Capitolul 4

INTEGRALE CURBILINII

Până în momentul de faţă, s-a presupus că reprezentarea geometrică a domeniului de integrare este o parte a unei drepte, anume un segment (pentru integralele definite şi unele integrale improprii), respectiv o semidreaptă sau o dreaptă (pentru alte integrale improprii). În cele ce urmează vom renunţa la această restricţie, domeniul de integrare fiind acum o curbă din plan sau din spaţiu. Desigur, este necesar să definim mai întâi conceptul, intuitiv evident, de curbă continuă.

4.1 Curbe în plan şi în spaţiu

4.1.1 Noţiuni de bază

Curbă continuă (drum continuu) în spaţiu

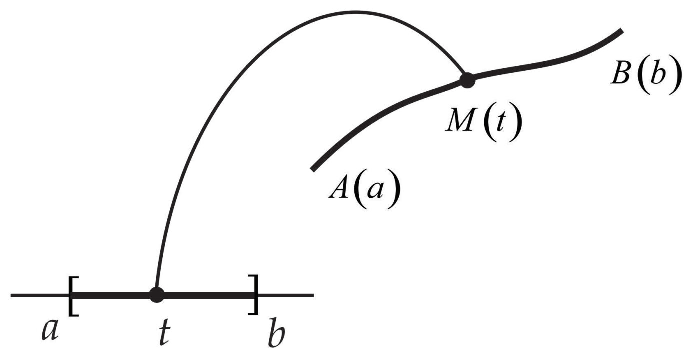
Numim **curbă continuă (drum continuu) în spaţiu** o mulţime de forma

$$(C) = \{(x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a,b],\ x, y, z \text{ continue pe } [a,b]\}.$$

Reprezentarea

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},\ t \in [a,b],$$

se numeşte **reprezentarea parametrică** a curbei (C), t numindu-se **parametrul** curbei. Poziţia unui punct M pe curbă se poate indica precizând valoarea parametrului care-i corespunde, sub forma $M = M(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$. O curbă în $\mathbb{R}^3$ se mai numeşte şi **curbă în spaţiu**.



În situaţia în care $x, y, z \in C^1[a, b]$ (funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt derivabile cu derivata continuă), se spune că (C) este o **curbă de clasă C^1 (un drum de clasă C^1)** sau o **curbă cu tangentă continuă (un drum cu tangentă continuă)**.

Dacă (C) nu se autointersectează, ea se numeşte **simplă**, iar dacă punctul iniţial $A(a)$ şi punctul final $B(b)$ coincid, curba se numeşte **închisă**.

Curbe plane

Similar se definesc noţiunile corespunzătoare pentru curbe în plan, reprezentarea parametrică fiind de această dată

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b].$$

Puncte critice

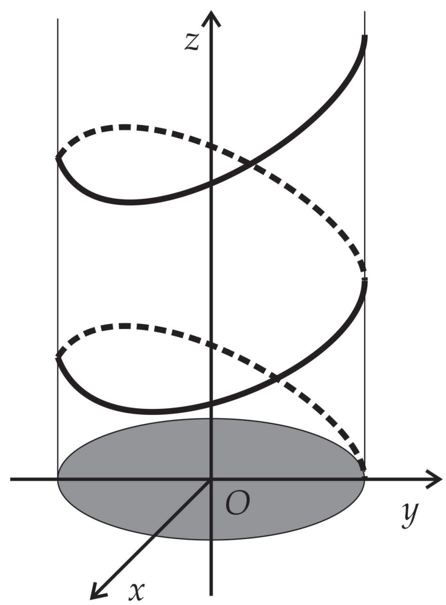
Fiind dată o curbă în spaţiu de clasă C^1, reprezentată parametric sub forma

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

vom spune că $M(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ este un **punct critic** al curbei (C) dacă $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$ (derivatele funcţiilor care definesc reprezentarea parametrică se anulează simultan). Un punct al unei curbe de clasă C^1 care nu este punct critic se numeşte **punct regulat**.

Curbă netedă

O curbă cu tangentă continuă şi fără puncte critice se numeşte **curbă netedă**. O curbă care nu este netedă, dar se poate scrie ca reuniunea unui număr finit de curbe netede se numeşte **curbă netedă pe porţiuni**.



Analog se definesc noţiunile corespunzătoare pentru curbe în plan.

Exemplu. Curba în spaţiu

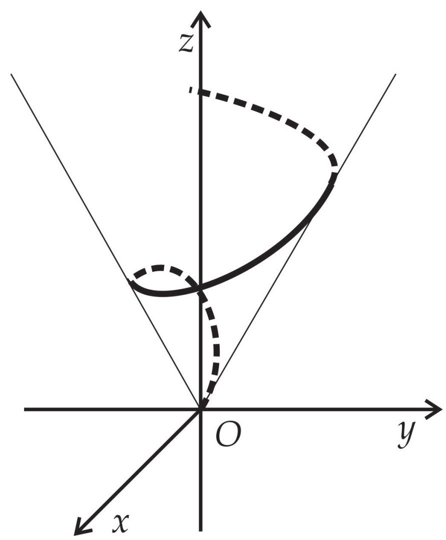
$$(C):\begin{cases} x = r\cos(kt) \\ y = r\sin(kt) \\ z = ct \end{cases},\ t \in [a,b],\ r,c,k \neq 0,$$

situată pe suprafaţa cilindrului $x^2 + y^2 = r^2$, se numeşte **elice cilindrică**. Cum funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt de clasă C^1, iar $z'(t) = c \neq 0$, elicea cilindrică este o curbă netedă.

Exemplu. Curba în spaţiu

$$(C):\begin{cases} x = rt\cos(kt) \\ y = rt\sin(kt) \\ z = ct \end{cases},\ t \in [a,b],\ r,c,k \neq 0,$$

situată pe suprafaţa conului $x^2 + y^2 - \frac{r^2}{c^2}z^2 = 0$, se numeşte **elice conică**. Cum funcţiile care definesc reprezentarea parametrică sunt de clasă C^1, iar $z'(t) = c \neq 0$, elicea conică este o curbă netedă.



Alte moduri de a defini o curbă în $\mathbb{R}^3$

Reprezentarea parametrică

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ , \ t \in [a, b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

este echivalentă cu

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

unde $\vec{r}(t)$ este vectorul de poziţie al punctului curent $M(t)$, numită **reprezentarea parametrică vectorială**. Curbele pot fi reprezentate şi în alte moduri, de exemplu ca intersecţia unor mulţimi (**reprezentarea implicită**), sau precizând valorile a două coordonate ca funcţie de cea de-a treia (**reprezentarea explicită**). Pentru consideraţiile următoare, cea mai „bună" reprezentare va fi cea parametrică.

Exemplu. Curba

$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \quad R > 0,$$

reprezintă un cerc, definit în mod implicit ca intersecţia dintre sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu centrul în origine şi cu rază R şi planul $x + y + z = 0$.

Curba definită explicit prin

$$(C): \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 3x + 2 \end{cases}, \quad x \in [0, 2],$$

reprezintă un segment al dreptei $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$, cu capetele în $A(0, 1, 2)$ şi $B(2, 5, 8)$.

Transformarea unei reprezentări explicite într-una parametrică

Să observăm că o reprezentare explicită a unei curbe poate fi transformată întotdeauna într-una parametrică alegându-se variabila în funcţie de care sunt reprezentate celelalte două ca parametru, iar o curbă de clasă C^1 definită explicit este întotdeauna netedă. Într-adevăr, dacă

$$(C): \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}, \quad x \in [a, b], \quad f, g \in C^1[a, b],$$

este o curbă de clasă C^1, atunci o reprezentare parametrică a ei este

$$(C): \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b],$$

iar $t' = 1 \neq 0$.

Orientarea unei curbe

Pe o curbă dată parametric se pot defini două **orientări (sensuri de parcurgere)**. Sensul pozitiv este cel al creşterii argumentului. În situaţia în care o curbă este definită prin consideraţii geometrice, reprezentarea parametrică fiind absentă, sensul pozitiv va fi cel trigonometric (un observator care se deplasează pe frontiera domeniului vede întotdeauna domeniul la stânga sa).

4.1.2 Lungimea unei curbe

Intuitiv, lungimea unei curbe continue s-ar putea defini ca limita lungimilor unui şir de linii frînte aproximante. Totuşi, ceea ce este poate mai puţin intuitiv este faptul că există curbe continue cu multe „salturi abrupte" şi, în consecinţă, cu lungime infinită. Astfel, formule de calcul ale lungimii vor putea fi obţinute doar pentru curbe cu proprietăţi mai mari de regularitate (netede pe porţiuni).

Aproximarea cu linii frânte

Fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă continuă în spaţiu şi fie

$$\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \quad \text{cu} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b,$$

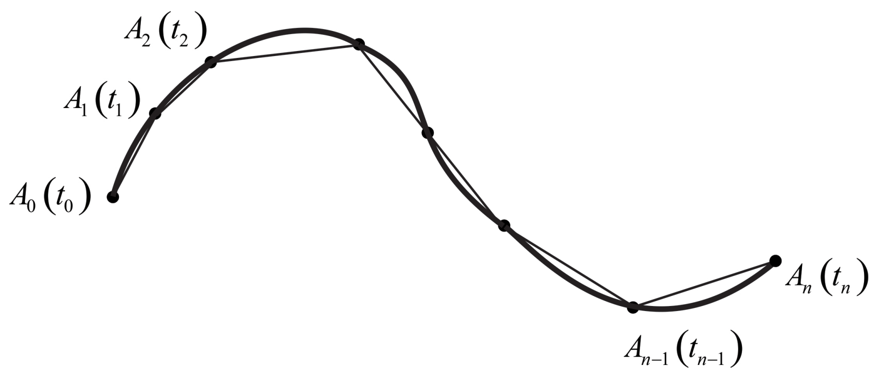
o diviziune a intervalului $[a,b]$, care determină pe (C) punctele

$$A_0(t_0),\ A_1(t_1),\ \ldots\ , A_n(t_n).$$

Lungimea liniei frânte corespunzătoare $f_\Delta = A_0 A_1 \ldots A_n$ este

$$l(f_\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2}.$$

Întrucât cea mai scurtă distanţă între punctele A_i şi A_{i+1} este linia dreaptă $A_i A_{i+1}$, nu arcul $\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$, intuitiv, lungimea liniei frânte este mai mică sau egală cu lungimea curbei (C).



Curbe rectificabile

Vom defini atunci lungimea $l(C)$ a curbei (C) ca fiind marginea superioară a mulţimii lungimilor linilor frânte de acest fel, spunând că (C) este **rectificabilă** dacă această lungime este finită.

Formula de calcul a lungimii unei curbe

Teorema 4.1. *Fie*

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă în spaţiu cu tangentă continuă. Atunci (C) *este rectificabilă, iar*

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

Conform proprietăţii de aditivitate a integralei definite în raport cu domeniul, formula de mai sus se poate extinde imediat şi pentru curbe cu tangentă continuă pe porţiuni.

Exemplu. Determinaţi lungimea curbei

$$(C): \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ct \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi], \ r > 0.$$

Soluţie. Au loc egalităţile

$$x'(t) = -r\sin t, \quad y'(t) = r\cos t, \quad z'(t) = c.$$

Atunci

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2 + [c]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + c^2} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2} dt = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}.$$

Se poate observa că elicea de mai sus are ca punct iniţial $A(r, 0, 0)$, iar ca punct final $B(r, 0, 2\pi c)$, cu aceleaşi valori ale coordonatelor x şi y, dar cu z diferit, între timp parametrul t parcurgând intervalul de periodicitate $[0, 2\pi]$ pentru cos şi sin. Putem spune că (C) este o **spiră** a unei elice de rază r şi **pas** $2\pi c$.

Formula de calcul a lungimii unei curbe plane

Similar, fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă plană cu tangentă continuă. Atunci

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

Formula de calcul pentru lungimea unei curbe definite în coordonate polare

Teorema 4.2. *Fie*

$$(C) : \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [a, b], \quad \rho \in C^1[a, b],$$

o curbă reprezentată în coordonate polare. Atunci

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}d\theta.$$

Demonstraţie. Aşa cum s-a observat anterior, lungimea curbei (C) este dată de formula

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}d\theta.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta \\ y'(\theta) &= \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta, \end{aligned}$$

urmează că

$$\begin{aligned} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} &= \sqrt{[\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta]^2 + [\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta]^2} \\ &= \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Exemplu. Determinaţi lungimea **spiralei lui Arhimede**

$$(C) = \{(\rho, \theta); \rho = a\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]\}, \quad a > 0.$$

Soluţie. Au loc relaţiile

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a\theta]^2 + [(a\theta)']^2}d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}d\theta.$$

Fie $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1}d\theta$. Atunci

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \theta' \sqrt{\theta^2+1}d\theta = \theta\sqrt{\theta^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \theta\left(\sqrt{\theta^2+1}\right)' d\theta \\
&= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \theta\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}d\theta = 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \frac{\theta^2+1-1}{\sqrt{\theta^2+1}}d\theta \\
&= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1}d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}d\theta \\
&= 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - I + \ln(\theta+\sqrt{\theta^2+1})\Big|_0^{2\pi},
\end{aligned}$$

de unde

$$I = \frac{1}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right],$$

iar

$$l(C) = \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

Alte detalii asupra coordonatelor polare sunt precizate în Capitolul 5.

4.1.3 Elementul de arc (elementul de lungime)

Elementul de lungime în spaţiu

Fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ ,\ t \in [a,b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

o curbă cu tangentă continuă. Definim $s : [a,b] \to [0,\infty)$ prin

$$s(t) = \text{ lungimea porţiunii din } (C) \text{ cu capetele } A(a) \text{ şi } M(t).$$

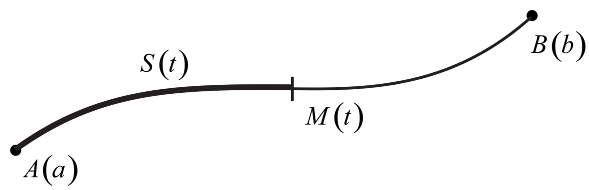
Conform celor de mai sus,

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2+[y'(u)]^2+[z'(u)]^2}du,$$

de unde, ţinând seama că $ds = s'(t)dt$,

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt.$$

Diferenţiala ds de mai sus poartă numele de **elementul de arc (elementul de lungime)** al curbei (C).



Elementul de lungime în plan (coordonate carteziene)

Similar, fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă plană cu tangentă continuă. Atunci

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Elementul de lungime în plan (coordonate polare)

Fie

$$(C): \begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}, \quad \theta \in [a, b], \quad \rho \in C^1[a, b],$$

o curbă reprezentată în coordonate polare. Atunci

$$ds = \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta.$$

4.2 Integrale curbilinii de specia (speţa) I

Reamintim că integrala Riemann a unei funcţii definite pe un interval a fost definită cu ajutorul unui procedeu de aproximare. Mai precis, dat fiind intervalul de integrare $[a, b]$, s-au construit diviziuni ale acestuia, în fiecare subinterval astfel determinat alegându-se câte un punct intermediar. Pe baza acestor elemente, s-au construit sume Riemann în care fiecare subinterval „contribuia" cu valoarea funcţiei în punctul intermediar, înmulţită cu lungimea subintervalului.

4.2.1 Definiţie

Vom folosi un procedeu asemănător pentru a defini noţiunea de integrală curbilinie de specia I. Fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$. Fie de asemenea

$$\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \quad \text{cu} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$, care determină pe (C) punctele

$$A_0(t_0),\ A_1(t_1), \ldots, A_n(t_n).$$

Pe fiecare arc de curbă $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}, \ldots, \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ alegem câte un punct intermediar

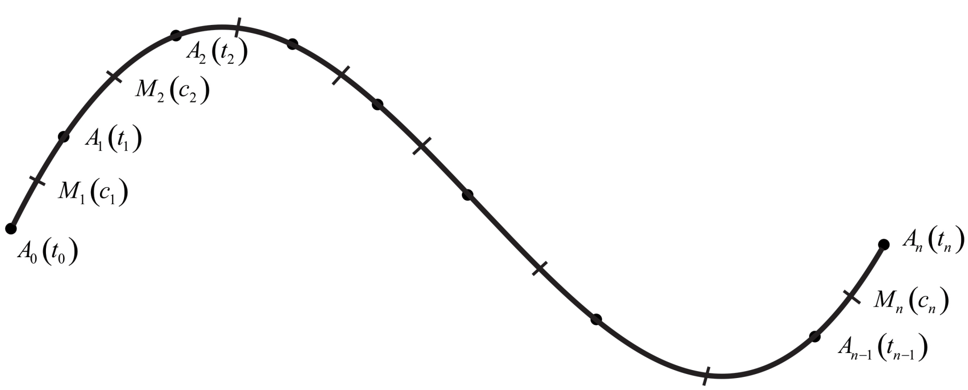
$$M_1(c_1),\ M_2(c_2),\ \ldots\ , M_n(c_n), \quad t_{i-1} \le c_i \le t_i,\ 1 \le i \le n.$$

Aceste puncte determină un sistem de puncte intermediare

$$S = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Numim atunci **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** S suma

$$\sigma_\Delta(F, S) = \sum_{i=1}^{n} F(x(c_i), y(c_i), z(c_i)) l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}).$$



Definiţie. Dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\max\limits_{1 \le i \le n} l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}) < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte S asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(F, S) - I| < \varepsilon,$$

atunci I se numeşte **integrala curbilinie de specia (speţa) I** a funcţiei F pe curba (C) şi se notează

$$\int_C F(x,y,z)ds.$$

Integrala curbilinie de specia I se mai numeşte şi **integrala curbilinie în raport cu elementul de lungime**.

4.2.2 Formula de calcul

Are loc următoarea formulă, prin intermediul căreia calculul unei integrale curbilinii de specia I se reduce la calculul unei integrale definite, o formulă similară având loc şi pentru curbe plane.

Teorema 4.3. *Fie*

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci

$$\int_C F(x,y,z)ds = \int_a^b F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt.$$

Pentru $F \equiv 1$ (funcţia constantă 1), folosind şi Teorema 4.1, obţinem că

$$\int_C ds = l(C),$$

adică **integrând funcţia constantă** 1 **în raport cu elementul de lungime al unei curbe obţinem lungimea acelei curbe**.

Curbe plane (coordonate carteziene)

Similar, fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă în plan şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci

$$\int_C F(x,y)ds = \int_a^b F(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

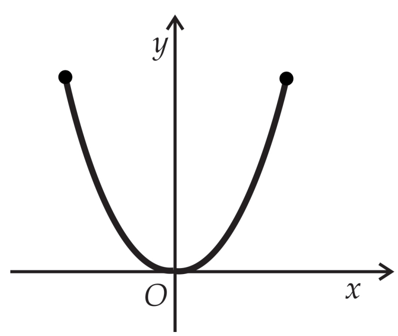
Curbe plane (coordonate polare)

Fie
$$(C) : \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [a, b],$$
o curbă netedă în plan reprezentată în coordonate polare şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci
$$\int_C F(x,y)ds = \int_a^b F(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}d\theta.$$

Procedeul de înlocuire

Din cele de mai sus, se observă că determinarea valorii integralei începe cu operaţia de **înlocuire**. Mai precis, coordonatele x, y, z se înlocuiesc cu expresiile acestora date de reprezentarea parametrică a curbei, iar pentru calculul lui ds se înlocuiesc de această dată derivatele x', y', z'.

Exemplu. Determinaţi $\int_C xyds$, unde (C) este curba plană definită explicit prin $(C) : y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.



Soluţie. Curba (C) se poate reprezenta parametric alegând x ca parametru. Se obţine
$$(C) : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \; t \in [-1, 1] \implies x'(t) = 1, y'(t) = 2t \implies ds = \sqrt{1 + 4t^2}dt.$$
Atunci
$$\int_C xyds = \int_{-1}^{1} t \cdot t^2 \cdot \sqrt{1 + 4t^2}dt = \int_{-1}^{1} t^3\sqrt{1 + 4t^2}dt = 0,$$
deoarece intervalul de integrare $[-1, 1]$ este simetric faţă de origine, iar integrandul este funcţie impară.

4.2.3 Proprietăţi de calcul

Independenţa de sensul de parcurgere

Fie

$$\overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ ,\ t \in [a,b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

o curbă netedă şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$, iar F continuă pe D. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} F(x,y,z)ds,$$

adică valoarea integralei **nu depinde** de sensul de parcurgere al curbei $\overset{\frown}{AB}$, proprietate motivată de faptul că, în definiţia de mai sus, lungimea $l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i})$ nu depinde de sensul de parcurgere al arcului.

Întrucât calculul integralelor curbilinii de specia I se poate reduce, în condiţiile date, la calculul unei integrale definite, integrala curbilinie de specia I moşteneşte unele dintre proprietăţile de calcul ale integralei definite.

Aditivitatea în raport cu funcţia

Fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\ ,\ t \in [a,b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

o curbă netedă şi fie $F_1, F_2 : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar F_1, F_2 continue pe D. Fie deasemenea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

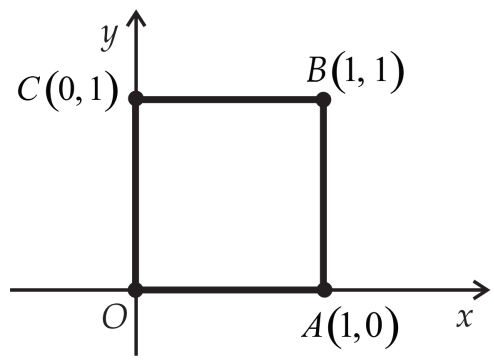
$$\int_C (c_1F_1(x,y,z) + c_2F_2(x,y,z))ds = c_1 \int_C F_1(x,y,z)ds + c_2 \int_C F_2(x,y,z)ds.$$

Aditivitatea în raport cu domeniul de integrare

Fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă şi M un punct pe $\overset{\frown}{AB}$. Fie deasemenea $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y,z)ds = \int_{\overset{\frown}{AM}} F(x,y,z)ds + \int_{\overset{\frown}{MB}} F(x,y,z)ds.$$

Exemplu. Determinaţi $\int_{C_1} xyds$, unde (C_1) este pătratul de vârfuri $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ şi $C(1,0)$.



Soluţie. Reamintim că un segment MN paralel cu Ox, cu $M = M(a,k)$, $N = N(b,k)$ se poate parametriza astfel

- Pentru $a < b$: $\begin{cases} x = t, \ t \in [a,b], \\ y = k \end{cases}$
- Pentru $b < a$: $\begin{cases} x = a + b - t, \ t \in [b,a], \\ y = k \end{cases}$,

intervalul de valori al parametrului fiind de la coordonata variabilă mai mică la coordonata variabilă mai mare. Similar se pot reprezenta parametric şi segmente paralele cu Oy. Curba (C_1) este netedă pe porţiuni, iar

$$\int_{C_1} xyds = \int_{OA} xyds + \int_{AB} xyds + \int_{BC} xyds + \int_{CO} xyds.$$

Putem parametriza fiecare segment prin

$$OA : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \ t \in [0,1], \qquad \Longrightarrow ds = \sqrt{(t')^2 + (0')^2}dt = dt$$

$$AB : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \ t \in [0,1], \qquad \Longrightarrow ds = \sqrt{(1')^2 + (t')^2}dt = dt$$

$$BC : \begin{cases} x = 0 + 1 - t = 1 - t \\ y = 1 \end{cases}, \ t \in [0,1], \qquad \Longrightarrow ds = \sqrt{[(1-t)']^2 + (1')^2}dt = dt$$

$$CO : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 0 - t = 1 - t \end{cases}, \ t \in [0,1] \quad \Longrightarrow \ ds = \sqrt{(0')^2 + [(1-t)']^2} dt = dt.$$

Atunci

$$\int_C xyds = \int_0^1 t \cdot 0 \cdot dt + \int_0^1 1 \cdot t \cdot dt + \int_0^1 (1-t) \cdot 1 \cdot dt + \int_0^1 0 \cdot (1-t) \cdot dt$$
$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1-t)dt = \int_0^1 (t+1-t)dt = \int_0^1 1dt = 1.$$

4.2.4 Aplicaţii

Considerăm un fir material de grosime neglijabilă, asimilabil unei curbe (C), cu densitatea pe unitatea de lungime $\rho = \rho(x,y,z)$.

Masa firului

Masa firului este

$$m_C = \int_C \rho(x,y,z)ds$$

Coordonatele centrului de masă

Coordonatele centrului de masă sunt

$$x_G = \frac{1}{m_C} \int_C x\rho(x,y,z)ds, \quad y_G = \frac{1}{m_C} \int_C y\rho(x,y,z)ds, \quad z_G = \frac{1}{m_C} \int_C z\rho(x,y,z)ds.$$

Momente de inerţie

În raport cu axele

Momentul de inerţie în raport cu axa Oz este

$$I_{Oz} = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)ds,$$

$x^2 + y^2$ reprezentând pătratul distanţei de la punctul curent $M(x,y,z)$ la axa Oz. Similar se calculează momentele de inerţie în raport cu celelalte axe.

În raport cu planele de coordonate

Momentul de inerţie în raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \int_C z^2\rho(x,y,z)ds,$$

z^2 reprezentând pătratul distanţei de la punctul curent $M(x,y,z)$ la planul xOy. Similar se calculează momentele de inerţie în raport cu celelalte plane de coordonate.

În raport cu originea

Momentul de inerţie în raport cu originea O este

$$I_O = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds,$$

$x^2 + y^2 + z^2$ reprezentând pătratul distanţei de la punctul curent $M(x, y, z)$ la O.

Exemplu. Determinaţi coordonatele centrului de masă al firului

$$(C) : \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ct \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi], \ r, c \neq 0,$$

cu densitatea liniară constantă ρ.

Soluţie. Masa firului este

$$m = \int_C \rho(x, y, z)ds = \rho \int_C ds$$

Deoarece

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{[(r\cos t)']^2 + [(r\sin t)']^2 + [(ct)']^2}dt = \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2 + [c]^2}dt \\ &= \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + c^2}dt = \sqrt{r^2 + c^2}dt \end{aligned}$$

urmează că

$$m = \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2}dt = \rho\sqrt{r^2 + c^2} \cdot 2\pi$$

Coordonatele centrului de masă sunt

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y, z)ds = \frac{1}{\rho\sqrt{r^2 + c^2} \cdot 2\pi} \int_0^{2\pi} r\cos t \cdot \rho \cdot \sqrt{r^2 + c^2}dt \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t dt = \frac{r}{2\pi} \sin t \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{CM} &= \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y,z)ds = \frac{1}{\rho\sqrt{r^2+c^2}\cdot 2\pi}\int_0^{2\pi} r\sin t\cdot\rho\cdot\sqrt{r^2+c^2}dt \\
&= \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t dt = \frac{r}{2\pi}(-\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 0, \\
z_{CM} &= \frac{1}{m}\int_C z\rho(x,y,z)ds = \frac{1}{\rho\sqrt{r^2+c^2}\cdot 2\pi}\int_0^{2\pi} ct\cdot\rho\cdot\sqrt{r^2+c^2}dt \\
&= \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi} t dt = \frac{c}{2\pi}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = c\pi.
\end{aligned}$$

4.3 Integrale curbilinii de specia (speţa) II

4.3.1 Definiţie

Din nou, vom folosi un procedeu de sumare pentru a defini noţiunea de integrală curbilinie de specia II. Fie

$$(C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \;,\; t\in[a,b], \\ z = z(t) \end{cases}$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $\vec{F}: D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbf{V_3}$

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$$

astfel încât $(C)\subset D$. Fie de asemenea

$$\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \quad \text{cu} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b,$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$, care determină pe (C) punctele

$$A_0(t_0),\ A_1(t_1), \ldots, A_n(t_n).$$

Pe fiecare arc de curbă $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}, \ldots, \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ alegem câte un punct intermediar

$$M_1(c_1),\ M_2(c_2),\ \ldots\ , M_n(c_n), \quad t_{i-1}\le c_i\le t_i,\ 1\le i\le n.$$

Aceste puncte determină un sistem de puncte intermediare

$$S = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Numim atunci **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** S suma

$$\sigma_\Delta(\vec{F}, S) = \sum_{i=1}^{n} P(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(x_i - x_{i-1}) + Q(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(y_i - y_{i-1}) \\ + R(x(c_i), y(c_i), z(c_i))(z_i - z_{i-1}).$$

Definiţie. Dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\max\limits_{1 \leq i \leq n} l(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}) < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte S asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$\left|\sigma_\Delta(\vec{F}, C) - I\right| < \varepsilon,$$

atunci I se numeşte **integrala curbilinie de specia (speţa) II** a funcţiei $\vec{F}$ pe curba (C) şi se notează

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

sau

$$\int_C \vec{F}(x, y, z)d\vec{r}$$

În situaţia în care curba (C) este închisă, se pot folosi notaţiile $\oint \vec{F}d\vec{r}$, $\oint \vec{F}d\vec{r}$, acestea indicând şi sensul de parcurgere al lui (C)

Integrala curbilinie de specia II se mai numeşte şi **integrala curbilinie în raport cu coordonatele**, datorită prezenţei lui dx, dy, dz. Funcţiile P, Q, R se mai numesc şi **componentele** lui $\vec{F}$.

4.3.2 Formula de calcul

Are loc următoarea formulă, prin intermediul căreia calculul unei integrale curbilinii de specia II se reduce la calculul unei integrale definite, o formulă similară având loc şi pentru curbe plane.

Teorema 4.4. *Fie*

$$(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă în spaţiu şi fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încât (C) $\subset D$, iar P, Q, R continue pe D. Atunci

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b \big[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) \\ + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big]\, dt.$$

Similar, fie

$$(\mathrm{C}) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a,b],$$

o curbă netedă în plan şi fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât $(C) \subset D$, iar P, Q continue pe D. Atunci

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big]\, dt.$$

Formulele de mai sus se extind şi pentru cazul curbelor netede pe porţiuni.

Procedeul de înlocuire

Din cele de mai sus, se observă că, din nou, determinarea valorii integralei începe cu operaţia de **înlocuire**.

Exemplu. Determinaţi

$$\int_C xyzdx + xydy + xdz, \quad (\mathrm{C}) : \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}, \ t \in [0,1].$$

Soluţie. Calculăm mai întâi dx, dy, dz. Observăm că

$$dx = e^t dt, \quad dy = -e^{-t}dt, \quad dz = \sqrt{3}dt.$$

Atunci, înlocuind x, y, z şi dx, dy, dz, obţinem

$$\begin{aligned} \int_C xyzdx + xydy + xdz &= \int_0^1 \left(e^t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{3}t \cdot e^t + e^t \cdot e^{-t} \cdot (-e^{-t}) + e^t \cdot \sqrt{3}\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{3}te^t - e^{-t} + \sqrt{3}e^t\right) dt \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 te^t dt - \int_0^1 e^{-t}dt + \sqrt{3}\int_0^1 e^t dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{3}\left(\int_0^1 t(e^t)'dt\right) - \frac{e^{-t}}{-1}\Bigg|_0^1 + \sqrt{3}e^t\Bigg|_0^1 \\
&= \sqrt{3}\left(te^t\Bigg|_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right) + \frac{1}{e^t}\Bigg|_0^1 + \sqrt{3}e^t\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{e} - 1 + \sqrt{3}e.
\end{aligned}
$$

4.3.3 Proprietăţi de calcul

Dependenţa de sensul de parcurgere

Fie

$$
\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ , \ t \in [a, b], \\ z = z(t) \end{cases}
$$

o curbă netedă şi fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$, iar P, Q, R continue pe D. Atunci

$$
\begin{aligned}
&\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\
&\qquad = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,
\end{aligned}
$$

adică valoarea integralei **depinde** de sensul de parcurgere al curbei $\overset{\frown}{AB}$, în sensul că îşi schimbă semnul atunci când se schimbă sensul de parcurgere al curbei.

Această proprietate este motivată de faptul că, în definiţia de mai sus, diferenţele între coordonate $x_i - x_{i-1}$, $y_i - y_{i-1}$, $z_i - z_{i-1}$ îşi schimbă semnul atunci când se schimbă sensul de parcurgere al curbei, devenind, respectiv, $x_{i-1} - x_i$, $y_{i-1} - y_i$, $z_{i-1} - z_i$.

Întrucât calculul integralelor curbilinii de specia II se poate reduce, în condiţiile date, la calculul unei integrale definite, şi integrala curbilinie de specia II are proprietăţile de aditivitate ale integralei definite.

Aditivitatea în raport cu funcţia

Fie

$$
(C) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \ , \ t \in [a, b], \\ z = z(t) \end{cases}
$$

o curbă netedă şi fie $\vec{F}_1, \vec{F}_2 : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ cu componentele continue pe D astfel încât $(C) \subset D$. Fie deasemenea $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\int_C (c_1\vec{F}_1(x,y,z) + c_2\vec{F}_2(x,y,z))d\vec{r} = c_1 \int_C \vec{F}_1(x,y,z)d\vec{r} + c_2 \int_C \vec{F}_2(x,y,z)d\vec{r}.$$

Aditivitatea în raport cu domeniul de integrare

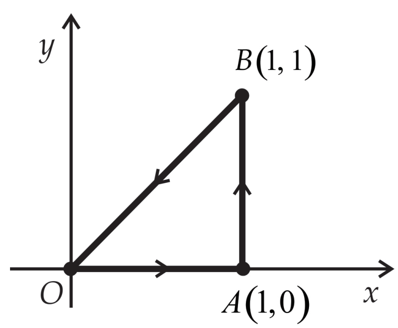
Fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă şi M un punct pe $\overset{\frown}{AB}$. Fie deasemenea $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{V_3}$ cu componentele continue pe D astfel ca $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{AM}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r} + \int_{\overset{\frown}{MB}} \vec{F}(x,y,z)d\vec{r}.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\int_C y^2dx + x^2dy,$$

unde (C) este triunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(1,0)$ şi $B(1,1)$, parcurs în sens trigonometric.



Soluţie. Curba (C) este netedă pe porţiuni, iar

$$\int_C y^2dx + x^2dy = \int_{OA} y^2dx + x^2dy + \int_{AB} y^2dx + x^2dy + \int_{BO} y^2dx + x^2dy.$$

Putem parametriza segmentele OA şi AB prin

$$OA : \begin{cases} x = t, \ t \in [0,1], \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \ dx = dt, \ dy = 0$$

$$AB : \begin{cases} x = 1, \\ y = t, \ t \in [0,1] \end{cases} \qquad \Longrightarrow \ dx = 0, \ dy = dt.$$

Rămâne să precizăm (şi comentăm) parametrizarea lui BO. Acest segment face parte din prima bisectoare, cu ecuaţia $y = x$. Alegând (natural) x ca parametru, obţinem însă că de la B la O valoarea lui t (adică a lui x) **scade** de la 1 la 0.

Obţinem

$$BO : \begin{cases} x = t, \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [1, 0] \implies dx = dt,\ dy = dt.$$

Scrierea (mai puţin uzuală) $t \in [1, 0]$ este făcută pentru a păstra orientarea segmentului BO, de la B (obţinut pentru $t = 1$) către O (obţinut pentru $t = 0$). Această scriere este compatibilă cu (şi motivată de) proprietatea integralei curbilinii de specia II de a-şi schimba semnul după schimbarea orientării domeniului de integrare. **Nu** putem aplica acelaşi artificiu şi pentru calculul integralei curbilinii de specia I, care **nu** are această proprietate! Atunci

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 0^2 dt + \int_0^1 1^2 dt + \int_1^0 2t^2 dt = t\Big|_0^1 + 2 \cdot \frac{t^2}{3}\Big|_1^0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4.3.4 Aplicaţii

Lucrul mecanic

Considerăm un câmp de forţe $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$,

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}$$

care deplasează un punct material $M(x, y, z)$ de-a lungul curbei (C). Atunci lucrul mecanic efectuat de câmpul de forţe $\vec{F}$ este

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

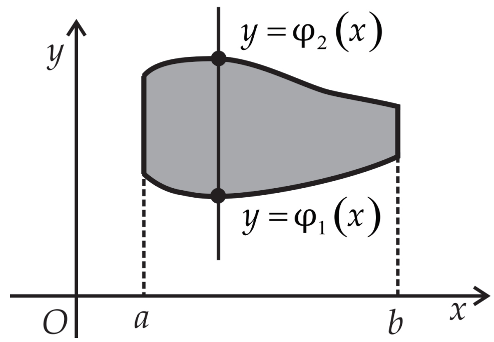
Ariile unor domenii plane

Domenii simple în raport cu Oy

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi mărginită. D se numeşte **simplă în raport cu** Oy dacă au loc următoarele proprietăţi.

1. Proiecţia lui D pe Ox este un segment $[a, b]$.
2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \left\{(x, y); \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), x \in [a, b]\right\}.$$

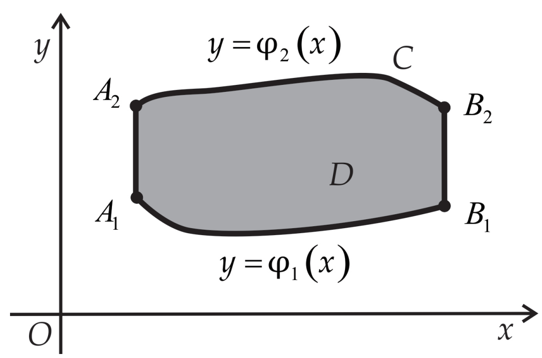


Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă prin interiorul segmentului $[a, b]$ la axa Oy taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(x)$ fiind ordonata punctului de intrare, iar $\varphi_2(x)$ fiind ordonata punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide. De remarcat că domeniul este simplu în raport cu axa la care se duce paralela, nu cu cea pe care se face proiecţia.

Ariile domeniilor simple în raport cu Oy

Teorema 4.5. *Fie D un domeniu simplu în raport cu Oy, cu frontiera* (C). *Atunci*

$$\text{aria } (D) = -\int_C y\,dx.$$



Demonstraţie. D fiind simplu în raport cu Oy, au loc proprietăţile de mai sus. Păstrând notaţiile, fie $A_1 = A_1(a, \varphi_1(a))$, $B_1 = B_1(b, \varphi_1(b))$, $A_2 = A_2(a, \varphi_2(a))$, $B_2 = B_2(b, \varphi_2(b))$ ca în figură.

Conform formulei care precizează aria porţiunii dintre graficele a două funcţii, obţinem că

$$\text{aria } (D) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dx = \int_a^b \varphi_2(x)dx - \int_a^b \varphi_1(x)dx.$$

Deoarece

$$\int_C ydx = \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} ydx + \int_{\overline{A_2A_1}} ydx + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} ydx + \int_{\overline{B_1B_2}} ydx,$$

iar $\int_{\overline{B_1B_2}} ydx = \int_{\overline{A_2A_1}} ydx = 0$, deoarece $dx = 0$ pe aceste segmente, urmează că

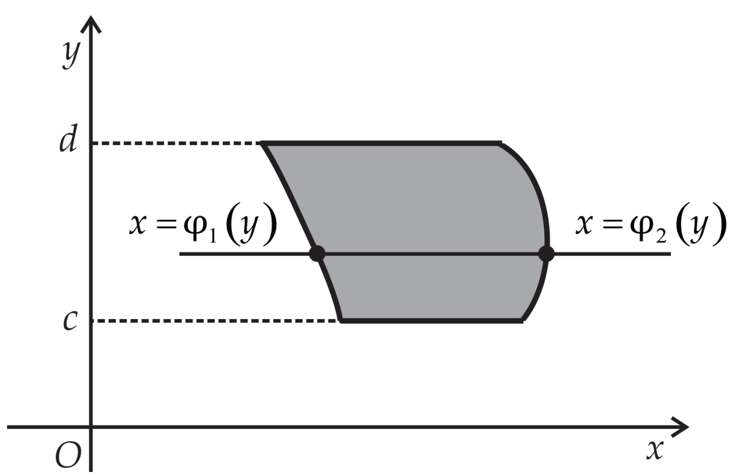
$$\int_C ydx = \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} ydx + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} ydx = \int_b^a \varphi_2(x)dx + \int_a^b \varphi_1(x)dx$$
$$= -\int_a^b \varphi_2(x)dx + \int_a^b \varphi_1(x)dx.$$

De aici,

$$\text{aria } (D) = -\int_C ydx.$$

■

Domenii simple în raport cu Ox



Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi mărginită. D se numeşte **simplă în raport cu** Ox dacă dacă au loc următoarele proprietăţi.

1. Proiecţia lui D pe Oy este un segment $[c, d]$.

2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), y \in [c, d]\}.$$

Cea de-a doua condiţie reprezintă faptul că orice paralelă prin interiorul segmentului $[c, d]$ la axa Ox taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(y)$ fiind abscisa punctului de intrare, iar $\varphi_2(y)$ fiind abscisa punctului de ieşire. Cele două puncte pot eventual şi coincide.

Ariile domeniilor simple în raport cu Oy

Fie D un domeniu simplu în raport cu Oy, cu frontiera (C). Atunci

$$\text{aria }(D) = \int_C x dy.$$

Demonstraţia este similară celei efectuate mai sus pentru domenii simple în raport cu Ox.

Semnul integralelor curbilinii folosite în calculul ariilor se poate reţine cu ajutorul următoarei reguli mnemotehnice: $\int_C x dy$, cu x „înaintea" lui y (de fapt, a lui dy), corespunzător ordinii alfabetice, reprezintă aria lui D. În schimb, $\int_C y dx$, cu y „înaintea" lui x (de fapt, a lui dx), contrar ordinii alfabetice, reprezintă opusul ariei lui D.

Ariile domeniilor simple în raport cu ambele axe

Fie D un domeniu simplu în raport cu ambele axe, cu frontiera (C). Prin combinarea formulelor de mai sus, obţinem că

$$\text{aria }(D) = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx.$$

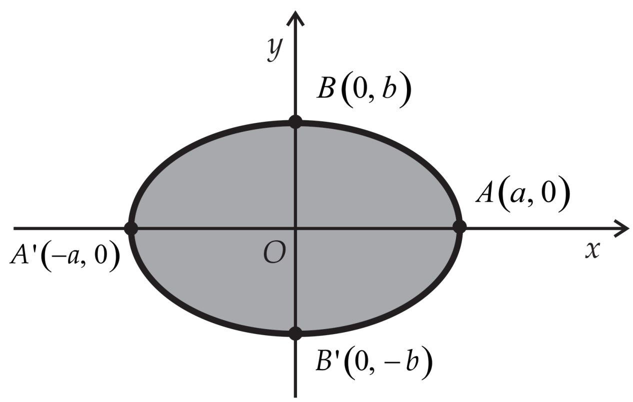
Exemplu. Determinaţi aria domeniului mărginit de elipsa $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de semiaxe a şi b, unde $a, b > 0$.

Soluţie. Domeniul respectiv este simplu în raport cu ambele axe. Frontiera sa se poate parametriza sub forma

$$(C) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Din motive de simetrie, vom folosi formula

$$\text{aria }(D) = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx.$$



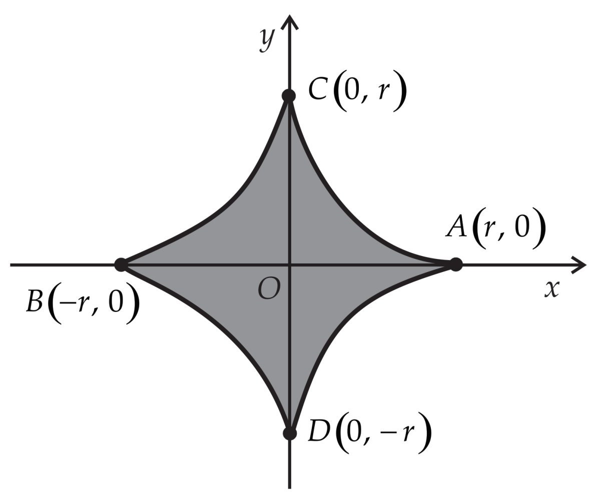
Atunci

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = b \cos t dt,$$

deci

$$\begin{aligned} \text{aria } (D) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot 2\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului mărginit de **astroida** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$, $r > 0$.



Soluţie. Determinăm mai întâi o reprezentare parametrică a lui (C). Întrucât ecuaţia lui (C) poate fi pusă sub forma

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(r^{\frac{1}{3}}\right)^2,$$

sau, cu notaţiile $x^{\frac{1}{3}} = X$, $y^{\frac{1}{3}} = Y$, $r^{\frac{1}{3}} = R$,

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

acest lucru sugerează folosirea ecuaţiilor parametrice

$$X = R\cos t,\ Y = R\sin t \implies x^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}\cos t,\ y^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}\sin t,$$

de unde

$$(C): \quad \begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi].$$

Din motive de simetrie, vom folosi formula

$$\text{aria } (D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx.$$

Atunci

$$dx = \left(r\cos^3 t\right)' dt = -3r\cos^2 t \sin t dt, \quad dy = \left(r\sin^3 t\right)' dt = 3r\sin^2 t\cos t dt,$$

deci

$$\begin{aligned}
\text{aria } (D) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[r\cos^3 t \cdot 3r\sin^2 t\cos t - r\sin^3 t \cdot (-3r\cos^2 t\sin t)\right] dt \\
&= \frac{3r^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{3r^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\sin^2 t dt \\
&= \frac{3r^2}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3r^2}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2} dt \\
&= \frac{3r^2}{16}\left(t\,\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin 4t}{4}\,\Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{3\pi r^2}{8}.
\end{aligned}$$

4.4 Integrale curbilinii independente de drum

S-a observat că integrala curbilinie de specia II poate fi folosită pentru a calcula lucrul mecanic al unei forţe care acţionează asupra unui punct material care se deplasează de-a lungul unei curbe netede. Pentru cazul unui câmp de forţe conservativ (de exemplu mişcarea în câmp gravitaţional, fără frecare sau rezistenţă), acest lucru mecanic depinde doar de punctul de plecare şi de cel de sosire, nu şi de calea de deplasare aleasă. Acest lucru ne conduce la investigarea condiţiilor în care valoarea unei integrale curbilinii de specia II este independentă de drumul ales.

4.4.1 Definiţie

Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Spunem că integrala curbilinie de specia II $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este **independentă de drum** în D dacă pentru orice $A, B \in D$ valoarea integralei $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ este aceeaşi pentru orice curbă netedă pe porţiuni $\overset{\frown}{AB}$ care uneşte A şi B.

Notaţie

Dacă $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D, iar $\overset{\frown}{AB}$ este o curbă netedă pe porţiuni oarecare în D, vom nota $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ şi prin

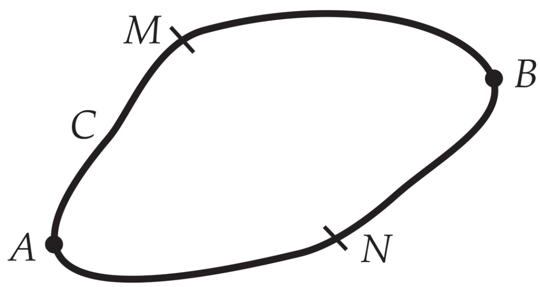
$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz.$$

Teorema 4.6. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Atunci integrala curbilinie de specia II $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum dacă şi numai dacă $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Vom considera numai cazul curbelor simple, situaţia în care curba (C) se autointersectează putând fi tratată cu ajutorul aceloraşi idei.

Fie (C) o curbă închisă simplă netedă pe porţiuni conţinută în D. Fie A, $B \in (C)$. Pentru fixarea ideilor, fie M pe unul din arcele determinate pe (C) de A şi B, iar N pe celălalt. Atunci, conform proprietăţii de aditivitate a integralei curbilinii de specia II în raport cu domeniul de integrare,

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\overset{\frown}{AMB}} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{\overset{\frown}{BNA}} Pdx + Qdy + Rdz$$



$$= \int_{A\overset{\frown}{M}B} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{A\overset{\frown}{N}B} Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

„$\Leftarrow$" Fie $A, B \in D$ şi $A\overset{\frown}{M}B$, $A\overset{\frown}{N}B$ două curbe netede pe porţiuni unind A şi B. Fie deasemenea curba închisă (C) definită prin

$$(C) = A\overset{\frown}{M}B \cup B\overset{\frown}{N}A.$$

Atunci

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_{A\overset{\frown}{M}B} Pdx + Qdy + Rdz + \int_{B\overset{\frown}{N}A} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_{A\overset{\frown}{M}B} Pdx + Qdy + Rdz - \int_{A\overset{\frown}{N}B} Pdx + Qdy + Rdz, \end{aligned}$$

de unde

$$\int_{A\overset{\frown}{M}B} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{A\overset{\frown}{N}B} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Cum A, B şi curbele netede pe porţiuni $A\overset{\frown}{M}B$, $A\overset{\frown}{N}B$ erau arbitrare, urmează că $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D. ■

Să notăm faptul că $\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D corespunde unui principiu de conservare a energiei pentru câmpul de forţe $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ în D.

4.4.2 Forme diferenţiale exacte. Primitive (potenţiale)

Numită şi teorema fundamentală a calculului integral, teorema Leibniz-Newton permite calculul unei integrale definite atunci când se cunoaşte o primitivă a integrandului, valoarea acestei integrale fiind egală cu diferenţa valorilor primitivei în capetele intervalului.

Cum integrala curbilinie de specia II este o extensie a integralei definite, mai fidelă decât cea de de specia I, întrucât, spre deosebire de aceasta din urmă, păstrează şi proprietatea de schimbare a semnului după schimbarea orientării domeniului de integrare, o întrebare naturală este dacă un rezultat asemănător teoremei Leibniz-Newton are loc şi pentru integrala curbilinie de speţa a doua.

Mai mult, dacă răspunsul la această întrebare ar fi afirmativ, o integrală curbilinie de speţa a doua căreia i s-ar aplica această teoremă ar fi automat independentă de drum, întrucât valoarea acestei integrale ar depinde doar de valorile primitivei corespunzând capetelor curbei, nu şi de forma curbei.

Desigur, rămâne să definim mai întâi conceptul de primitivă în contextul dat. Pentru integrala definită, **derivând** primitiva se obţinea integrandul. În acest context, **diferenţiind** primitiva (dacă aceasta există), se obţine integrandul.

Forme diferenţiale exacte

Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Spunem că forma diferenţială $Pdx + Qdy + Rdz$ este **formă diferenţială exactă** dacă există $U : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este diferenţiala acesteia, adică

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz.$$

Primitive (potenţiale)

În această situaţie, U se numeşte **primitiva** sau **potenţialul** formei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz$, având loc egalităţile

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă reală, primitivele unei funcţii sunt determinate până la o constantă.

Teorema 4.7. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D. Atunci $\int Pdx + Qdy + Rdz$ este independentă de drum în D dacă şi numai dacă $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Definim $U : D \to \mathbb{R}$ prin

$$U(x, y, z) = \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz, \quad \text{unde } M = M(x, y, z),$$

iar A este un punct oarecare din D. Deoarece

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

pentru a verifica faptul că $dU = Pdx + Qdy + Rdz$ va trebui să calculăm $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ şi să arătăm că $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$.

Fie $M_1 = M_1(x+h, y, z) \in D$. Atunci

$$\begin{aligned}
U(x+h,y,z) - U(x,y,z) &= \int_A^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz - \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz \\
&= \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz + \int_M^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz \\
&\quad - \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz \\
&= \int_M^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz.
\end{aligned}$$

Calculând $\int_M^{M_1} Pdx + Qdy + Rdz$ de-a lungul segmentului MM_1, pentru care $dy = dz = 0$, deoarece y, z sunt constante, iar $x = t$, $t \in [x, x+h]$, de unde $dx = dt$, obţinem că

$$U(x+h,y,z) - U(x,y,z) = \int_x^{x+h} P(t,y,z)dt = hP(\theta,y,z),$$

cu $\theta \in [x, x+h]$, conform teoremei de medie pentru integrala definită. De aici,

$$\frac{U(x+h,y,z) - U(x,y,z)}{h} = P(\theta,y,z),$$

iar trecând la limită pentru $h \to 0$ obţinem, ţinând seama de continuitatea lui P, că

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z).$$

Similar demonstrăm că

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z).$$

Deoarece

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

urmează că

$$dU = Pdx + Qdy + Rdz,$$

iar forma diferenţială $Pdx + Qdy + Rdz$ este exactă, cu potenţial U.

„$\Leftarrow$" Fie $A, B \in D$ şi fie

$$\overset{\frown}{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ t \in [a, b],$$

o curbă netedă pe porţiuni cu punct iniţial $A(x_A, y_A, z_A)$ şi punct final $B(x_B, y_B, z_B)$. Atunci

$$\begin{aligned}
\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial U}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right] dt \\
&= \int_a^b \left[U(x(t), y(t), z(t))\right]' dt \\
&= U(x(b), y(b), z(b)) - U(x(a), y(a), z(a)) \\
&= U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A).
\end{aligned}$$

■

Formula Leibniz-Newton

Inspectând demonstraţia Teoremei 4.7, observăm că am obţinut de asemenea următoarea formulă de tip Leibniz-Newton pentru integrala curbilinie de specia II.

Corolar 4.7.1. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă şi fie $\overset{\frown}{AB}$ o curbă netedă pe porţiuni în D. Atunci*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A),$$

unde U este o primitivă a formei diferenţiale $Pdx + Qdy + Rdz$.

Exemplu. 1. Demonstraţi că

$$\omega = \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz$$

este o formă diferenţială exactă în $D = (0, \infty)^3$, observând că o primitivă a acesteia este

$$U : D \to \mathbb{R}, \quad U(x, y, z) = \frac{xy}{z}.$$

2. Determinaţi

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz,$$

unde $\widehat{AB}$ este o curbă netedă pe porţiuni care uneşte $A(1, 1, 1)$ şi $B(4, 2, 2)$.

Soluţie. 1. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned} d\left(\frac{xy}{z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\right)dz \\ &= \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz, \end{aligned}$$

de unde concluzia.

2. Conform formulei Leibniz-Newton pentru integrala curbilinie de specia II,

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz = U(4, 2, 2) - U(1, 1, 1) = 4 - 1 = 3.$$

Determinarea primitivei unei forme diferenţiale exacte

Este cunoscut faptul că dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci

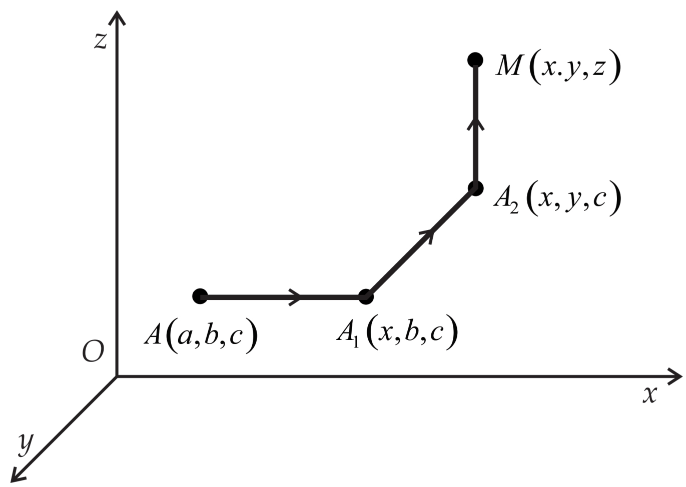
$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(u)du,$$

este o primitivă a lui f. În demonstraţia Teoremei 4.7, implicaţia „$\Rightarrow$", s-a obţinut, în fapt, un mod de calcul complet analog al primitivelor unei forme diferenţiale exacte date.

Corolar 4.7.2. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D astfel încât $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă. Atunci o primitivă a sa este $U : D \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$U(x, y, z) = \int_A^M Pdx + Qdy + Rdz, \quad \text{unde } M = M(x, y, z),$$

iar A este un punct oarecare din D.



În situaţia în care drumul paralel cu axele de coordonate

$$A(a,b,c) \to A_1(x,b,c) \to A_2(x,y,c) \to M(x,y,z)$$

este conţinut în D, primitiva U ia forma simplificată

$$U(x,y,z) = \int_a^x P(t,b,c)dt + \int_b^y Q(x,t,c)dt + \int_c^z R(x,y,t)dt.$$

Să observăm că sub fiecare integrală se află câte o singură componentă a formei diferenţiale. Componentele de dinaintea poziţiei pe care se integrează sunt cele ale punctului de sosire, $M(x,y,z)$, cele de după sunt ale punctului de plecare, $A(a,b,c)$.

Exemplu. Ştiind că

$$\omega = 2xyzdx + (e^y + x^2z)dy + x^2ydz$$

este o formă diferenţială exactă, determinaţi o primitivă a sa.

Soluţie. Alegem ca punct iniţial $A(0,0,0)$ şi notăm

$$P(x,y,z) = 2xyz, \quad Q(x,y,z) = e^y + x^2z, \quad R(x,y,z) = x^2y.$$

O primitivă a lui ω este atunci

$$U(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)dt + \int_0^y Q(x,t,0)dt + \int_0^z R(x,y,t)dt$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y e^t dt + \int_0^z x^2 y dt = e^t \Big|_{t=0}^{t=y} + x^2 yt \Big|_{t=0}^{t=z} = e^y - 1 + x^2 yz.$$

Primitiva U se poate deduce şi prin integrarea directă unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale. Astfel, dacă

$$dU = 2xyzdx + (e^y + x^2 z)dy + x^2 ydz,$$

urmează că

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x^2 z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = x^2 y.$$

Urmează că

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz \implies U = \int 2xyzdx = yz \int 2xdx = x^2 yz + \varphi_1(y,z).$$

Să notăm că funcţia φ_1 depinde de variabilele rămase, y şi z aici, deoarece se integrează după x. De asemenea

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^y + x^2 z \implies \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 yz + \varphi_1(y,z)\right) = e^y + x^2 z$$
$$\implies x^2 z + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_1(y,z)\right) = e^y + x^2 z \implies \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_1(y,z)\right) = e^y$$
$$\implies \varphi_1(y,z) = \int e^y dy = e^y + \varphi_2(z).$$

Din nou, funcţia φ_2 depinde de variabila rămasă, z, întrucât se integrează după y iar variabilele „disponibile" înainte de integrare erau y şi z. Urmează că

$$U = x^2 yz + \varphi_1(y,z) = x^2 yz + e^y + \varphi_2(z).$$

În plus

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2 y \implies \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 yz + e^y + \varphi_2(z)\right) = x^2 y$$
$$\implies x^2 y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_2(z)\right) = x^2 y \implies \varphi_2'(z) = 0 \implies \varphi_2(z) = C.$$

Atunci

$$U(x,y,z) = x^2 yz + e^y + C,$$

unde C este o constantă arbitrară.

Să notăm că, în prima metodă, constanta C este determinată de alegerea lui $A(0,0,0)$ ca punct iniţial, ceea ce impune ca $U(0,0,0) = 0$.

Rămâne deci să precizăm un test care să decidă dacă o formă diferenţială dată este exactă sau nu. În acest scop, să reamintim că, dacă U este o primitivă a lui $Pdx + Qdy + Rdz$, atunci

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Conform criteriului lui Schwarz de egalitate a derivatelor parţiale mixte ale unei funcţii de mai multe variabile, obţinem atunci următorul rezultat.

Teorema 4.8. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe D. Dacă $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă, atunci*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{în } D.$$

Demonstraţie. Să observăm că

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y},$$

iar aceste derivate parţiale mixte sunt continue pe D. Conform criteriului lui Schwarz, obţinem că ele sunt egale în D, adică

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},$$

de unde $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, celelalte egalităţi obţinându-se analog. ■

Un rezultat asemănător are loc şi pentru funcţii cu domeniul în $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.9. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe D. Dacă $Pdx + Qdy$ este formă diferenţială exactă, atunci*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{în } D.$$

Folosind determinanţi simbolici şi faptul că un vector este nul dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt nule, teoremele de mai sus se pot pune sub următoarele forme mai uşor de vizualizat.

Corolar 4.9.1. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe D. Dacă $Pdx + Qdy + Rdz$ este formă diferenţială exactă, atunci*

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \text{în } D.$$

Corolar 4.9.2. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe D. Dacă $Pdx + Qdy$ este formă diferenţială exactă, atunci*

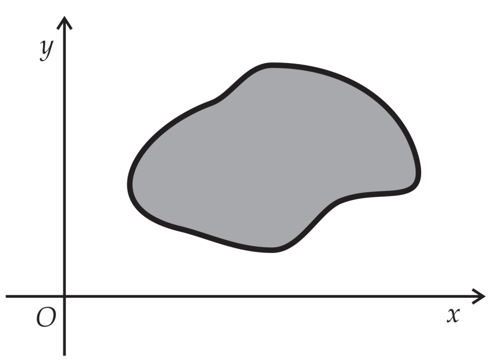
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{în } D.$$

4.4.3 Integrale curbilinii pe domenii simplu conexe. Condiţii echivalente pentru independenţa de drum

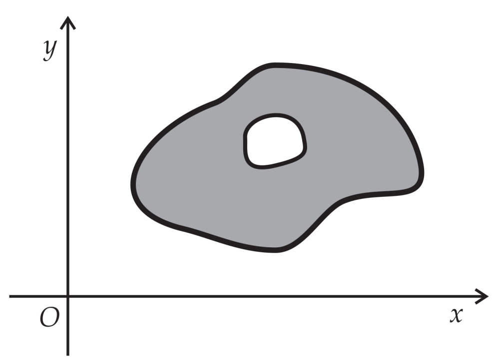
Teoremele de mai sus reprezină condiţii **necesare** ca o formă diferenţială să fie exactă. Aceste condiţii nu sunt însă neapărat şi **suficiente**, reciprocele lor neavând neapărat loc în absenţa unor condiţii auxiliare asupra domeniului D.

Domenii simplu conexe în plan

Definiţie. Fie un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$. Spunem că D este **simplu conex** dacă odată cu orice curbă închisă (C) domeniul D conţine şi interiorul acesteia.



Domeniu simplu conex



Domeniu dublu conex

Cu alte cuvinte, un domeniu simplu conex în plan nu conţine goluri, indiferent de cât de mici sunt acestea. Astfel, interioarele unui cerc sau unui pătrat sunt domenii simplu conexe. Un inel (regiunea dintre două cercuri) nu este însă un domeniu simplu conex, şi nici interiorul unui cerc din care lipseşte centrul nu este un domeniu simplu conex. În ultimul caz, „golul" constă dintr-un singur punct! Astfel de domenii vor fi numite, în general, **multiplu conexe**. Distingând după numărul de goluri, un domeniu cu un singur gol va fi numit **dublu conex**, un domeniu cu două goluri va fi numit **triplu conex**; in general, un domeniu cu $n-1$ goluri va fi numit n**-uplu conex**.

Domenii simplu conexe în spaţiu

Definiţie. Fie un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$. Spunem că D este **simplu conex** dacă odată cu orice curbă închisă (C) domeniul D conţine şi o suprafaţă netedă cu frontiera (C).

În acest caz, un domeniu simplu conex poate conţine goluri. De exemplu, domeniul dintre două sfere concentrice este simplu conex, şi tot domeniu simplu conex este interiorul unei sfere din care lipseşte centrul (sau chiar lipsesc un număr finit de puncte). Dacă domeniul nu are goluri, atunci el este simplu conex.

Pentru domenii simplu conexe, condiţiile Teoremelor 4.8 şi 4.9 sunt şi suficiente (acest lucru va fi demonstrat ulterior). Obţinem atunci următoarele consecinţe.

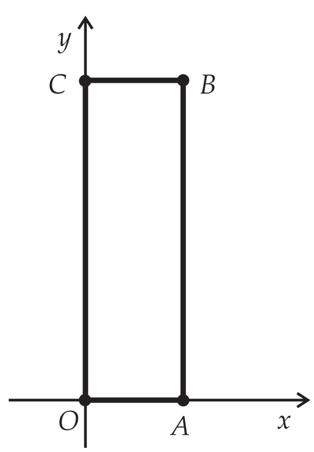
Teorema 4.10. *Fie $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe domeniul simplu conex D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. $\displaystyle\int Pdx + Qdy + Rdz$ *este independentă de drum în D.*
2. $\displaystyle\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$ *pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.*
3. $Pdx + Qdy + Rdz$ *este formă diferenţială exactă.*
4. *Are loc egalitatea*
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \text{în } D.$$

Teorema 4.11. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe domeniul simplu conex D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. $\int Pdx + Qdy$ *este independentă de drum în* D.
2. $\int_C Pdx + Qdy = 0$ *pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni* (C) *conţinută în* D.
3. $Pdx + Qdy$ *este formă diferenţială exactă.*
4. *Are loc egalitatea*
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{în } D.$$

Exemplu. Determinaţi
$$\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy,$$
unde (C) este dreptunghiul cu vârfurile $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,\pi)$, $C(0,\pi)$.



Soluţie. Să observăm mai întâi faptul că dreptunghiul din enunţ este o curbă închisă. Mai departe,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin y\right) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0,$$

de unde $\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = 0$.

Exemplu. Demonstraţi că valoarea integralei

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} yz^2 dx + xz^2 dy + 2xyzdz$$

nu depinde de arcul $\overset{\frown}{AB}$ care uneşte $A(1,0,2)$ şi $B(2,1,1)$ şi calculaţi această valoare.

Soluţie. Demonstrăm mai întâi independenţa de drum. Observăm că

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{vmatrix} &= \frac{\partial}{\partial y}(2xyz)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial z}(yz^2)\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial x}(xz^2)\vec{k} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y}(yz^2)\vec{k} - \frac{\partial}{\partial z}(xz^2)\vec{\imath} - \frac{\partial}{\partial x}(2xyz)\vec{\jmath} \\ &= 2xz\vec{\imath} + 2yz\vec{\jmath} + z^2\vec{k} - z^2\vec{k} - 2xz\vec{\imath} - 2yz\vec{\jmath} = \vec{0}, \end{aligned}$$

valoarea integralei respective fiind independentă de drum. Pentru a calcula această valoare, alegem un drum format dintr-o succesiune de segmente paralele cu axele de coordonate, anume

$$A(1,0,2) \xrightarrow[\substack{x=t \\ t\in[1,2] \\ y=0 \\ z=2 \\ dx=dt \\ dy=0 \\ dz=0}]{} A_1(2,0,2) \xrightarrow[\substack{x=2 \\ y=t \\ t\in[0,1] \\ z=2 \\ dx=0 \\ dy=dt \\ dz=0}]{} A_2(2,1,2) \xrightarrow[\substack{x=2 \\ y=1 \\ z=t \\ t\in[2,1] \\ dx=0 \\ dy=0 \\ dz=dt}]{} B(2,1,1).$$

Urmează că

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} yz^2 dx + xz^2 dy + 2xyzdz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\overline{AA_1}} yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz \\
&\quad + \int_{\overline{A_1A_2}} yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz \\
&\quad + \int_{\overline{A_2B}} yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz \\
&= \int_1^2 0dt + \int_0^1 8dt + \int_2^1 4tdt = 0 + 8t\Big|_0^1 + 2t^2\Big|_2^1 = 2.
\end{aligned}$$

Aplicaţii

4.1. *Determinaţi* $\int_C yds$*, unde* $(C): \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, \quad t \in [2,3].$

4.2. *Determinaţi* $\int_C x^3y^2ds$*, unde* $(C): \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in [-1,1].$

4.3. *Determinaţi* $\int_C (x^3 + y)ds$*, unde* $(C): y = \frac{x^3}{27}, \quad x \in [0,3].$

4.4. *Determinaţi* $\int_{AB} \frac{1}{y-x}ds$*, unde AB este segmentul cu capetele în* $A(0,3)$ *şi* $B(1,5)$.

4.5. *Determinaţi* $\int_C xyds$*, unde (C) este elipsa de ecuaţie* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

4.6. *Determinaţi* $\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$*, unde (C) este cercul de ecuaţie* $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.

4.7. *Determinaţi* $\int_C ye^{-x}dx$*, unde* $(C): \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t \end{cases}, \quad t \in [0,1].$

4.8. *Fie* $O(0,0)$, $M(1,0)$, $A(1,1)$. *Determinaţi* $\int_C (x+y)dx + xdy$ *pentru următoarele alegeri ale curbei* (C)

1. *Segmentul* OA.
2. *Porţiunea din parabola* $y = x^2$ *determinată de* O *şi* A.
3. *Reuniunea segmentelor* OM *şi* MA.

Puteţi explica rezultatul?

4.9. *Demonstraţi că următoarele forme diferenţiale sunt exacte şi precizaţi primitive ale acestora*

$$\omega_1 = (x+y)dx + (x-y)dy, \quad \omega_2 = (3x^2y + y)dx + (x^3 + x)dy$$
$$\omega_3 = (ye^x + \sin y)dx + (e^x + x\cos y)dy,$$

4.10. *Demonstraţi că următoarele integrale sunt independente de drumurile care unesc punctele A şi B şi precizaţi valorile acestora*

1. $\displaystyle\int_A^B 3x^2y dx + x^3 dy, \quad A(1,1),\, B(2,3).$

2. $\displaystyle\int_A^B (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy, \quad A(0,0),\, B(1,3).$

3. $\displaystyle\int_A^B (e^x + 2x\sin y)dx + (x^2\cos y - 3y^2)dx, \quad A(-1,0),\, B(2,2\pi).$

4. $\displaystyle\int_A^B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy, \quad A(4,3),\, B(2,1),$ *pe un drum care nu trece prin* $O(0,0)$.

5. $\displaystyle\int_A^B \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin y dx + \frac{x}{1+x^2}\cos y dy, \quad A(0,\tfrac{\pi}{2}),\, B(1,\pi).$

4.11. *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile cu derivata continuă. Demonstraţi că următoarele integrale sunt independente de drum.*

1. $\displaystyle\int f(x)dx + g(y)dy.$

2. $\displaystyle\int f(x+y)(dx+dy).$

3. $\displaystyle\int f(xy)(ydx + xdy).$

4.12. *Fie (C) cercul unitate, parcurs în sens trigonometric.*

1. *Demonstraţi că* $\displaystyle\int_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 2\pi \neq 0.$

2. *Demonstraţi că*
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
Contrazice acest lucru Teorema 4.10?

4.13. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *pentru care forma diferenţială*

$$\omega = ax^2 z dx + 2y dy + x^3 dz$$

este exactă şi precizaţi o primitivă a acesteia.

4.14. *Determinaţi* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *pentru care forma diferenţială*

$$w = (y+z)dx + (z+x)dy + f(x,y,z)dz$$

este exactă şi precizaţi o primitivă a acesteia.