$ *pentru orice* $k \in \mathbb{R}$.

Exerciţiu. Demonstraţi că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0, \quad k > 0.$$

Soluţie. Deoarece $k > 0$, şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = n^k$, este strict crescător cu limita $+\infty$. Aplicând atunci Teorema 2.43 obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)^k - n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1} \frac{\frac{1}{n}}{n^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1}{\frac{1}{n}}} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^k} = 1 \cdot \frac{1}{k} \cdot 0 = 0.$$

Proprietatea poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcţia putere creşte mai rapid către $+\infty$ decât funcţia logaritmică.

Exemple. 1.

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}}\right]^{\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{2} - 1) + (\sqrt[n]{3} - 1)}{2} n}$$

$$= e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right)\frac{1}{2}} = e^{(\ln 2 + \ln 3)\frac{1}{2}} = e^{\ln\sqrt{2\cdot 3}} = \sqrt{6}.$$

Un alt şir cu limita e

Fie acum şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Teorema 2.49. *Şirul $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent cu limita e.*

Demonstraţie. Cum $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $(e_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, deci $e_n \geq e_1 = 2$ pentru orice $n \geq 1$, iar conform inegalităţilor obţinute în Teorema 2.45, $e_n < 3$ pentru orice $n \geq 1$. În concluzie, $(e_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Fiind şi monoton, $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent; să notăm cu e' limita sa. Să notăm de asemenea $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Deoarece $x_n < e_n$, obţinem prin trecere la limită pentru $n \to \infty$ că $e \leq e'$.

Fie acum $1 \leq m < n$ fixat. Atunci

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ în relaţia de mai sus, obţinem că

$$e \leq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!},$$

adică $e \leq e_m$. Cum această egalitate este valabilă în fapt pentru orice m (restricţia $m < n$ se elimină prin alegerea de la început a unui n suficient de mare), prin trecere la limită se obţine că $e \leq e'$. Cum şi $e' \leq e$, urmează că $e = e'$, iar $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent tot la e. ■

Din cele de mai sus, se obţine următoarea egalitate

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Iraţionalitatea lui e

Teorema 2.50. *Numărul e este iraţional.*

Constanta lui Euler

Fie acum şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Teorema 2.51. *Şirul $(c_n)_{n\geq 0}$ este convergent.*

Demonstraţie. Vom demonstra că $(c_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit.

Monotonie

Observăm că

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

deci $(c_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător.

Mărginire

Cum $(c_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, el este mărginit superior. Observăm că

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k+1}, \text{ pentru } k \geq 1.$$

Sumând inegalităţile obţinute pentru $k = 1, k = 2, \ldots, k = n-1$ obţinem că

$$\ln n > \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \Leftrightarrow c_n < 1 \text{ pentru } n \geq 2,$$

Cum $(c_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. Prin convenţie, se notează cu γ limita sa, unde $\gamma = 0.57721....$ Numărul γ astfel definit se numeşte *constanta lui Euler*. ∎

Exerciţiu. Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

Soluţie. Au loc relaţiile

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln(2n)\right)$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2n - \ln n$$
$$= c_{2n} - c_n + \ln 2.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} c_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \gamma$, urmează că limita din enunţ este $\ln 2$.

Aplicaţii

2.1. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n+2}{2n+5}$. Precizaţi valorile lui n pentru care $|x_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{9}$.*

2.2. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_0 = \frac{4}{3}$.*

1. *Demonstraţi că $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2$.*
2. *Determinaţi expresia termenului general x_n.*
3. *Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

2.3. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^3+3n^2-n+5}{3n^3-2n^2+n-6}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln(n^2+2n+3) - \ln(3n^2+n-6)\right)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n+1)}{\ln(n^6+2n+3)}$.

2.4. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+3}\right)$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{5\cdot 2^{n+1}+3^{n+2}}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+n-1}{3n^2+2n+1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$; *4)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+0.5+0.5^2+\ldots+0.5^n}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}^2+\ldots+\frac{1}{3}^n}$; *5)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{n+1}-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{n+1}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^n-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^n}$.

2.5. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, determinaţi*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n+2}{2x_n+3}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{3x_n+1}$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n+3}{x_n^3+2}$.

2.6. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+(-1)^n}{2n+3}$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}}$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n} - n\right)$.

2.7. *Folosind eventual un criteriu de majorare-minorare, demonstraţi că*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1+2\sin 2+\ldots+n\sin n}{n^3} = 0$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n + n\sin\frac{n}{2}\right) = +\infty$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2 + [n]\cos\frac{n\pi}{3}\right) = -\infty$.

2.8. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$. *Demonstraţi că* $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *pentru orice* $n \geq 1$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.9. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$. *Demonstraţi că* $3 < x_n < 3\sqrt[n]{2}$ *pentru orice* $n \geq 2$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.10. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = \sqrt[n]{n}$. *Se notează* $x_n = 1 + \alpha_n$, $n \geq 2$. *Demonstraţi că* $0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.11. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}$. *Demonstraţi că* $1 < x_n < \sqrt[n]{n}^2$ *pentru orice* $n \geq 2$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.12. *Determinaţi*

1. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2n+1}{3n+2}, \dfrac{2n+5}{3n+1}\right]$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2n+1}{3n+2}, \dfrac{2n+5}{3n+1}\right]$;

2. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{3n+4}{4n+5}, \dfrac{3n+8}{4n+9}\right]$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{3n+4}{4n+5}, \dfrac{3n+8}{4n+9}\right]$.

2.13. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n+\sqrt{n}}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{n+\ln n}$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3\sqrt{n}+5}{2n+5}\right)^{\sqrt{n}}$.

2.14. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$.

2.15. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$.

2.16. *Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot (n+1)\cdot (n+2)}{n^2(n+1)^2}$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2.17. *Determinaţi* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *şi* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *în următoarele situaţii:*

1. $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n^2}}{n^2+1}$;

2. $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{\sin n^2}{n+1}$;

3. $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \arcsin(-1)^n + \arccos(-1)^{n+1} + \mathrm{arctg}(-1)^{n+2}$;

4. $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n \sin \frac{n\pi}{3}} + \left(\sqrt{n^2+3n+2} - \sqrt{n^2+2n+3}\right)^n$.

2.18. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = 2 + \frac{n}{n+2} \cos \frac{n\pi}{2}$. *Determinaţi* $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$.

2.19. *Fie*$(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere pozitive astfel încât* $\lim_{n\to\infty} x_n = l \neq 0$. *Atunci* $\limsup_{n\to\infty} x_n y_n = l \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$.

2.20. *Determinaţi valoarea limitei:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^1 \cdot e^2 \cdot \ldots \cdot e^n}{n}.$$

2.21. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 = 1$.

1. *Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$.

2. *Demonstraţi că şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

3. *Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinaţi* $\lim_{n\to\infty} n x_n$.

2.22. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 \in (1, 2)$.

1. *Demonstraţi că* $1 < x_n < 2$ *pentru orice* $n \geq 0$.

2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*

3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.23. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ radicali}}$.

1. *Determinaţi o relaţie de recurenţă verificată de termenii şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$.

2. *Demonstraţi că* $0 < x_n < 2$ *pentru orice* $n \geq 1$.

3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*

4. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.24. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 \in (0, 1)$.

1. *Demonstraţi că* $0 < x_n < 1$ *pentru orice* $n \geq 0$.

2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict descrescător.*

3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.25. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 > 0$.

1. *Demonstraţi că* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \geq 0$.

2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*

3. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2.26. *Determinaţi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

2.27. *Dacă un şir monoton* $(x_n)_{n\geq 0}$ *are un subşir convergent, atunci* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este de asemenea convergent.*

2.28. *Dacă un şir* $(x_n)_{n\geq 0}$ *are o infinitate de subşiruri convergente, rezultă că acesta este convergent?*

2.29. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir şi* $l \in \mathbb{R}$. *Dacă orice vecinătate* V *a lui* l *conţine o infinitate de termeni ai şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$, *rezultă că şirul are limita* l?

2.30. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2 + 4n + 3} - an - b\right) = 2.$$