Capitolul 2

INTEGRALA DEFINITĂ

Încă din antichitate, s-a pus problema determinării ariilor unor figuri geometrice care nu erau mărginite de segmente de dreaptă. Maeştri ai geometriei clasice, vechii greci s-au dovedit a fi şi precursori a ceea ce urma să devină calculul integral. Deşi in acea vreme nu exista, desigur, noţiunea de trecere la limită, acest impediment nu l-a oprit pe Eudoxius să introducă în preajma anului 370 î.Hr. metoda exhaustiunii (epuizării). În această abordare, aria măsurată se extindea pas cu pas, devenind din ce in ce mai apropiată de aria căutată.

Arhimede a folosit această metodă pentru a calcula (în mod exact!), în jurul anului 230 î.Hr., aria de sub graficul unei parabole, oferind cu această ocazie primul exemplu de serie convergentă, şi pentru a aproxima ariile cercurilor şi elipselor. De aceeaşi atenţie din partea sa s-a bucurat şi calculul volumelor unor corpuri cum ar fi sferele şi paraboloizii de revoluţie.

Bazele calculului integral au fost puse de către Isaac Newton, în 1666, pornind de la probleme de natură cinematică. Pentru Newton, calculul integral însemna găsirea „fluenţilor" atunci cand sunt cunoscute „fluxiunile" (derivatele), obiectivul principal fiind determinarea legii de mişcare a unui punct material atunci când este cunoscută permanent viteza sa. Din motive conjuncturale, tratatul respectiv nu a fost publicat în mod formal decât după mai mult timp de la redactarea sa, deşi conţinutul devenise cunoscut matematicienilor vremii.

În vreme ce punctul de vedere al lui Newton era, într-un fel, de natură geometrică, Gottfried Wilhelm von Leibniz a contribuit la punerea bazelor calculului integral cu un punct de vedere ceva mai apropiat de cel al analizei de azi şi sistematizat mai convenabil din punct de vedere analitic. Abordarea propusă de Leibniz consta în utilizarea proprietăţile seriilor convergente (în fapt, Leibniz şi-a numit abordarea „calculus summatorius", numele de calcul integral fiind sugerat ulterior de Jacob Bernoulli, în 1690). Tot lui Leibniz i se datorează utilizarea cantităţilor infinitezimale dx şi dy şi notaţiile pentru acestea, precum şi introducerea semnului $\int$ pentru operaţia de integrare.

Leibniz a fost cel care şi-a publicat mai întâi propria abordare (1684, 1686), lucru care a dat naştere unei controverse intense privind adevăratul creator al calculului integral, punctul central al acesteia fiind măsura în care Leibniz a cunoscut rezultatele lui Newton. Astăzi, atât lui Newton cât şi lui Leibniz li se acordă credit pentru dezvoltarea independentă a noţiunilor de bază ale calculului integral.

Definiţia actuală a noţiunii de integrală i se datorează lui Bernhard Riemann (1854), extinderi ale acestei noţiuni fiind introduse, între alţii de Thomas Joannes Stieltjes (1894, integrala Riemann-Stieltjes) şi Henri Lebesgue (1904, integrala Lebesgue).

2.1 Definiţia noţiunii de integrală definită

Diviziuni ale unui interval

Fiind dat un interval mărginit $[a, b]$, numim **diviziune** a sa o mulţime ordonată

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \text{cu} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Punctele $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc **nodurile** diviziunii, iar lungimea maximă a **intervalelor elementare** $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ astfel determinate,

$$\|\Delta\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i),$$

se numeşte **norma** diviziunii Δ. În situaţia în care toate intervalele elementare ale diviziunii Δ au aceeaşi lungime, egală cu $\frac{1}{n}(b-a)$, diviziunea se numeşte **echidistantă**.

Exemplu. Mulţimea

$$\Delta_1 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\right\}$$

este o diviziune a intervalului $[0, 1]$, cu norma

$$\|\Delta_1\| = \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5},$$

fără a fi echidistantă. Mulţimea

$$\Delta_2 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

este o diviziune echidistantă a intervalului $[0, 1]$, toate intervalele elementare ale diviziunii având lungimea $\frac{1}{5}$.

Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui interval $[a, b]$ se notează $\mathcal{D}_{[a,b]}$.

Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\},$$

astfel încât $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare interval elementar se află câte un punct intermediar).

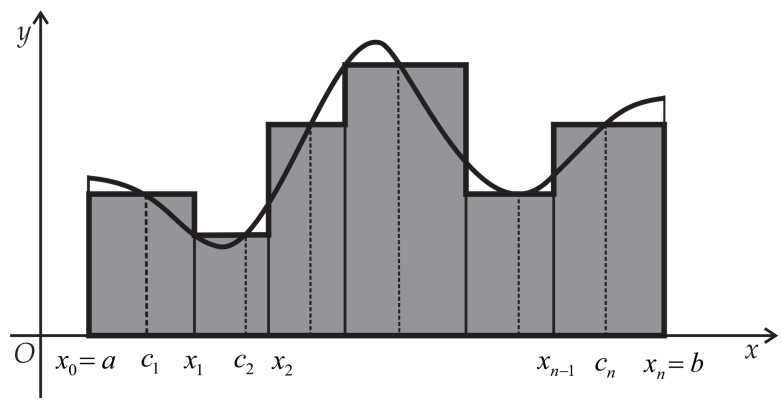
Sume Riemann. Interpretare geometrică

Fiind date o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a intervalului $[a, b]$ şi $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu lungimea intervalului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).

Pentru fixarea ideilor, să presupunem că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, graficul funcţiei f fiind atunci situat în întregime deasupra axei Ox. Atunci $f(c_1)(x - x_0)$ reprezintă aria unui dreptunghi care aproximează aria trapezului curbiliniu delimitat de graficul funcţiei f, dreptele $x = x_0$, $x = x_1$ şi axa Ox (primul trapez curbiliniu dintre cele n în care a fost împărţită porţiunea dintre graficul funcţiei f şi axa Ox). Desigur, această aproximare este cu atât mai bună (adică eroarea de aproximare este mai mică) cu cât x_1 este mai apropiat de x_0.



Ceilalţi termeni ai sumei Riemann având interpretări similare, obţinem că suma Riemann reprezintă o aproximare pentru aria porţiunii dintre graficul funcţiei f, axa Ox, paralela „iniţială" la Oy, $x = a$, şi paralala „finală" la Oy, $x = b$. Această aproximare este cu atât mai bună cu cât **toate** lungimile de intervale elementare $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$ sunt mai mici.

Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe $[a, b]$ (pe scurt, f este **integrabilă** pe $[a, b]$) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_{[a,b]}$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

Astfel, pentru o normă a diviziunii Δ suficient de mică, suma Riemann $\sigma_\Delta(f, C)$ reprezintă o aproximare „suficient de bună" a lui I, indiferent de alegerea sistemului de puncte intermediare C.

Integrala Riemann

Numărul I de mai sus se numeşte **integrala definită**, sau **integrala Riemann**, a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ şi se notează

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Să obsevăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Numerele a şi b se numesc **limitele de integrare**, intervalul $[a, b]$ se numeşte **interval de integrare**, iar variabila x se numeşte **variabilă de integrare**.

Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 2.1. *Fie o funcţie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. f *este integrabilă pe* $[a, b]$.
2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni* $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ *ale intervalului* $[a, b]$ *cu* $\|\Delta_n\| \to 0$*, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate* $(C_n)_{n\geq 0}$*, şirul sumelor Riemann* $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ *este convergent.*

Cea de-a doua afirmaţie pare, la prima vedere, imprecisă. Mai precis, se cere doar ca limita unui şir de sume Riemann să fie finită, apărînd, la prima vedere, posibilitatea ca şiruri diferite de sume Riemann să tindă la limite diferite, adică să existe „candidaţi" diferiţi pentru $\int_a^b f(x)dx$. În fapt, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a acestor limite reprezintă $\int_a^b f(x)dx$.

Diferenţa între integrala nedefinită şi integrala definită a unei funcţii

Integrala nedefinită a unei funcţii f este o **mulţime de funcţii**, pe când integrala sa definită este un **număr**.

Inversarea limitelor de integrare

Observăm din cele de mai sus că nu este neapărat necesar ca $a < b$. Comparând sumele Riemann obţinute pentru intervalele $[a, b]$ şi $[b, a]$ (şi aceeaşi diviziune Δ şi acelaşi sistem de puncte intermediare C), observăm că a doua este opusă primei, întrucât $(x_i - x_{i-1})$ se transformă în $(x_{i-1} - x_i) = -(x_i - x_{i-1})$. Urmează imediat că

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(**inversarea limitelor de integrare are ca efect inversarea semnului integralei**).

Interval de integrare redus la un punct

Prin definiţie (consistentă cu observaţia de mai sus şi cu interpretarea geometrică a integralei definite)

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

(**dacă lungimea intervalului de integrare este** 0**, atunci şi valoarea integralei este** 0)

Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, putem observa că, dacă $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

întrucât toate sumele Riemann asociate sunt nule.

2.2 Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

După definirea noţiunii de funcţie integrabilă, este natural să căutăm legăturile între integrabilitate şi alte proprietăţi uzuale ale unor funcţii (continuitate, monotonie, mărginire).

Ţinând seama de motivaţia practică a introducerii noţiunii de integrală definită (calculul unor arii), ar fi natural ca funcţiile continue pe un interval $[a, b]$ să fie şi integrabile. Ţinând seama şi de faptul că integrala definită a unei funcţii este, în fapt, limita (finită) a unui şir (convergent) de sume Riemann, cum un şir convergent este mărginit, ne putem aştepta prin analogie ca şi o funcţie integrabilă să fie mărginită. Prin acelaşi gen de analogie, cum un şir monoton şi mărginit este convergent, ne putem aştepta ca o funcţie monotonă şi mărginită să fie integrabilă.

Teorema 2.2. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.*

Teorema 2.3. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$. Atunci f este mărginită pe $[a, b]$.*

În fapt, putem preciza o proprietate mai generală, dar a cărei prezentare detaliată depăşeşte cadrul acestui curs.

Teorema 2.4. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă f este mărginită şi continuă „aproape peste tot” pe $[a, b]$.*

Aici, continuă „aproape peste tot" înseamnă faptul că mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f are măsura Lebesgue 0, în sensul că poate fi acoperită cu o reuniune numărabilă de intervale cu sumă a lungimilor oricât de mică. De exemplu, o funcţie cu un număr finit de puncte de discontinuitate (caz des întâlnit în practică) este continuă „aproape peste tot".

Teorema 2.5. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f monotonă şi mărginită pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.*

2.3 Formula Leibniz-Newton

Formula următoare reprezintă legătura dintre noţiunile de integrală definită, respectiv nedefinită.

Teorema 2.6. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât f este integrabilă pe $[a, b]$ şi admite primitive pe $[a, b]$. Atunci*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{notaţie}}{=\!=} F(x)\Big|_a^b,$$

F fiind o primitivă oarecare a lui f.

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că valoarea expresiei $F(b) - F(a)$ nu depinde de primitiva F, întrucât două primitive F_1, F_2 diferă printr-o constantă, $F_2 = F_1 + C$. Atunci

$$F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + C) - (F_1(a) + C) = F_1(b) - F_1(a).$$

Fie F o primitivă a lui f. Atunci F este derivabilă pe $[a, b]$, iar

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a, b].$$

Fie $\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Aplicând teorema valorii medii a lui Lagrange funcţiei F pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, obţinem că există $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ este atunci

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]\\ &= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(x_n) - F(x_{n-1})]\\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece f este integrabilă pe $[a, b]$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca

$$\left|\sigma_\Delta(f, C) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon \implies \left|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

pentru orice Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice sistem C de puncte intermediare asociat lui Δ ca mai sus. Cum ε era arbitrar, urmează că

$$F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

■

În fapt, prin intermediul formulei Leibniz-Newton, calculul unei integrale definite se reduce la calculul unei primitive şi la scăderea valorilor acestei primitive în capetele intervalului de integrare, mai precis din valoarea în capătul superior scăzându-se valoarea în capătul inferior.

Exemplu.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) - \operatorname{tg} 0 = 1,$$

deoarece

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C},$$

o primitivă a funcţiei $\frac{1}{\cos^2}$ fiind funcţia tg.

2.4 Operaţii cu funcţii integrabile

Prin intermediul formulei Leibniz-Newton, numită şi **formula fundamentală a calculului integral**, formulelor de calcul al primitivelor pentru functii uzuale le corespund formule de calcul pentru integrale definite.

Teorema 2.7. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$ şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

   Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe $[a, b]$, iar

   $$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

   *(**integrala sumei este egală cu suma integralelor**), respectiv*

   $$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

   *(**integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor**).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

   Funcţia cf este integrabilă pe $[a, b]$, iar

   $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

   *(**o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei**).*

Menţionăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs şi raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor şi nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 2.8. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$ şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci*

$c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$$

Proprietatea are loc şi pentru mai mult de două funcţii. Prin inducţie matematică se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 2.9. *Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, f_1, $f_2, \ldots, f_n$ integrabile pe $[a, b]$ şi $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))dx \\
&\quad = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)dx.
\end{aligned}$$

2.5 Metode de calcul

Din nou, metodelor de calcul pentru integrale nedefinite le corespund prin intermediul formulei Leibniz-Newton metode de calcul similare pentru integrale definite.

2.5.1 Metoda de integrare prin părţi

Teorema 2.10. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile, cu f', g' continue. Atunci $f'g$ şi fg' sunt integrabile pe $[a, b]$, iar*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Demonstraţie. Deoarece f', g' sunt continue, urmează că $f'g$ şi fg' sunt integrabile pe $[a, b]$, fiind continue pe acest interval, ca produse de funcţii continue. Întrucât

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a, b],$$

funcţia produs, fg, este o primitivă a funcţiei $f'g+fg'$. Aplicând formula Leibniz-Newton, urmează că

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)\Big|_a^b\\
&\implies \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b\\
&\implies \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx,
\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Exemplu. Determinaţi $\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Soluţie. Întrucât x este o funcţie polinomială, încercăm să scriem **cealaltă** funcţie de sub integrală ca o derivată, sub forma $\cos x = (\sin x)'$. Urmează că

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\cos x dx &= \int_0^{\pi} x(\sin x)' dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x)'\sin x dx\\
&= x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_0^{\pi}\\
&= x\sin x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_0^{\pi} = 0-2 = -2.
\end{aligned}$$

2.5.2 Prima metodă de schimbare de variabilă

Teorema 2.11. *Fie $[a,b],[c,d]$ intervale şi $[a,b]\xrightarrow{u}[c,d]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă cu derivata continuă pe $[a,b]$;*
2. *f continuă pe $[c,d]$;*

Atunci $(f \circ u)u'$ *este integrabilă pe* $[a, b]$, *iar*

$$\int_a^b (f \circ u)(x)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du,$$

Remarcăm faptul că atunci când se schimbă variabila de integrare se schimbă şi limitele de integrare.

Demonstraţie. Deoarece $(f \circ u)$ este funcţie continuă pe $[a, b]$ (ca o compunere de funcţii continue), iar u' este de asemenea continuă pe $[a, b]$, produsul lor $(f \circ u)u'$ este funcţie continuă pe $[a, b]$, fiind deci şi integrabilă pe acest interval.

Deoarece funcţia f este continuă, ea admite primitive. Fie F o primitivă a sa. Atunci $F' = f$.

Conform formulei de derivare a funcţiei compuse,

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x) = (f \circ u)(x)u'(x),$$

şi atunci $F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ u)u'$, iar conform formulei lui Leibniz-Newton

$$\int_a^b (f \circ u)(x)u'(x)dx = (F \circ u)(x) \Big|_a^b = F(u(b)) - F(u(a)).$$

De asemenea, tot conform formulei Leibniz-Newton,

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du = F(u) \Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)),$$

deci

$$\int_a^b (f \circ u)(x)u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Exemplu. Fie integrala

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

Atunci

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx.$$

Notând $u = \operatorname{arctg} x$, obţinem că

$$du = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Calculăm noile limite de integrare, înlocuindu-le pe cele vechi în schimbarea de variabilă. Astfel,

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies u = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ x = 1 &\implies u = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Înlocuind du şi u (în această ordine), urmează că

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u du = \frac{u^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

2.5.3 A doua metodă de schimbare de variabilă

Teorema 2.12. *Fie $[a, b], [c, d]$ intervale şi $[a, b] \xrightarrow{u} [c, d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele proprietăţi*

1. *u este derivabilă şi inversabilă, iar $v = u^{-1}$ este derivabilă cu derivata continuă pe $[c, d]$;*
2. *f este continuă pe $[c, d]$;*

Atunci $(f \circ u)$ este integrabilă pe $[a, b]$, iar

$$\int_a^b (f \circ u)(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \cdot v'(u) du.$$

Practic, ca şi pentru integrale nedefinite, cea de-a doua metodă de schimbare de variabilă corespunde situaţiei în care nu se poate pune în evidenţă sub integrala iniţială derivata schimbării de variabilă.

2.6 Proprietăţi ale integralei definite

2.6.1 Proprietăţi în raport cu intervalul

Restrângerea intervalului de integrare

Teorema 2.13. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe orice subinterval $[c, d] \subset [a, b]$.*

Extinderea intervalului de integrare. Aditivitatea în raport cu intervalul

Teorema 2.14. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Dacă f este integrabilă atât pe $[a, c]$ cât şi pe $[c, b]$, atunci este integrabilă pe întreg intervalul $[a, b]$, iar*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.1}$$

Să observăm însă că, în ipoteza în care toate cele trei integrale sunt bine definite, nu este neapărat necesar ca $c \in (a, b)$. În fapt, dacă integralele sunt bine definite, egalitatea are loc indiferent de poziţia lui c faţă de a şi b.

Într-adevăr, pentru $c > b$, urmează că $b \in (a, c)$, iar conform Teoremei 2.14 are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx,$$

de unde

$$\int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Cum $\displaystyle\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$ (inversarea limitelor de integrare are ca efect inversarea semnului integralei), urmează că (2.1) are loc şi pentru $c > b$. Un raţionament similar se poate face şi pentru $c < a$.

Pentru $c = a$, urmează că $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$, deci

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = 0 + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

un raţionament similar având loc şi pentru $c = b$.

Integrarea funcţiilor pare şi impare

Reamintim că o funcţie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, se numeşte **pară** dacă

$$f(-x) = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [-a, a]$$

(semnul $-$ dispare, aşa cum dispare când -1 este ridicat la putere pară). De asemenea, dacă

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{pentru orice } x \in [-a, a]$$

(semnul $-$ se păstrează, aşa cum se păstrează când -1 este ridicat la putere impară), funcţia f se numeşte **impară**.

Teorema 2.15. *Fie $[-a, a]$ un interval simetric faţă de origine, $a > 0$, şi fie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[-a, a]$.*

1. *Dacă f este impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.*
2. *Dacă f este pară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.*

Exemplu. Determinaţi

$$\int_{-1}^{1} x^7\sqrt{1 + x^2}dx.$$

Intervalul de integrare, $[-1, 1]$, este simetric faţă de origine. Rămâne să determinăm paritatea funcţiei de sub integrală. Fie

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^7\sqrt{1 + x^2}.$$

Atunci

$$f(-x) = (-x)^7\sqrt{1 + (-x)^2} = -x^7\sqrt{1 + x^2} = -f(x), \quad x \in [-1, 1],$$

deci f este impară, iar

$$\int_{-1}^{1} x^7\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

Practic, funcţiile impare „păstrând semnul", integrala pe partea negativă $[-a, 0]$ a intervalului $[-a, a]$ are semn schimbat faţă de integrala pe partea pozitivă $[0, a]$ a intervalului $[-a, a]$, iar suma lor este 0.

Funcţiile pare „eliminând semnul", integrala pe partea negativă $[-a, 0]$ a intervalului $[-a, a]$ este egală cu integrala pe partea pozitivă $[0, a]$ a intervalului $[-a, a]$, suma lor fiind dublul integralei pe partea pozitivă $[0, a]$.

2.6.2 Proprietăţi în raport cu funcţia

Vom observa în cele ce urmează că integrala definită păstrează semnul funcţiei de integrat şi inegalităţile nestricte între funcţii. În plus, inegalitatea strictă într-un punct de continuitate a funcţiei de integrat atrage inegalitatea strictă pentru integrală.

Păstrarea inegalităţilor nestricte

Teorema 2.16. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$.*

1. *Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$, atunci*
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
2. *Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$, iar $[c, d] \subset [a, b]$, atunci*
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d g(x)dx.$$
3. *Dacă $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$, atunci*
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstraţie. 1. Fie $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ un şir de diviziuni ale lui $[a, b]$ şi $(C_n)_{n\geq 0}$ un şir de sisteme de puncte intermediare asociate. Să notăm
$$\Delta_n = \left\{x_n^0, x_n^1, \ldots, x_n^{N_n}\right\}; \quad C_n = \left\{c_n^1, c_n^2, \ldots, c_n^{N_n}\right\}.$$
Atunci şirul sumelor Riemann corespunzătoare, $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent la $\int_a^b f(x)dx$, conform Teoremei 2.1. Deoarece
$$\sigma_{\Delta_n}(f, C_n) = \sum_{i=1}^{N_n} f(c_n^i)(x_n^i - x_n^{i-1}) \geq 0,$$

urmează că $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este şir cu termeni pozitivi, iar limita sa, adică $\int_a^b f(x)dx$ este tot pozitivă, ceea ce trebuia demonstrat.
2. Deoarece

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx,$$

iar $\int_a^c f(x)dx \geq 0$, $\int_d^b f(x)dx \geq 0$ conform 1., urmează concluzia.
3. Deoarece

$$f(x) \geq g(x), \quad \text{pentru orice } x \in [a, b],$$

urmează că

$$f(x) - g(x) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in [a, b].$$

Conform 1., urmează că

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0 \implies \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

■

Corolar 2.16.1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *integrabilă pe* $[a, b]$. *Dacă*

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \textit{pentru orice } x \in [a, b],$$

atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Demonstraţie. Deoarece

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{pentru orice } x \in [a, b],$$

iar inegalităţile nestricte între funcţii se păstrează prin integrare, urmează că

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx \implies mx\Big|_a^b \leq \int_a^b f(x)dx \leq Mx\Big|_a^b$$
$$\implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

■

Exemplu. Demonstraţi că

$$\sqrt{3} \leq \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \leq \sqrt{6}.$$

Soluţie. Întrucât avem de determinat valorile minime şi maxime ale unei integrale, încercăm să determinăm valorile minime şi maxime ale funcţiei de sub integrală. Deoarece această funcţie este

$$f : [2,5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

(valorile funcţiei în afara intervalului de integrare nu interesează), este necesar să stabilim monotonia funcţiei de sub radical, anume

$$g : [2,5] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Pentru a stabili monotonia unei funcţii, putem utiliza semnul derivatei sale. Observăm că

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \geq 0,$$

deci g este crescătoare pe $[2,5]$, şi la fel este şi $f = \sqrt{g}$. Atunci valorile minime şi maxime ale lui f sunt

$$m = f(2) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad M = f(5) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Conform corolarului, urmează că

$$\sqrt{\frac{1}{3}}(5-2) \leq \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \leq \sqrt{\frac{2}{3}}(5-2),$$

de unde concluzia.

Corolar 2.16.2. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a,b]$. Atunci $|f|$ este integrabilă pe $[a,b]$, iar*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Păstrarea inegalităţilor stricte

Teorema 2.17. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$.*

1. *Dacă $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$ şi există $x_0 \in [a, b]$ astfel ca*
$$f(x_0) > 0, \text{ iar } f \text{ este continuă în } x_0,$$
atunci
$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$
2. *Dacă $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$, şi există $x_0 \in [a, b]$ astfel ca*
$$f(x_0) > g(x_0), \text{ iar } f, g \text{ sunt continue în } x_0,$$
atunci
$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplu. Fie $n \in \mathbb{N}$. Care număr este mai mare,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \;\text{ sau }\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx?$$

Soluţie. Întrucât integralele au acelaşi interval de integrare, $[0, \frac{\pi}{2}]$, încercăm să stabilim o inegalitate între funcţiile de integrat. Pentru $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, urmează că $\sin x \in [0, 1]$, adică $\sin x$ este pozitiv subunitar. Atunci,
$$\sin^n x \geq \sin^{n+1} x, \quad \text{pentru orice } x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$
deoarece un număr pozitiv subunitar scade prin ridicarea la o putere mai mare. Inegalitatea între funcţii se păstrează şi între integrale, deci
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx.$$
În fapt, deoarece ambii integranzi sunt funcţii continue, iar
$$\sin^n(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n > \sin^{n+1}(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1},$$
(există inegalitate strictă într-un punct comun de continuitate) urmează că
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx.$$

Teorema de medie

Teorema 2.18. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*,* f *continuă pe* $[a, b]$*. Atunci există* $c \in [a, b]$ *astfel încât*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Demonstraţie. Deoarece f este continuă pe $[a, b]$, ea este mărginită pe acest interval, adică există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{pentru orice } x \in [a, b].$$

Atunci, conform Corolarului 2.16.1,

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a),$$

adică

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \leq M.$$

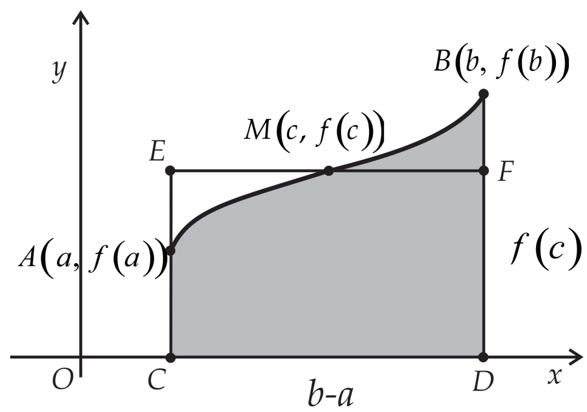
Deoarece f este continuă pe $[a, b]$, ea îşi atinge atât marginea inferioară m şi marginea superioară M, şi ia de asemenea orice valoare intermediară dintre ele, în particular $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$. Rezultă de aici că există $c \in [a, b]$ astfel încât

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a},$$

de unde concluzia. ■

Interpretare geometrică

Vom observa ulterior că $\int_a^b f(x)dx$ reprezintă aria subgraficului funcţiei x (a trapezului curbiliniu $ABCD$). Teorema de medie afirmă faptul că există un punct M pe graficul funcţiei f astfel încât dreptunghiul $CDFE$ determinat de dreptele $x = a$, $x = b$, axa Ox şi paralela prin M la axa Ox are aria egală cu aria trapezului curbiliniu. Altfel spus, „porţiunea excedentară" AEM a dreptunghiului compensează „porţiunea lipsă" BMF.



Teorema funcţiei modificate

Teorema 2.19. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a,b]$. Dacă modificăm valorile lui f într-un număr finit de puncte din $[a,b]$, obţinând în acest mod o nouă funcţie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, atunci*

1. *g este de asemenea integrabilă pe $[a,b]$;*
2. *valoarea integralei sale rămâne aceeaşi, adică*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Practic, diferenţa între subgraficul lui f şi subgraficul lui g constă într-o reuniune finită de segmente, mulţime care are aria nulă. Din acest motiv, cele două subgrafice au aceeaşi arie, adică $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

2.7 Integrala definită ca funcţie de limita superioară

Am afirmat în capitolul precedent că orice funcţie continuă admite primitive. Pentru a dovedi acest lucru, demonstrăm mai întâi următoarea formulă de derivare a integralei definite ca funcţie de limita superioară de integrare (limita inferioară fiind constantă).

Teorema 2.20. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$. Atunci*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

este derivabilă pe $[a,b]$, iar

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), \text{ pentru orice } x \in [a,b].$$

Altfel spus, derivarea acestui tip de integrală se realizează prin înlocuirea variabilei x sub integrală şi apoi „eliminarea reciprocă" a lui $'$, $\int$ şi dx (reamintim că integrarea şi derivarea sunt „operaţii inverse").

Demonstraţie. Fie $x_0 \in [a,b]$ oarecare. Fie, de asemenea, $x \in [a,b]$. Atunci

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt.$$

De aici

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt - f(x_0)\right|$$
$$= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)dt - (x - x_0)f(x_0)\right)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt\right)\right|.$$

Conform proprietăţilor funcţiei modul, se obţine

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\, dt.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece f este continuă în x_0, există $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon, x_0)$ astfel încât, pentru orice $x \in [a,b]$ cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ urmează că $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Se obţine de aici că dacă $x \in [a,b]$ cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, iar t este între x_0 şi x, atunci

$$|t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Urmează atunci că, pentru orice $x \in [a,b]$ cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\varepsilon|x - x_0| = \varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

deci F este derivabilă în x_0, iar $F'(x_0) = f(x_0)$. Deoarece x_0 era oarecare în $[a,b]$, urmează concluzia. ∎

Exemplu.

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t dt\right)' = \sin x$$

O consecinţă imediată a acestei formule este faptul că o primitivă a lui f este

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

aceasta având în plus şi proprietatea că

$$F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Am demonstrat deci următorul rezultat.

Teorema 2.21. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$. Atunci f admite primitive pe $[a, b]$.*

Formula de derivare care face obiectul Teoremei 2.20 este valabilă doar atunci când limita inferioară de integrare este o constantă, iar cea superioară este x, şi nu o altă funcţie în care x apare într-un mod mai complicat. Într-un caz mai general, funcţionează următoarea formulă de derivare a unei integrale definite în care atât limita inferioară de integrare cât şi cea superioară sunt variabile, motivată de formula de derivare a funcţiei compuse.

Teorema 2.22. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar $u, v : [c, d] \to [a, b]$ funcţii derivabile, cu derivata continuă. Atunci*

$$F : [c, d] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

este derivabilă pe $[c, d]$, iar

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)' = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x).$$

Demonstraţia este similară demonstraţiei Teoremei 2.20.

Exemplu. Demonstraţi că funcţia

$$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt,$$

este strict descrescătoare.

Soluţie. Pentru a studia monotonia funcţiei f, calculăm derivata acesteia, observând că

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt\right)' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' - e^{\sin x} \cdot (\sin x)' \\ &= -e^{\cos x} \sin x - e^{\sin x} \cos x < 0, \quad \text{pentru } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{aligned}$$

de unde concluzia.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă $T > 0$. Demonstraţi că

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(a) = \displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx$. Atunci

$$F'(a) = f(a+T) - f(a).$$

Deoarece f este periodică, cu perioadă T, urmează că $f(a+T) = f(a)$, iar $F'(a) = 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, de unde F ia o valoare constantă. Atunci

$$F(a) = F(0) = \int_0^T f(t)dt, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R},$$

deci

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Proprietatea de mai sus afirmă faptul că, pentru o funcţie periodică, integrala pe un interval de lungime egală cu o perioadă ia o valoare constantă.

2.8 Integrale dependente de parametri

2.8.1 Recunoaşterea parametrului

În unele situaţii, limitele de integrare sau integrandul pot depinde de valorile unui parametru. Astfel, o integrală de tipul

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$$

depinde de valorile parametrului t (nu şi de ale lui x, care este variabilă de integrare; variabila de integrare „dispare" după calculul integralei definite). Similar, o integrală de tipul

$$G(x) = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,t)dt$$

depinde de valorile parametrului x (nu şi de ale lui t, întrucât t este acum variabilă de integrare).

Integrala ca funcţie de parametru

Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi fie $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ două funcţii de asemenea continue. Atunci integrala $\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$ există pentru orice valoare a lui $t \in [a,b]$ (întrucât integrandul este funcţie continuă de variabila de integrare, x), valoarea ei depinzând însă de valoarea parametrului t. Această integrală defineşte funcţia

$$F : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx.$$

2.8.2 Continuitatea în funcţie de parametru

Funcţia $F = F(t)$ s-a obţinut prin integrarea (în raport cu x) a unei funcţii continue $f = f(t,x)$. O întrebare naturală este dacă după integrare (operaţie după care „dispare" x), rezultatul rămâne funcţie continuă în raport cu variabila rămasă, t. Răspunsul la această întrebare este afirmativ.

Teorema 2.23. *Fie* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi fie* $\alpha, \beta : [c,d] \to$

$[a, b]$ două funcţii continue. Atunci funcţia

$$F : [c, d] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx,$$

este continuă pe $[c, d]$.

Trecere la limită în funcţie de parametru

Întrucât F este funcţie continuă, operaţia de aplicare a lui F unui argument comută cu operaţia de calculare a limitei, sub forma

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0), \quad \text{pentru orice } t_0 \in [a, b].$$

Explicitând această relaţie, obţinem următorul rezultat.

Teorema 2.24. *Fie $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, fie $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ două funcţii continue şi fie $t_0 \in [a, b]$. Atunci*

$$\lim_{t\to t_0} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx = \int_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x, t_0)dx.$$

Limite de integrare independente de valorile parametrului

În cazul în care limitele de integrare nu depind de valorile parametrului t, ţinând seama şi de faptul că

$$\lim_{t\to t_0} f(x, t) = f(x, t_0),$$

datorită continuităţii funcţiei f, obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.24.1. *Fie $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, $\alpha, \beta \in [c, d]$ şi $t_0 \in [a, b]$. Atunci*

$$\lim_{t\to t_0} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t_0)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{t\to t_0} f(x, t)dx.$$

În acest caz, putem spune că **operaţia de calculare a integralei definite comută cu operaţia de calculare a limitei**.

2.8.3 Derivabilitatea în funcţie de parametru

Am văzut în cele de mai sus că dacă atât limitele de integrare cât şi integrandul sunt funcţii continue, continuitatea se păstrează şi după integrare, în raport cu variabila rămasă. Un rezultat oarecum asemănător are loc şi pentru derivabilitate.

Teorema 2.25. *Fie* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, cu* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *continuă, şi fie* $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ *două funcţii derivabile. Atunci funcţia*

$$F : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx,$$

este derivabilă pe $[c,d]$, *şi*

$$F'(t) = \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx\right)' = f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Limite de integrare independente de valorile parametrului

În cazul în care limitele de integrare nu depind de valorile parametrului t, obţinem următorul rezultat.

Corolar 2.25.1. *Fie* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă, cu* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *continuă şi fie* $\alpha, \beta \in [c,d]$. *Atunci*

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dx\right)' = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

În acest caz, putem spune că **derivarea se poate face sub semnul integral**.

Exemplu. Ştiind că $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}dx = \frac{\ln(1+t)}{t}$, calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+xt)^2}dx$.

Soluţie. Suntem în ipotezele în care derivarea se poate face sub semnul integral. Obţinem că

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{1+xt}dx\right)' = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+xt}\right)dx = \int_0^1 \left(-\frac{x}{(1+xt)^2}\right)dx$$
$$= -\int_0^1 \frac{x}{(1+xt)^2}dx.$$

Conform ipotezei,

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{1+xt}dx\right)' = \left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)' = \frac{\frac{1}{1+t}\cdot t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)},$$

de unde

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+xt)^2}dx = -\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}dx$.

Soluţie. Are loc egalitatea

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}dx = \frac{1}{t}\operatorname{arctg}\frac{x}{t}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{t}\operatorname{arctg}\frac{1}{t}.$$

Suntem în ipotezele în care derivarea se poate face sub semnul integralei. Obţinem că

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}dx\right)' = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{x^2+t^2}\right)dx = \int_0^1 \frac{-2t}{(x^2+t^2)^2}dx$$
$$= -2t\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}dx.$$

De asemenea,

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}dx\right)' = \left(\frac{1}{t}\operatorname{arctg}\frac{1}{t}\right)' = \left(-\frac{1}{t^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{t^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} - \frac{1}{t(t^2+1)}.$$

Urmează atunci că

$$-2t\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}dx = -\frac{1}{t^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} - \frac{1}{t(t^2+1)},$$

adică

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2}dx = \frac{1}{2t^3}\operatorname{arctg}\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2(t^2+1)}.$$

2.9 Aplicaţii ale integralei definite

2.9.1 Aria subgraficului unei funcţii

Funcţii cu semn pozitiv

Definiţie. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Vom numi **subgrafic** al funcţiei f mulţimea Γ_f definită prin

$$\Gamma_f = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

situată între dreptele verticale $x = a$ şi $x = b$, axa Ox şi graficul funcţiei f.

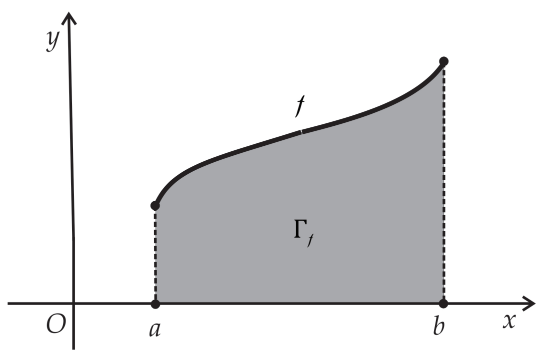


Figura 2.1: Subgraficul unei funcţii pozitive f.

Teorema 2.26. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci aria lui Γ_f este*

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Funcţii cu semn oarecare

Dacă funcţia f nu păstrează semn constant pozitiv, Γ_f se defineşte prin

$$\Gamma_f = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \text{ sau } 0 \geq y \geq f(x)\},$$

fiind situată între dreptele verticale $x = a$ şi $x = b$, axa Ox şi graficul funcţiei f (acum putându-se afla, parţial sau total şi deasupra graficului funcţiei f).

Se poate observa că dacă f păstrează semn constant pozitiv, atunci definiţia coincide cu cea de mai sus. Aria lui Γ_f poate fi calculată şi în acest caz printr-o formulă asemănătoare.

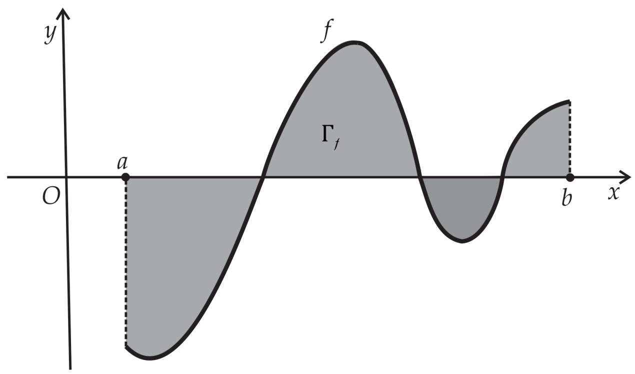


Figura 2.2: Subgraficul unei funcţii cu semn oarecare f.

Teorema 2.27. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe $[a, b]$, cu semn oarecare. Atunci aria lui Γ_f este*

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Desigur, modulul este necesar datorită faptului că aria calculată trebuie să fie pozitivă, iar funcţia f nu are, în cazul de faţă, această proprietate.

2.9.2 Aria mulţimii mărginite de graficele a două funcţii

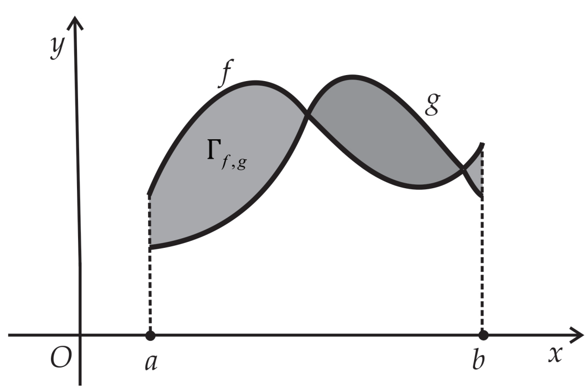


Figura 2.3: Mulţimea mărginită de graficele a două funcţii f şi g.

Definiţie. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$. Numim **mulţimea măr-**

ginită de graficele funcţiilor f şi g mulţimea $\Gamma_{f,g}$ definită prin

$$\Gamma_{f,g} = \{(x, y); a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x) \text{ sau } g(x) \le y \le f(x)\}$$

situată între dreptele verticale $x = a$, $x = b$, şi graficele funcţiilor f, g.

Teorema 2.28. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$. Atunci aria lui $\Gamma_{f,g}$ este*

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$

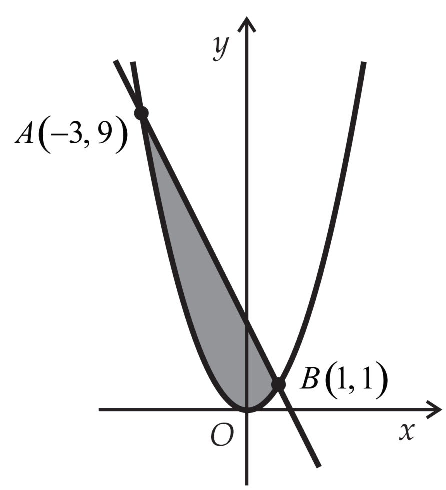
Dacă una dintre funcţii ia tot timpul valori mai mari (graficul său este deasupra graficului celeilalte), atunci se poate renunţa la modul.

Corolar 2.28.1. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe $[a, b]$, astfel încât $f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci aria lui $\Gamma_{f,g}$ este*

$$\textit{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx.$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului plan mărginit de graficele funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 - 2x$.

Domeniul plan mărginit de graficele funcţiilor f, g este cel haşurat în figură. Do-



meniul de integrare se obţine determinând abscisele punctelor de intersecţie. La rândul lor, acestea se obţin rezolvând sistemul format de ecuaţiile graficelor celor două funcţii, anume

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3 - 2x. \end{cases}$$

Atunci $x^2 = 3 - 2x$, de unde $x^2 + 2x - 3 = 0$, ecuaţie cu soluţiile $x_1 = -3$ şi $x_2 = 1$. Din reprezentarea grafică, $g \geq f$ pe domeniul de intersecţie (acest lucru se poate demonstra şi algebric). Atunci aria căutată este

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{1} \left[(3 - 2x) - x^2 \right] dx &= \int_{-3}^{1} 3dx - \int_{-3}^{1} 2xdx - \int_{-3}^{1} x^2 dx \\ &= 3x \Big|_{-3}^{1} - 2\frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^{1} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^{1} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

2.9.3 Centrul de masă al unei plăci plane omogene

Teorema 2.29. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f continuă pe $[a, b]$ şi neidentic nulă. Atunci coordonatele centrului de masă al lui Γ_f, privit ca o placă plană* **omogenă** *de grosime neglijabilă, sunt*

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x) dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) dx}, \quad y_G = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x) dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) dx}.$$

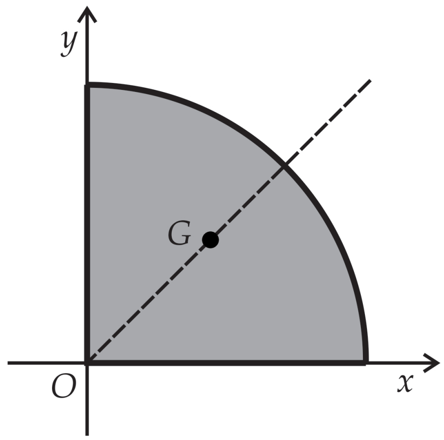
Consideraţie practică

În aplicaţii, este util a se observa mai întâi eventuala simetrie a lui Γ_f. Astfel, dacă Γ_f are o axă de simetrie, atunci şi centrul de masă se află pe acea axă, lucru ce poate simplifica determinarea poziţiei sale.

Exemplu. Fie $r > 0$. Să se determine coordonatele centrului de masă al plăcii plane omogene definite prin

$$M = \left\{ (x, y);\ x^2 + y^2 \leq r^2,\ x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

Soluţie. Placa plană respectivă este porţiunea din discul cu centrul în origine şi de rază r situată în primul cadran. Cum cercul cu centrul în origine şi de rază r are ecuaţia $x^2 + y^2 = r^2$, de unde $y^2 = r^2 - x^2$, porţiunea de cerc situată în primul



cadran are ecuaţia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. În concluzie, placa respectivă poate fi privită ca subgrafic al funcţiei

$$f : [0, r] \to [0, \infty), \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

De aici,

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^r x f(x) dx}{\displaystyle\int_0^r f(x) dx} = \frac{\displaystyle\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2} dx}{\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx},$$

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_0^r \frac{1}{2} f^2(x) dx}{\displaystyle\int_0^r f(x) dx} = \frac{\displaystyle\int_0^r \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right) dx}{\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx}.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$x = r \sin t \implies dx = r \cos t dt,$$

urmează că

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt$$
$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Similar,

$$\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin t \cdot \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin t \cos^2 t dt.$$

Cu schimbarea de variabilă

$$\cos t = u \implies du = -\sin t dt,$$

urmează că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin t \cos^2 t dt = \int_1^0 r^3 u^2(-du) = r^3 \int_0^1 u^2 du = r^3 \frac{u^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{r^3}{3},$$

iar

$$x_G = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Deoarece

$$\int_0^2 \frac{1}{2}(r^2 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^r = \frac{r^3}{3},$$

urmează că

$$y_G = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Alternativ, pentru simplificarea calculelor, era suficient să observăm că placa respectivă, fiind simetrică faţă de prima bisectoare, are centrul de greutate situat pe aceasta, de unde $x_G = y_G$, putându-se astfel calcula doar y_G.

2.9.4 Lungimea graficului unei funcţii

Teorema 2.30. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f derivabilă cu f' continuă. Atunci graficul său G_f are lungimea*

$$l(G_f) = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} dx.$$

Exemplu. Determinaţi lungimea graficului funcţiei

$$f : [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x.$$

Soluţie.

$$l(G_f) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x^{-1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Integrala obţinută este o integrală binomă, cu $m=-1$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$. Deoarece

$$\frac{m+1}{n} = 0 \in \mathbb{Z},$$

vom face schimbarea de variabilă

$$u = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$$

Atunci

$$u^2 = x^2+1 \implies x^2 = u^2-1 \implies x = \sqrt{u^2-1}$$
$$\implies dx = \left(\sqrt{u^2-1}\right)' du = \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}du.$$

Limitele noi de integrare sunt

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies u = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$x = \sqrt{3} \implies u = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Urmează că

$$l(G_f) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u^2}{u^2-1}du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{u^2-1+1}{u^2-1}du$$
$$= \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \left(\frac{u^2-1}{u^2-1} + \frac{1}{u^2-1}\right)du = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} 1du + \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{u^2-1}du$$
$$= u\Bigg|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{3(2-\sqrt{3})}.$$

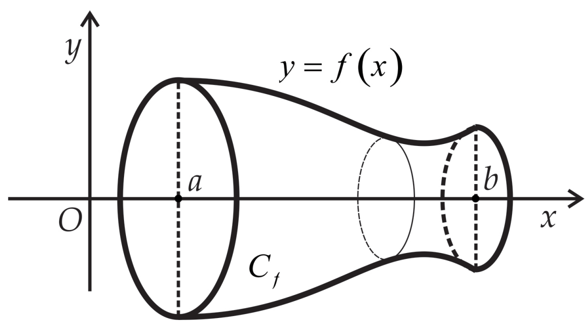
2.9.5 Volumul unui corp de rotaţie

Fie $f : [a,b] \to [0,\infty)$, f continuă.

Definiţie. Numim **corp de rotaţie** generat de graficul funcţiei f mulţimea spaţială

$$C_f = \left\{(x,y,z); a \le x \le b,\ f(x) \ge \sqrt{y^2+z^2}\right\}$$

obţinută prin rotaţia subgraficului funcţiei f în jurul lui Ox.



Un exemplu de corp de rotaţie este cilindrul circular drept (obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment paralel cu Ox). Un altul este conul circular drept (obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment ce conţine O). De asemenea, bila sferică şi trunchiul de con circular drept sunt corpuri de rotaţie.

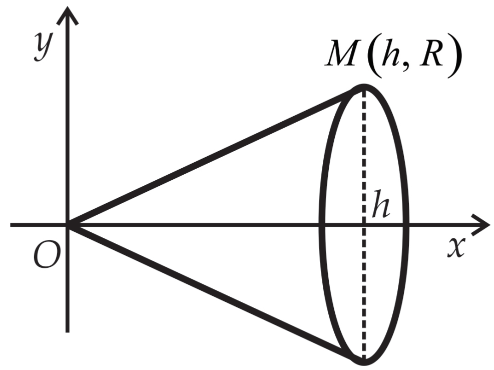
Teorema 2.31. *Fie $f : [a,b] \to [0,\infty)$, f continuă. Volumul corpului de rotaţie generat de graficul funcţiei f este*

$$\mathrm{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Exemplu. Demonstraţi că volumul conului circular drept de înălţime h şi rază a bazei R este $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

Soluţie. Un con circular drept de înălţime h şi rază a bazei R poate fi obţinut prin rotaţia subgraficului unei funcţii cu graficul un segment ce conţine O, adică al funcţiei

$$f : [0,h] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = kx,$$



unde k se determină din condiţia ca punctul $M(h,R)$ să aparţină graficului funcţiei f. Urmează că $kh = R$, deci $k = \frac{R}{h}$. Atunci

$$V = \text{vol}(C_f) = \pi \int_0^h f^2(x)dx = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \pi \left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx$$
$$= \pi \frac{R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

2.9.6 Volumul corpului de rotaţie generat de graficele a două funcţii

Fie $f : [a,b] \to [0,\infty)$, f, g continue, $0 \le f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$.

Definiţie. Numim **corp de rotaţie** generat de graficele funcţiilor f şi g mulţimea spaţială

$$C_{f,g} = \left\{(x,y,z); a \le x \le b,\ f(x) \le \sqrt{y^2+z^2} \le g(x)\right\}$$

obţinută prin rotaţia lui $\Gamma_{f,g}$, mulţimea mărginită de graficele funcţiilor f şi g, în jurul lui Ox.

Teorema 2.32. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f, g continue pe $[a,b]$, astfel încât $f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci volumul lui $C_{f,g}$ este*

$$vol(C_{f,g}) = \pi \int_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right) dx.$$

Vom preciza în cele ce urmează legătura între volumul corpului $C_{f,g}$ obţinut prin rotaţia mulţimii $\Gamma_{f,g}$ în jurul axei Ox şi aria $\Gamma_{f,g}$ a acestei mulţimi.

Teorema Pappus-Guldin

Teorema 2.33. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g continue pe $[a, b]$, astfel încât $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, inegalitatea fiind strictă în cel puţin un punct. Atunci*

$$\mathrm{vol}(C_{f,g}) = \mathrm{aria}(\Gamma_{f,g}) \cdot l(C),$$

C fiind cercul descris de centrul de greutate al $\Gamma_{f,g}$.

2.9.7 Ariile suprafeţelor de rotaţie

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f derivabilă cu f' continuă.

Definiţie. Numim **suprafaţă de rotaţie** generată de graficul funcţiei f mulţimea spaţială

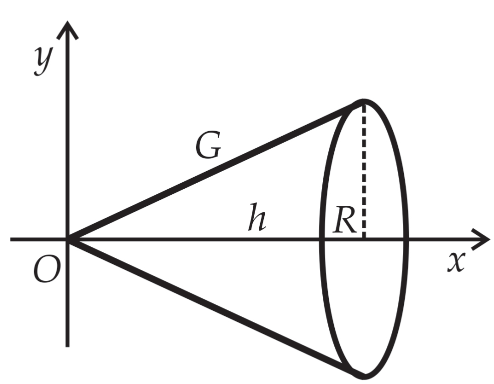
$$S_f = \left\{(x, y, z); a \leq x \leq b, f(x) = \sqrt{y^2 + z^2}\right\}$$

obţinută prin rotaţia graficului funcţiei f în jurul lui Ox.

Teorema 2.34. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$, f derivabilă cu f' continuă. Aria suprafeţei de rotaţie generate de graficul funcţiei f este*

$$\mathrm{aria}(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}dx.$$

Exemplu. Demonstraţi că aria laterală a conului circular drept de generatoare G şi rază a bazei R este $S = \pi RG$.



Soluţie. Întrucât conul este circular drept, între înălţimea sa h, generatoarea sa G şi raza bazei R există relaţia $G^2 = R^2 + h^2$, obţinută prin aplicarea Teoremei lui Pitagora. Ca mai sus, un con circular drept de înălţime h şi rază a bazei R poate fi obţinut prin rotaţia graficului funcţiei

$$f : [0, h] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{R}{h}x.$$

Atunci

$$\begin{aligned} S = \text{aria}(S_f) &= 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}dx = 2\pi \int_0^h \frac{R}{h}x\sqrt{1 + \left(\frac{R}{h}\right)^2}dx \\ &= 2\pi\frac{R}{h}\int_0^h x\sqrt{\frac{R^2+h^2}{h^2}}dx = 2\pi\frac{R}{h}\int_0^h x\sqrt{\frac{G^2}{h^2}}dx = 2\pi\frac{R}{h}\frac{G}{h}\int_0^h xdx \\ &= 2\pi\frac{RG}{h^2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^h = 2\pi\frac{RG}{h^2}\frac{h^2}{2} = \pi RG. \end{aligned}$$

Aplicaţii

2.1. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx;$ *2)* $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx;$ *3)* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arctg} x dx;$ *4)* $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx.$

2.2. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx;$ *2)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx;$ *3)* $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{4+x^6}dx;$ *4)* $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx.$

2.3. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx;$ *2)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

2.4. *Determinaţi* $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{1+\sqrt{x}}dx.$

2.5. *Determinaţi* $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$*, folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = \dfrac{1}{x}$.

2.6. *Determinaţi* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x \cos x}dx$*, folosind eventual faptul că*

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)', \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}].$$

2.7. *Determinaţi*

1) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$; 2) $\displaystyle\int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

2.8. *Folosind proprietatea de aditivitate a integralei definite în raport cu intervalul, determinaţi*

1) $\displaystyle\int_0^2 \min(1, x, x^2)dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| dx$; 3) $\displaystyle\int_{-2}^2 (|x+1| + |x-1|)dx$;
4) $\displaystyle\int_1^{2e} |1 - \ln x|dx$; 5) $\displaystyle\int_0^2 \max(x, x\ln(1+x))dx$.

2.9. *Studiind paritatea integrandului, demonstraţi că*

1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3}{1+x^{10}}dx = 0$; 2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{2+\sin^2 x}dx = 0$; 3) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{2+x^2}dx = 0$;
4) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \cos x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = 0$.

2.10. *Determinaţi* $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|e^{x^2}dx$.

2.11. *Determinaţi* $\displaystyle\int_0^2 x\ln(x + \sqrt{x^2+1})dx$.

2.12. *Determinaţi* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}dx$.

2.13. *Se defineşte şirul* $(I_n)_{n\geq 1}$ *prin* $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x-1}{x+1}dx$.

1. *Determinaţi* I_n.
2. *Determinaţi* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n}$*, folosind fie 1., fie lema Cesaro-Stolz şi teorema de medie pentru integrala definită.*

2.14. *Folosind eventual schimbarea de variabilă* $u = 0 + \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - x$*, demonstraţi că*

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}dx$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = 0$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

2.15. *Fie integrala* $I = \int_0^{1000\pi} |\sin x| dx$.

1. *Demonstraţi că* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x|$ *este periodică, de perioadă* π.
2. *Justificaţi faptul că* $I = 1000 \int_0^{\pi} |\sin x| dx$.
3. *Calculaţi* I.

2.16. *Comparaţi integralele*

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x dx$;
2. $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, $\quad J = \int_0^1 \sqrt{1-x^n} dx$, $n > 2$;
3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n dx$, $\quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n} dx$.

2.17. *Se defineşte şirul* $(I_n)_{n\geq 0}$ *prin* $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

1. *Demonstraţi că* $(I_n)_{n\geq 0}$ *este monoton descrescător.*
2. *Folosind eventual inegalitatea*

$$0 \leq \ln(1+u) \leq u, \quad \text{pentru orice } u \geq 0,$$

   demonstraţi că $(I_n)_{n\geq 0}$ *este convergent la* 0.

2.18. *Demonstraţi următoarele inegalităţi*

1. $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$;
2. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x^2) dx \leq 0$;
3. $\frac{1}{5} \leq \int_5^8 \frac{2x-9}{2x+5} dx \leq 1$;
4. $2\sqrt{e} \leq \int_0^1 (e^{x^2} + e^{1-x^2}) dx \leq 1 + e$.

2.19. *Demonstraţi următoarele inegalităţi*

1. $\int_1^5 \ln(1+x)dx \geq \int_1^5 \frac{x}{1+x}dx;$

2. $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x+1}dx \leq \frac{1}{2n+1};$

3. $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6}.$

2.20. *Se defineşte şirul* $(I_n)_{n\geq 0}$ *prin* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n dx.$

1. *Demonstraţi că* $(I_n)_{n\geq 0}$ *este monoton şi mărginit.*

2. *Demonstraţi că*

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \quad \textit{pentru orice } n \geq 0,$$

folosind eventual faptul că

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = (\mathrm{tg}\, x)', \quad \textit{pentru orice } x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

2.21. *Se defineşte şirul* $(I_n)_{n\geq 0}$ *prin* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+3}dx.$

1. *Demonstraţi că* $(I_n)_{n\geq 0}$ *este monoton şi mărginit.*

2. *Demonstraţi că*

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

3. *Demonstraţi că*

$$6I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 6I_n, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

4. *Demonstraţi că*

$$\frac{1}{6(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{6(n-1)}, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

5. *Determinaţi* $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} I_n$*. Discuţie după valorile lui* $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.22. *Scriind eventual şirurile de mai jos sub forma unor sume Riemann pentru anumite funcţii, intervale de integrare, diviziuni (echidistante) şi sisteme de puncte intermediare, determinaţi*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$;

2. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$;

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{0\pi}{n}+\sin\frac{1\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

4. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

2.23. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n \ln t dt$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Demonstraţi că* f *este strict descrescătoare pe* $(0,1)$.

2.24. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. *Demonstraţi că* f *este concavă pe* $[0,\infty)$.

2.25. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{tg} t dt}{x^2}; \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}; \qquad 3)\ \lim_{x\to\pi} \frac{\int_0^{\sin x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dx}.$$

2.26. *Determinaţi ariile domeniilor plane mărginite de graficele următoarelor funcţii*

1. $f, g : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = 9x$;

2. $f, g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{1}{2}$.

2.27. *Determinaţi ariile suprafeţelor de rotaţie obţinute prin rotaţia graficelor următoarelor funcţii în jurul axei Ox*

1. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;

2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

3. $f : [0, \frac{1}{\sqrt{3}}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.

4. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$.

2.28. *Calculaţi raportul ariilor în care parabola* $y^2 = 2x$ *împarte discul* $x^2 + y^2 \leq 8$.

2.29. *Determinaţi volumele corpurilor de rotaţie obţinute prin rotaţia graficelor următoarelor funcţii în jurul axei* Ox

1. $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

2. $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.