Capitolul 5

INTEGRALA DUBLĂ

Să recapitulăm modul de definire al integralei definite (Riemann) pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Mai întâi, se construia o diviziune a intervalului $[a, b]$,

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad \text{cu} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

(şi, ca rezultat, se obţineau subintervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, cu interioarele disjuncte şi care puteau avea în comun două câte două doar cel mult unul dintre capete). Apoi, se considera un sistem de puncte intermediare

$$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\},$$

astfel încât $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare interval elementar se afla câte un punct intermediar) şi se asociau sume Riemann de forma

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(f, C) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(c_n - c_{n-1})\end{aligned}$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţea cu lungimea intervalului din care punctul intermediar făcea parte, adunându-se rezultatele). Mai departe, $\int_a^b f(x)dx$ se obţinea ca limita unui astfel de şir de sume Riemann.

Vom păstra acelaşi punct de vedere, bazat pe **împărţirea domeniului de integrare în subdomenii, asocierea unui sistem de puncte intermediare, definirea sumei Riemann şi trecerea la limită** şi pentru definiţia noţiunii de integrală dublă a unei funcţii definite pe un domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$, care are arie.

Domenii de integrare

Nu vom prezenta aici noţiuni legate de existenţa sau inexistenţa ariei unei mulţimi din $\mathbb{R}^2$ (în acest scop cititorul putând consulta M. Nicolescu *et al.* [**?**], vol II, cap. IX), însă vom observa că orice domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este reuniunea unui număr finit de curbe netede are arie. În acest capitol, pentru simplificarea expunerii, prin **domeniu de integrare** vom înţelege un domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este reuniunea unui număr finit de curbe netede (altfel spus, cu frontiera **netedă pe porţiuni**). În particular, un astfel de domeniu de integrare are arie.

Împărţirea domeniului de integrare în subdomenii

Diviziuni (partiţii) ale unui domeniu de integrare

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Vom spune că o mulţime ordonată de domenii de integrare $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ reprezintă o **diviziune** (sau **partiţie**) a lui D dacă

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = D$.

2. $\overset{\circ}{D}_i \bigcap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$, pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Altfel spus, D se poate scrie ca reuniunea tuturor subdomeniilor D_1, $D_2, \ldots, D_n$, iar aceste subdomenii pot avea comune, două câte două, cel mult puncte de pe frontieră, întrucât au două câte două interioarele disjuncte.

Notaţie

Mulţimea diviziunilor unui domeniu de integrare D se notează $\mathcal{D}_D$.

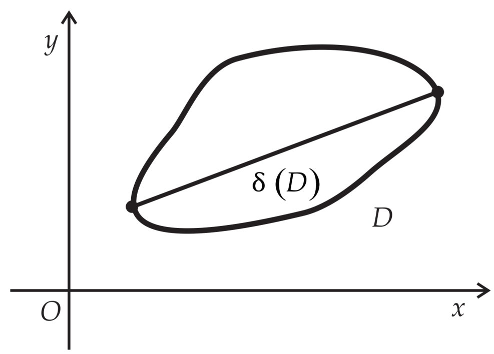
Diametrul unui domeniu de integrare

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Numim **diametru** al lui D, notat $\delta(D)$, distanţa maximă dintre două puncte ale lui D.

Normă a unei partiţii

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, vom numi **normă** a diviziunii Δ, notată $\|\Delta\|$, valoarea maximă a **diametrelor** $\delta(D_1)$, $\delta(D_2), \ldots, \delta(D_n)$, adică

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(D_n).$$

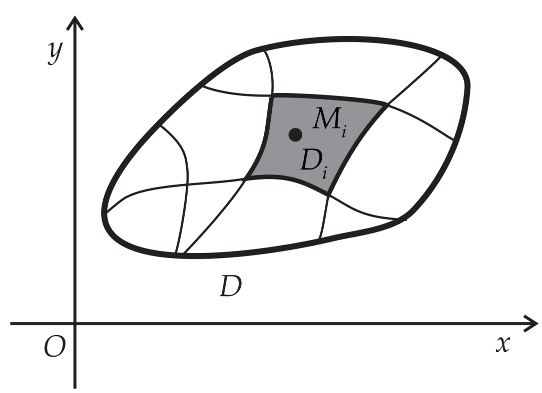


Sisteme de puncte intermediare asociate

Fiind dată o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, vom numi **sistem de puncte intermediare asociat diviziunii** Δ o mulţime ordonată de puncte

$$C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\},$$

astfel încât $M_i \in D_i$ pentru $1 \leq i \leq n$ (în fiecare subdomeniu se află câte un punct intermediar).



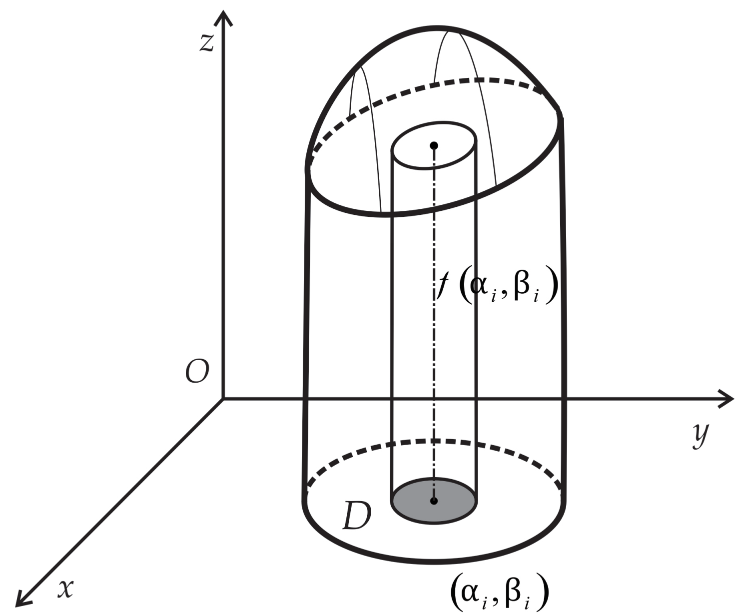
Sume Riemann. Interpretare geometrică

Fiind date un domeniu de integrare D, o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, o diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ a domeniului de integrare D şi $C = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, $M_i = M_i(\alpha_i, \beta_i)$, $1 \leq i \leq n$, vom numi **sumă Riemann asociată diviziunii** Δ **şi sistemului de puncte intermediare** C suma

$$\sigma_\Delta(f, C) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i) \,\text{aria}(D_i)$$

$$= f(\alpha_1, \beta_1)\,\text{aria}(D_1) + f(\alpha_2, \beta_2)\,\text{aria}(D_2) + \ldots + f(\alpha_n, \beta_n)\,\text{aria}(D_n)$$

(valoarea funcţiei în fiecare punct intermediar se înmulţeşte cu aria subdomeniului din care punctul intermediar face parte, adunându-se rezultatele).



Interpretare geometrică

Fie $f : D \to [0, \infty)$, D domeniu de integrare. Considerăm corpul cilindric mărginit de planul xOy şi suprafaţa $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ cu generatoarea paralelă cu Oz. Descompunem acest corp în subcorpuri cilindrice cu bazele D_1, $D_2, \ldots, D_n$ şi aproximăm volumul unui astfel de subcorp cu volumul cilindrului cu baza D_i şi înălţime $f(\alpha_i, \beta_i)$. Obţinem că $\sigma_\Delta(f, C)$ reprezintă suma volumelor cilindrilor aproximanţi, în concluzie o aproximare pentru volumul corpului cilindric respectiv.

Funcţii integrabile Riemann

Definiţie. Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$. Vom spune că f este **integrabilă Riemann** pe D (pe scurt, f este **integrabilă** pe D) dacă există un număr real I astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

oricare ar fi diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}_D$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare C asociat lui Δ, are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, C) - I| < \varepsilon.$$

La fel ca şi în cazul integralei unei funcţii definite pe un interval $[a, b]$, pentru o normă a diviziunii „suficient de mică", suma Riemann $\sigma_\Delta(f, C)$ reprezintă o aproximare „suficient de bună" a lui I.

Integrala dublă

Numărul I definit mai sus se numeşte **integrala dublă** a funcţiei f pe D şi se notează

$$\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Să observăm şi că I, dacă există, este unic determinat.

Mulţimea D se numeşte **domeniu de integrare**, funcţia f se numeşte **integrand** iar variabilele x, y se numesc **variabile de integrare**. Expresia $dxdy$ (un tot unitar, mai degrabă decât un produs, deşi poate fi interpretat şi în acest ultim fel) se numeşte **element de arie**.

Definiţie alternativă

Are loc următoarea echivalenţă, cea de-a doua afirmaţie putând fi utilizată de asemenea ca definiţie a integrabilităţii Riemann.

Teorema 5.1. *Fie D un domeniu de integrare şi fie o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1. *f este integrabilă pe D.*
2. *Oricare ar fi un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ ale lui D cu $\|\Delta_n\| \to 0$, împreună cu un şir de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$, şirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, C_n))_{n\geq 0}$ este convergent.*

La fel ca şi în cazul integralei unei funcţii definite pe un interval $[a, b]$, se poate demonstra că limita unui astfel de şir de sume Riemann nu depinde nici de alegerea şirului de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 0}$, nici de alegerea şirului de sisteme de puncte intermediare asociate $(C_n)_{n\geq 0}$. Valoarea (comună) a limitelor reprezintă $\iint_D f(x,y)dxdy$.

Domeniu de integrare cu arie nulă. Integrala funcţiei nule

Cu ajutorul definiţiei, ţinând cont de faptul că toate sumele Riemann asociate sunt nule, putem obţine următoarele proprietăţi.

1. Fie D un domeniu de integrare cu arie nulă şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă. Atunci
$$\iint_D f(x,y)dxdy = 0.$$

2. Fie D un domeniu de integrare. Atunci

$$\iint_D 0dxdy = 0.$$

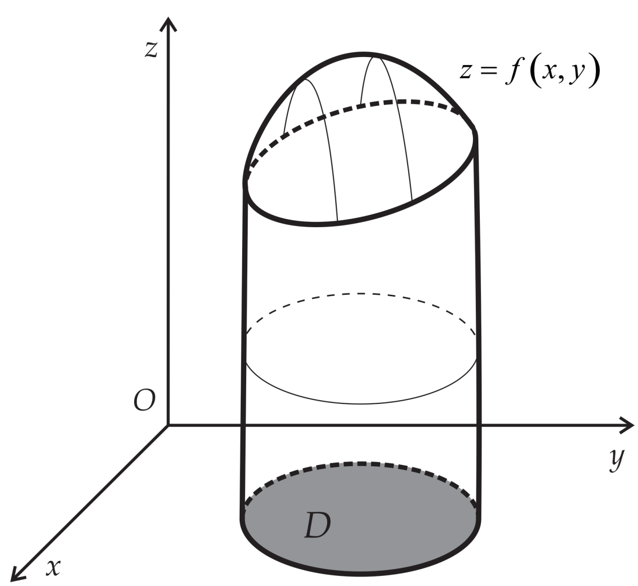
Interpretare geometrică: arie

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare. Conform definiţiei, se obţine că

$$\iint_D 1dxdy = \text{aria}(D).$$

La fel ca şi în cazul integralei definite, integrându-l pe 1 pe o mulţime obţinem „măsura" acelei mulţimi. Pentru un interval $[a, b]$, „măsura" sa era lungimea acestuia, $b - a$. Acum, „măsura" potrivită pentru domeniul de integrare D (din $\mathbb{R}^2$) este aria acelei mulţimi.

Interpretare geometrică: volum



Am observat deja că, fiind dată o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilă pe $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, interpretarea geometrică a integralei definite $\int_a^b f(x)dx$ este aria subgraficului funcţiei f. Pentru integrala dublă, o interpretare similară se obţine „adăugând o dimensiune" şi transformând graficul în suprafaţă, iar aria în volum.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D, $f(x,y) \geq 0$ pentru orice $(x,y) \in D$. Definim suprafaţa Σ în $\mathbb{R}^3$ prin

$$\Sigma = \{(x,y,z); z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}.$$

Ţinând seama şi de interpretarea geometrică a sumelor Riemann amintită anterior, $\iint_D f(x,y)dxdy$ reprezintă volumul corpului cilindric cu generatoarea paralelă cu Oz determinat de D şi de suprafaţa Σ.

Legătura între integrabilitate şi alte proprietăţi ale funcţiilor

La fel ca şi în cazul integralelor simple (şi în mod natural de altfel), funcţiile continue sunt integrabile. De asemenea, funcţiile integrabile sunt mărginite.

Teorema 5.2. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f continuă pe D. Atunci f este integrabilă pe D.*

Teorema 5.3. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Atunci f este mărginită pe D.*

5.1 Operaţii cu funcţii integrabile

Teorema 5.4. *Fie D un domeniu de integrare, $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D, şi $c \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. **Proprietatea de aditivitate**

   Funcţiile $f + g$ şi $f - g$ sunt integrabile pe D, iar

   $$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

   *(***integrala sumei este egală cu suma integralelor***), respectiv*

   $$\iint_D (f(x,y) - g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy - \iint_D g(x,y)dxdy$$

   *(***integrala diferenţei este egală cu diferenţa integralelor***).*

2. **Proprietatea de omogenitate**

Funcţia cf este integrabilă pe D, iar

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy,$$

(**o constantă cu care se înmulţeşte poate fi trecută de sub integrală înaintea integralei**).

Menţionăm că nu au loc formule asemănătoare pentru produs şi raport, adică integrala produsului nu este, de regulă, produsul integralelor şi nici integrala raportului nu este, de regulă, raportul integralelor. Condensat, formulele de mai sus pot fi scrise sub forma următoare.

Teorema 5.5. *Fie D un domeniu de integrare, $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D şi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Atunci $c_1 f + c_2 g$ este integrabilă pe D şi*

$$\iint_D (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y))dxdy = c_1 \iint_D f(x,y)dxdy + c_2 \iint_D g(x,y)dxdy.$$

5.2 Proprietăţi ale integralei duble

5.2.1 Proprietăţi în raport cu domeniul

Restrângerea domeniului de integrare

Teorema 5.6. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Atunci f este integrabilă pe orice subdomeniu $D_1 \subset D$.*

Extinderea domeniului de integrare. Aditivitatea în raport cu domeniul

Teorema 5.7. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă domeniile de integrare D_1, $D_2, \ldots, D_n$ formează o diviziune a lui D, iar f este integrabilă pe $D_1, D_2, \ldots, D_n$, atunci f este integrabilă pe întreg D, iar*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$

5.2.2 Proprietăţi în raport cu funcţia

Păstrarea inegalităţilor între funcţii

Vom observa în cele ce urmează că integrala dublă păstrează semnul funcţiei de integrat şi inegalităţile nestricte între funcţii. În plus, inegalitatea strictă într-un punct comun de continuitate al funcţiilor de integrat atrage inegalitatea strictă pentru integrale.

Teorema 5.8. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, f, g integrabile pe D.*

1. *Dacă $f(x,y) \geq 0$, pentru orice $(x,y) \in D$, atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

2. *Dacă $f(x,y) \geq g(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in D$, atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

3. *Dacă $f(x,y) \geq g(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in D$, şi există $(x_0, y_0) \in D$ astfel ca*

$$f(x_0, y_0) > g(x_0, y_0), \text{ iar } f, g \text{ sunt continue în } (x_0, y_0),$$

atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy > \iint_D g(x,y)dxdy.$$

Corolar 5.8.1. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Dacă*

$$m \leq f(x,y) \leq M, \quad \text{pentru orice } (x,y) \in D,$$

atunci

$$m \cdot \text{aria}(D) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot \text{aria}(D).$$

Corolar 5.8.2. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f integrabilă pe D. Atunci $|f|$ este integrabilă pe D, iar*

$$\left| \iint_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

Reiterînd faptul că acum, „măsura" potrivită pentru domeniul de integrare D (din $\mathbb{R}^2$) este aria acelei mulţimi, în vreme ce pentru un interval $[a,b]$, „măsura" sa era lungimea acestuia, $b-a$, putem obţine următoarea teoremă de medie, cu semnificaţie şi demonstraţie similare celei obţinute pentru integrala simplă.

Teorema de medie

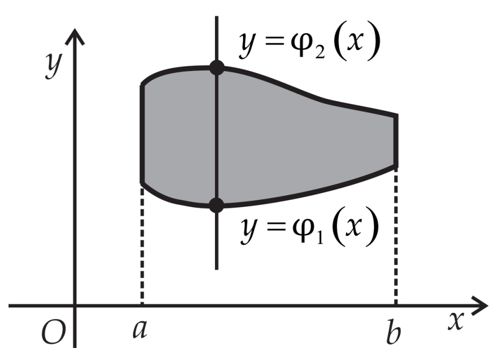
Teorema 5.9. *Fie D un domeniu de integrare şi fie $f : D \to \mathbb{R}$, f continuă pe D. Atunci există $M(c_1, c_2) \in D$ astfel încât*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(c_1,c_2)\,\text{aria}(D).$$

5.3 Calculul integralelor duble

În mod natural, o primă idee este de a reduce calculul integralei duble la calculul succesiv a două integrale definite, utilizând pe rând cele două variabile ca variabile de integrare.

5.3.1 Domenii simple în raport cu axa Oy



Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy. Reamintim că, în această situaţie, au loc următoarele.

1. Proiecţia lui D pe Ox este un segment $[a,b]$.

2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x,y); \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), x \in [a,b]\}.$$

Teorema 5.10. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D. Dacă $I : [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \quad \textit{pentru } x \in [a,b],$$

este bine definită şi integrabilă pe $[a,b]$, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

În membrul drept, domeniul $[a,b]$ al primei integrale este **domeniul de proiecţie**, iar domeniul celei de-a doua integrale, $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ este **domeniul de secţiune** (pentru $x \in (a,b)$, paralela la axa Oy cu abscisa constantă x taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(x)$ fiind ordonata punctului de intrare, iar $\varphi_2(x)$ fiind ordonata punctului de ieşire; cele două puncte pot eventual şi coincide).

De notat că, în cele de mai sus, ordinea de scriere a integralelor nu este ordinea de calcul. Astfel, mai întâi se calculează integrala interioară (cea în raport cu y), iar abia apoi cea exterioară (cea în raport cu x).

Procedeul de calcul de mai sus poartă numele de **reducerea la integrale iterate** sau, urmărind raţionamentul geometric, **metoda de proiecţie şi secţiune**. În particular, ipotezele asupra lui I sunt satisfăcute dacă f este funcţie continuă.

Corolar 5.10.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D. Atunci*

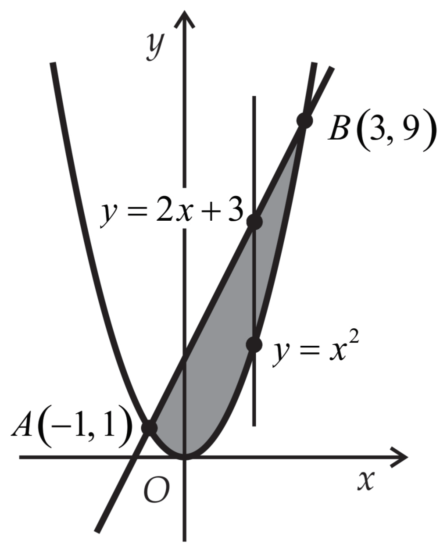
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D xydxdy,$$

unde D este domeniul limitat de parabola $(P) : y = x^2$ şi dreapta $(D) : y = 2x + 3$.

Soluţie. Domeniul de integrare D este cel haşurat în figură, observându-se că el este simplu în raport cu Oy. Pentru calculul integralei, aplicăm metoda de



proiecţie şi secţiune. În acest scop, determinăm mai întâi punctele de intersecţie (de fapt, sunt necesare doar abscisele acestora).

Determinarea punctelor de intersecţie se face rezolvând un sistem constituit din ecuaţiile parabolei şi dreptei.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases} \implies x^2 = 2x+3 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Urmează că domeniul de proiecţie (pe Ox) este $[-1, 3]$.

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oy printr-un punct oarecare x din domeniul de proiecţie. Observăm că punctul de „intrare" în D al paralelei este situat pe parabola $y = x^2$, în timp ce punctul de „ieşire" este situat pe dreapta $y = 2x+3$. Urmează că

$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy \right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_{x^2}^{2x+3} xydy.$$

Deoarece variabila de integrare este y, urmează că

$$I_1 = x\int_{x^2}^{2x+3} ydy = x \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_{x^2}^{2x+3} = \frac{x}{2}\left(4x^2 + 6x + 9 - x^4\right) = 2x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^5.$$

De aici

$$I = \int_{-1}^{3} \left(2x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{x^5}{2}\right) dx = \left(2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{9}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^6\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{76}{3}.$$

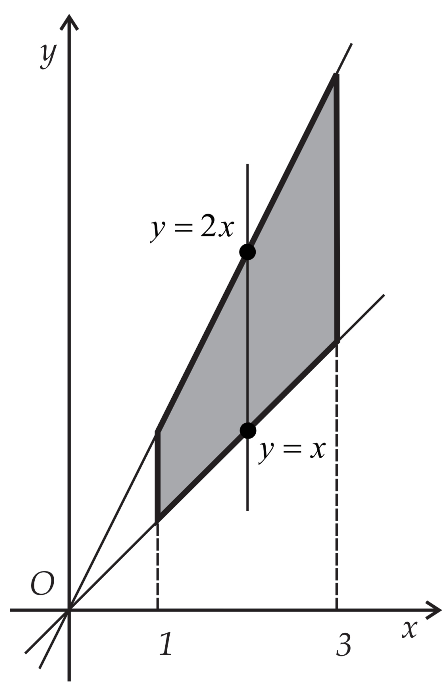
Exemplu. Determinaţi aria domeniului

$$D = \{(x,y); x \le y \le 2x,\ 1 \le x \le 3\}.$$

Soluţie. Avem că

$$\text{aria }(D) = \iint_D 1dxdy,$$

domeniul D fiind cel haşurat în figură. Vom folosi metoda de proiecţie şi secţiune.



În acest scop, să observăm că domeniul de proiecţie (pe Ox) este $[1,3]$, conform enunţului problemei.

Pentru a determina domeniul de secţiune, ducem o paralelă la axa Oy printr-un punct oarecare x din domeniul de proiecţie. Observăm că punctul de „intrare" în D al paralelei este situat pe dreapta $(D1) : y = x$, în timp ce punctul de „ieşire" este situat pe dreapta $(D2) : y = 2x$. Urmează că

$$\iint_D 1dxdy = \int_1^3 \left(\int_x^{2x} 1dy \right) dx.$$

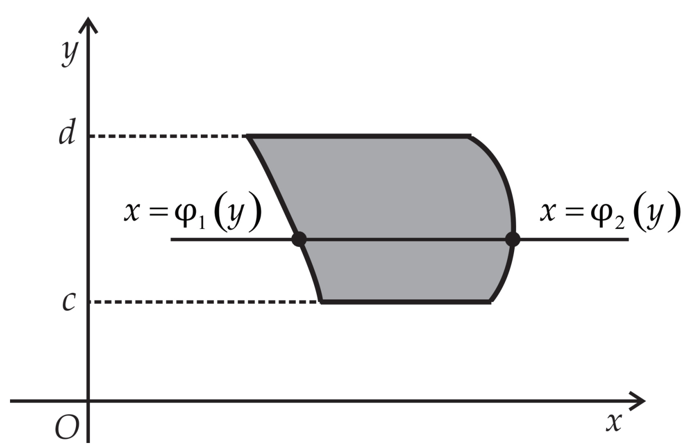
Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_x^{2x} 1dy = y \Big|_x^{2x} = 2x - x = x.$$

Atunci

$$\iint_D 1dxdy = \int_1^3 xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^3 = 4.$$

5.3.2 Domenii simple în raport cu axa Ox



Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Ox. Reamintim că, în această situaţie

1. Proiecţia lui D pe Oy este un segment $[c, d]$.

2. Există $\varphi_1, \varphi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue astfel ca D se poate scrie sub forma

$$D = \{(x, y); \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), y \in [c, d]\}.$$

Teorema 5.11. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Ox şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D. Dacă $I : [c,d] \to \mathbb{R}$,*

$$J(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx, \quad \text{pentru } y \in [c,d],$$

este bine definită şi integrabilă pe $[c,d]$, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

În membrul drept, domeniul $[c,d]$ al primei integrale este **domeniul de proiecţie**, iar domeniul celei de-a doua integrale, $[\varphi_1(y), \varphi_2(y)]$ este **domeniul de secţiune** (pentru $y \in (c,d)$, paralela la axa Ox cu ordonată constantă y taie frontiera domeniului D în cel mult două puncte, $\varphi_1(y)$ fiind abscisa punctului de intrare, iar $\varphi_2(y)$ fiind abscisa punctului de ieşire; cele două puncte pot eventual şi coincide). Din nou, mai întâi se calculează integrala interioară (cea în raport cu x), iar abia apoi cea exterioară (cea în raport cu y), iar ipotezele asupra lui J sunt satisfăcute dacă f este funcţie continuă.

Corolar 5.11.1. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa Ox şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D. Atunci*

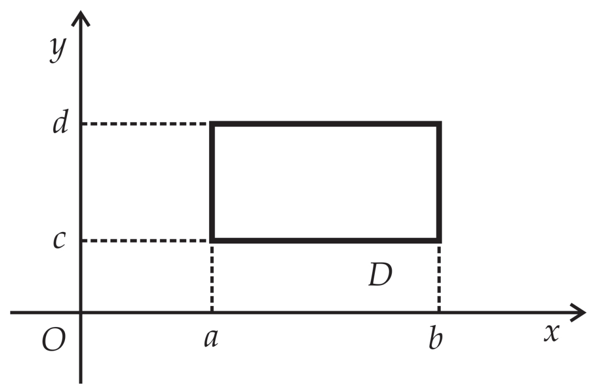
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

5.3.3 Domenii dreptunghiulare

În cazul domeniilor cu formă generală menţionate mai sus, calculul integralelor iterate presupune în particular determinarea domeniului de secţiune. Aceste formule de calcul se simplifică considerabil, nemaifiind necesar să se calculeze domeniile de secţiune, atunci când domeniul de integrare este un dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate. Un astfel de dreptunghi poate fi scris sub forma

$$D = [a,b] \times [c,d],$$

unde $[a,b]$ reprezintă proiecţia domeniului pe axa Ox, iar $[c,d]$ reprezintă proiecţia domeniului pe axa Oy, fiind simplu atât în raport cu Ox, cât şi cu Oy.



Corolar 5.11.2. *Fie $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, f continuă. Atunci*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y)dxdy$.

Soluţie. Are loc egalitatea

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)dy\right) dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, anume

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)dy = (-\cos(x+y))\Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} = -\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos x.$$

De aici,

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos x)dx &= -\sin(x+\frac{\pi}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\sin(3\frac{\pi}{4}) + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1. \end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy$.

Soluţie. Are loc egalitatea

$$\iint_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y+1)^2}dy\right)dx.$$

Calculăm mai întâi integrala interioară, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+y+1)^2}dy$, pentru care y este variabilă de integrare, iar x este o constantă. Urmează că

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+y+1)^2}dy = \int_1^2 (x+y+1)^{-2}dy = \frac{(x+y+1)^{-1}}{-1}\Bigg|_{y=1}^{y=2}$$
$$= \frac{(x+3)^{-1}}{-1} - \frac{(x+2)^{-1}}{-1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}.$$

De aici,

$$\iint_{[0,1]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y+1)^2}dxdy = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+3}dx = \ln|x+2|\Bigg|_0^1 - \ln|x+3|\Bigg|_0^1$$
$$= \ln 3 - \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 = \ln\frac{9}{8}.$$

5.3.4 Domenii dreptunghiulare şi funcţii separabile ca produse

În descrierea unui dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate sub forma

$$D = [a,b] \times [c,d],$$

intervalele în care variabilele x şi y sunt „separate" cu ajutorul unui produs (cartezian). Dacă şi în expresia funcţiei de integrat f variabilele x şi y sunt separate în acelaşi mod, adică f se poate scrie ca produs între o funcţie care depinde doar de variabila x şi o funcţie care depinde doar de variabila y, există atunci premizele pentru o separare „totală" a variabilelor, tot sub forma unui produs.

Teorema 5.12. *Fie $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, unde f_1, f_2 sunt funcţii continue. Atunci*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\cdot f_2(y)dxdy$$

$$= \left(\int_a^b f_1(x)dx \right) \cdot \left(\int_c^d f_2(y)dy \right)$$

Prima integrală simplă conţine toate apariţiile variabilei x, împreună cu domeniul corespunzător, iar cea de-a doua, tot simplă, conţine toate apariţiile variabilei y, din nou împreună cu domeniul corespunzător.

De asemenea, este de remarcat faptul că separarea sumelor sau diferenţelor de funcţii are loc **tot timpul** (indiferent de forma domeniului), şi se face în integrale **de acelaşi tip** (adică tot duble), în vreme ce separarea produselor are loc **uneori** (în condiţiile particulare de mai sus) şi se face în integrale **simple**.

Exemplu. Determinaţi $\iint_{[0,1]\times[1,2]} xe^{x^2+y} dxdy$.

Soluţie. Au loc egalităţile

$$\iint_{[1,3]\times[1,2]} xe^{x^2+y} dxdy = \iint_{[1,3]\times[1,2]} xe^{x^2} \cdot e^y dxdy = \int_1^3 xe^{x^2} dx \cdot \int_1^2 e^y dy.$$

Deoarece

$$I_1 = \int_1^3 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 2xe^{x^2} dx,$$

cu schimbarea de variabilă $u = x^2$, de unde $du = 2xdx$, urmează că

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_1^9 e^u du = \frac{1}{2} e^u \Big|_1^9 = \frac{1}{2} \left(e^9 - e \right).$$

De asemenea,

$$I_2 = \int_1^2 e^y dy = e^y \Big|_1^2 = e^2 - e.$$

Atunci

$$I = \frac{1}{2} \left(e^9 - e \right) \left(e^2 - e \right).$$

Exemplu. Determinaţi $\iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x dxdy$.

Soluţie. În acest caz, integrandul este funcţie doar de variabila x. Putem totuşi considera că el se separă ca produs între o funcţie doar de variabila x şi o funcţie doar de variabila y, sub forma

$$\sin x = \sin x \cdot 1.$$

Atunci

$$\iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x dx dy = \iint_{[0,\pi]\times[0,1]} \sin x \cdot 1 dx dy = \int_0^{\pi} \sin x dx \cdot \int_0^1 1 dy$$
$$= (-\cos x)\Big|_0^{\pi} \cdot y\Big|_0^1 = 2\cdot 1 = 2.$$

Exemplu. Determinaţi $\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y) dx dy$.

Soluţie. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin(x+y) dx dy &= \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} (\sin x\cos y + \cos x \sin y) dx dy\\ &= \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin x \cos y dx dy\\ &\quad + \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \cos x \sin y dx dy.\end{aligned}$$

Mai sus, separarea se face tot în integrale duble, pe acelaşi domeniu, întrucât se calculează integrala unei **sume**. De asemenea

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \sin x \cos y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos y dy = (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 1\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aici, separarea se face în integrale simple, întrucât se calculează integrala unui **produs** de funcţii depinzând de câte o variabilă. Din acelaşi motiv,

$$\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \cos x \sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin y dy = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot (-\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 1\cdot (1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Atunci

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

5.3.5 Formula de schimbare de variabilă în integrala dublă

În unele situaţii, fie funcţia de integrat, fie forma geometrică a domeniului se simplifică după schimbări de variabile.

Schimbări de variabilă (transformări regulate)

Fie D_1 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_1 şi D_2 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_2. Spunem că D_2 se transformă în D_1 prin **schimbarea de variabilă** (sau **transformarea regulată**)

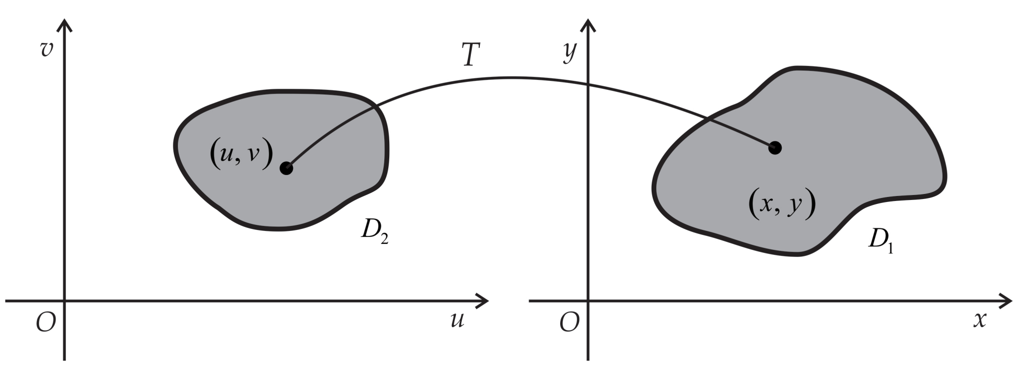
$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in D_2,$$

dacă

1. T este bijectivă ca funcţie de la D_2 la D_1.
2. Funcţiile $x = x(u,v)$ şi $y = y(u,v)$ au derivatele parţiale de ordinul 1 şi derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea continue.
3. Determinantul funcţional (numit **determinant jacobian**)

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

   este nenul pentru $(u,v) \in D_2$.



Formula de schimbare de variabilă

Teorema 5.13. *Fie D_1 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_1 şi D_2 un domeniu de integrare mărginit de curba închisă netedă pe porţiuni C_2, astfel încât D_2 se transformă în D_1 prin* **schimbarea de variabilă** *(sau* **transformarea regulată***)*

$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in D_2.$$

Fie, de asemenea, $f : D_1 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci

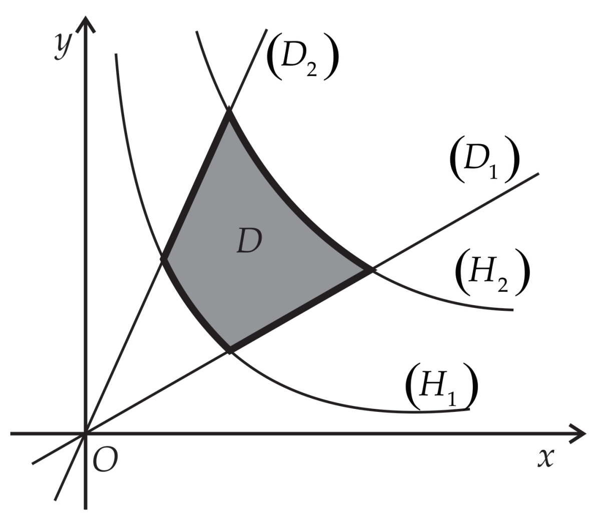
$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \iint_{D_2} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

În prima parte a membrului drept, **variabilele vechi** x şi y se înlocuiesc în funcţie de **variabilele noi** u şi v. Cea de-a doua parte a membrului drept reprezintă **formula de transformare a elementului de arie**, care poate fi scrisă sub forma

$$dxdy = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D xdxdy, \quad D = \left\{(x,y); 1 \le xy \le 9,\ 1 \le \frac{y}{x} \le 4\right\}.$$



Soluţie. Domeniul D este definit cu ajutorul unor inegalităţi. Studiem mai întâi cazurile de egalitate. Observăm că D este mărginit de hiperbolele echilatere $(H_1): \ xy = 1$, $(H_2): \ xy = 9$ şi de dreptele $(D_1): \ y = x$, $(D_2): \ y = 4x$. Alegerea variabilelor noi

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

simplifică forma domeniului de integrat, care devine dreptunghiul $[1,9] \times [1,4]$. Determinăm acum formula de transformare a elementului de arie. Observăm că

$$uv = xy \cdot \frac{y}{x} = y^2 \implies y = \sqrt{uv}, \quad \frac{u}{v} = \frac{xy}{\frac{y}{x}} = x^2 \implies x = \sqrt{\frac{u}{v}}.$$

De aici

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{uv}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{uv}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\left(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{-1}{2}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{-1}{2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\right) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}v^{\frac{-1}{2}} & \frac{-1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{-3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{-1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}v^{-1} + \frac{1}{4}v^{-1} = \frac{1}{2}v^{-1} = \frac{1}{2v},$$

iar

$$dxdy = \frac{1}{2v}dudv.$$

Urmează că

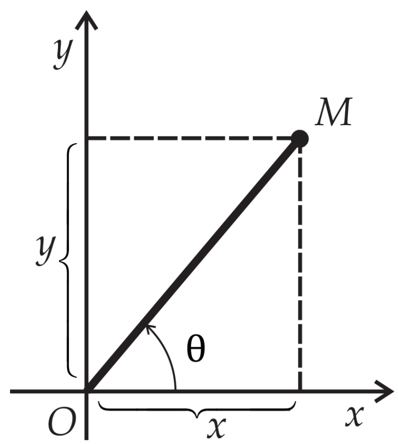
$$\iint_D xdxdy = \int_{[1,9]\times[1,4]} \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2v}dudv = \frac{1}{2}\int_{[1,9]\times[1,4]} u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}dudv$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}du \cdot \int_1^4 v^{-\frac{3}{2}}dv = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9 \cdot \frac{v^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{52}{3} \cdot 1 = \frac{26}{3}.$$

5.3.6 Coordonate polare şi polare generalizate

Coordonate polare

Fiind dat un reper cartezian xOy în plan şi un reper polar asociat, cu **polul** în O, originea sistemului de coordonate şi **axa polară** dată de semiaxa Ox, putem preciza poziţia unui punct $M \neq O$ atât prin coordonatele sale carteziene (x,y), cât şi prin **coordonatele sale polare** (ρ, θ), unde

1. ρ reprezintă distanţa între M şi O.



2. θ reprezintă unghiul orientat între Ox şi OM, măsurat în sens trigonometric.

În aceste condiţii, legătura între coordonatele carteziene (x, y) şi coordonatele polare (ρ, θ) este dată de formulele

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

De asemenea,

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta) \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

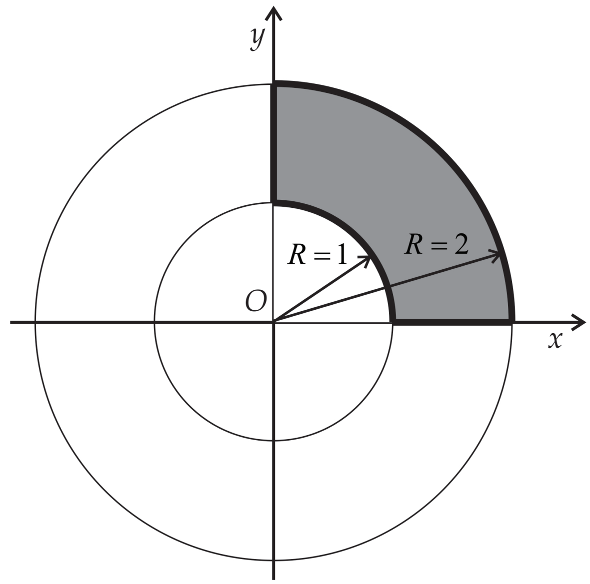
Coordonatele polare sunt utilizate în special pentru integrarea pe domenii circulare (discuri), sau porţiuni din aceste domenii, de exemplu sectoare circulare sau coroane circulare, mai ales când aceste domenii sunt centrate în origine.

În practică, atât pentru ρ cât şi pentru θ vor fi folosite intervalele corespunzătoare închise, ceea ce simplifică calculele. Închiderea intervalelor adaugă la domeniu mulţimi de arie nulă (de obicei porţiuni din cercuri, sau segmente), ceea ce nu modifică valorile integralelor.

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

unde $D = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$.



Soluţie. Domeniul de integrare este cel haşurat în figură. Cercul interior, de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$, are centrul în $O(0,0)$ şi rază 1, iar cercul exterior, de ecuaţie $x^2 + y^2 = 4$, are centrul în $O(0,0)$ şi rază 2. Vom folosi coordonate polare, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [1,2], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Atunci

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\rho d\rho d\theta = \iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$
$$= \left(\int_1^2 \rho e^{-\rho^2}d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta\right) = I_1 \cdot I_2.$$

Observăm că

$$I_1 = \int_1^2 \rho e^{-\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2 2\rho e^{-\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_1^2 (\rho^2)' e^{-\rho^2}d\rho.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \rho^2$ şi notând că

$$\rho = 1 \implies u = 1, \quad \rho = 2 \implies u = 4,$$

obţinem

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^4 e^{-u}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-u}}{-1}\bigg|_1^4 = \frac{1}{2}\left(e^{-1}-e^{-4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^4}\right).$$

De asemenea,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta = \frac{\pi}{2},$$

iar

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = I_1\cdot I_2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^4}\right).$$

De notat că, deşi integrandul se poate separa ca un produs de funcţii care depind fiecare de câte o singură variabilă, sub forma

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2}\cdot e^{-y^2},$$

integrala dublă de mai sus **nu** se poate separa ca un produs de integrale simple, întrucât domeniul nu este un dreptunghi.

> **Exemplu.** Demonstraţi că
>
> $$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \textbf{(integrala Euler-Poisson)}$$
>
> şi deduceţi de aici că $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Soluţie. Fie $R>0$ şi fie D_1, D_2, D_3 respectiv domeniile determinate de cercul cu rază R cu centrul în origine, pătratul cu latură $2R$ centrat în origine şi cercul cu rază $R\sqrt{2}$ centrat în origine, ca în figură. Atunci $D_1\subset D_2\subset D_3$, iar

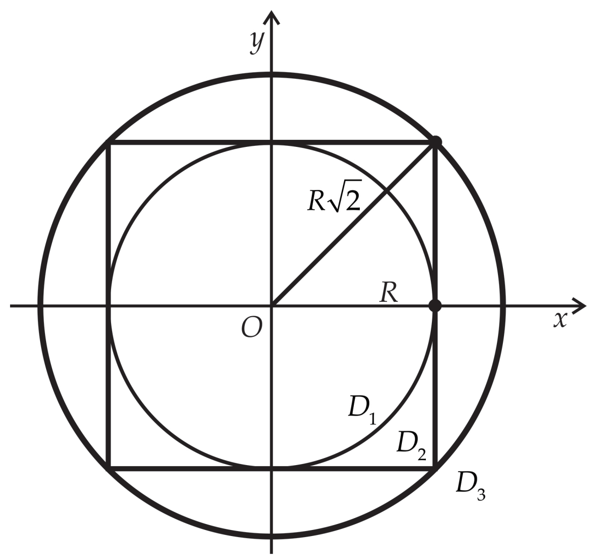
$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

deoarece integrandul este pozitiv pe aceste domenii. Pentru calculul primei integrale, vom folosi coordonate polare, sub forma

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho\in[0,R], \quad \theta\in[0,2\pi], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Urmează că

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\rho d\rho d\theta$$



$$= \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta = \left(\int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta\right) = I_1 \cdot I_2.$$

Observăm că

$$I_1 = \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}\int_0^R 2\rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{2}\int_0^R (\rho^2)' e^{-\rho^2} d\rho.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \rho^2$ şi notând că

$$\rho = 0 \implies u = 0, \quad \rho = R \implies u = R^2,$$

obţinem

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{R^2} e^{-u} du = \frac{1}{2}\cdot \frac{e^{-u}}{-1}\Bigg|_0^{R^2} = \frac{1}{2}\left(e^0 - e^{-R^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^{R^2}}\right).$$

De asemenea

$$I_2 = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi,$$

iar

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = I_1 \cdot I_2 = \pi\left(1 - \frac{1}{e^{R^2}}\right).$$

Cu un raţionament similar şi ţinând seama că al doilea cerc are rază $R\sqrt{2}$, obţinem că

$$\iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi\left(1 - \frac{1}{e^{(R\sqrt{2})^2}}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{e^{2R^2}}\right).$$

Domeniul celei de-a doua integrale este un pătrat cu laturile paralele cu axele de coordonate. Obţinem că

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)\cdot\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}dy\right).$$

Schimbând notaţia pentru cea de-a doua variabilă din y în x obţinem că de fapt

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Cum $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$, este funcţie pară, obţinem că

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx,$$

de unde

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 4\left(\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Deoarece

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

obţinem că

$$\pi\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right) \le 4\left(\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \le \pi\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right),$$

de unde

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right) \le \left(\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right)$$
$$\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right)} \le \int_{0}^{R} e^{-x^2}dx \le \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right)}.$$

Deoarece

$$\lim_{R\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{R^2}}\right)} = \lim_{R\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e^{2R^2}}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}(1-0)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

obţinem cu ajutorul criteriului cleştelui că

$$\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

adică

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5.1}$$

Cu schimbarea de variabilă

$$u = x^2 \implies x = \sqrt{u} \implies dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du,$$

şi ţinând seama de faptul că

$$x = 0 \implies u = 0^2 = 0; \quad x = \infty \implies u = \infty^2 = \infty,$$

se obţine că

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \int_0^\infty e^{-u} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Din (5.1) şi (5.2) urmează că

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \implies \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Coordonate polare generalizate

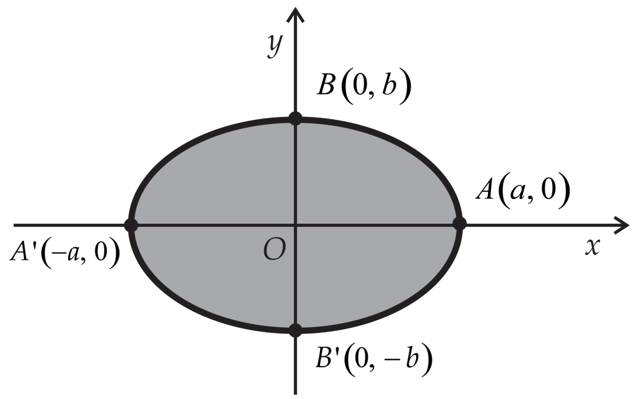
Pentru domenii mărginite de elipse centrate în origine, sau porţiuni ale acestora, se pot folosi **coordonatele polare generalizate** (**coordonatele eliptice**). Astfel, pentru un domeniu mărginit de elipsa de ecuaţie carteziană $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, vor fi folosite coordonatele (ρ, θ) legate de cele carteziene prin relaţiile

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in (0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

În acest context, θ are aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul coordonatelor polare, însă ρ nu mai reprezintă distanţa până la origine, ci o distanţă normalizată ($\rho = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$, în loc de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). Printr-un calcul asemănător celui de mai sus se poate deduce că, în acest caz,

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab\rho \implies dxdy = ab\rho d\rho d\theta.$$

Exemplu. Determinaţi aria domeniului D mărginit de elipsa $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



Soluţie. Avem că

$$\text{aria } (D) = \iint_D 1 dxdy,$$

domeniul D fiind cel haşurat în figură. Vom folosi coordonatele eliptice, date de

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad dxdy = ab\rho d\rho d\theta,$$

unde a, b sunt semiaxele elipsei (E). Urmează că

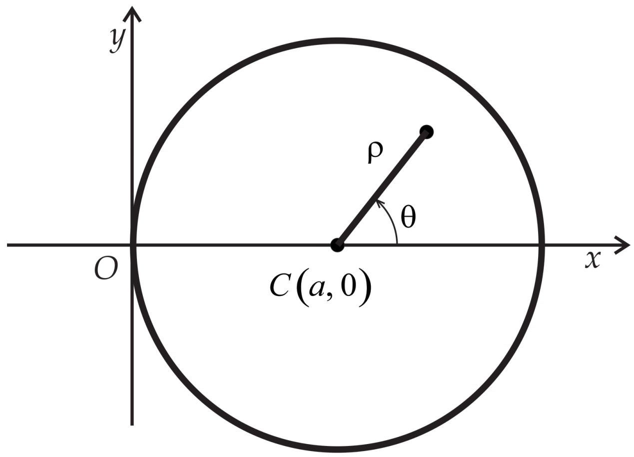
$$\begin{aligned}\text{aria}(D) &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} ab\rho d\rho d\theta = ab \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \rho d\rho d\theta = ab \int_0^1 \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= ab\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 \cdot \theta \Bigg|_0^{2\pi} = ab \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi ab.\end{aligned}$$

Exemplu. Determinaţi

$$\iint_D (x^2 + y^2) dxdy, \quad \text{unde } D = \left\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 2ax\right\}, \quad a > 0.$$

Soluţie. Observăm că

$$x^2 + y^2 \leq 2ax \implies x^2 - 2ax + y^2 \leq 0 \implies (x-a)^2 + y^2 \leq a^2.$$



Domeniul D este un disc cu centrul în $C(a,0)$ şi cu rază a. Putem folosi următoarea schimbare de variabilă, similară coordonatelor polare, dar care ia în calcul şi poziţia centrului

$$\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in [0,a], \quad \theta \in [0,2\pi].$$

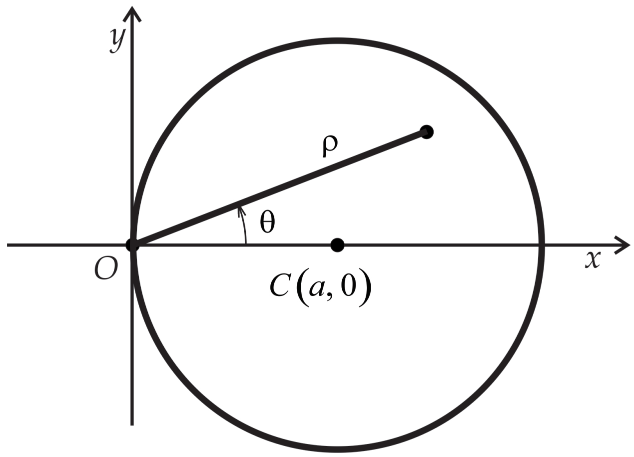
Atunci

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\rho d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta.$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \left[(a+\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2\right] \rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \left[a^2 + 2a\rho\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\right] \rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \left[a^2 + 2a\rho\cos\theta + \rho^2\right] \rho d\rho d\theta \\
&= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} a^2\rho d\rho d\theta + \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} 2a\rho^2\cos\theta d\rho d\theta \\
&\quad + \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \rho^3 d\rho d\theta \\
&= a^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} + 2a \cdot \frac{a^3}{3} \cdot 0 + 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{3\pi a^4}{2}.
\end{aligned}$$

Alternativ, se pot utiliza coordonatele polare



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \qquad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

În fapt, conform definiţiei coordonatelor polare, ar fi trebuit ca $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (porţiunea de deasupra axei Ox)$\cup[\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ (porţiunea de dedesubtul axei Ox). Din motive de periodicitate, putem însă înlocui ultimul interval cu $[-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Rămâne să determinăm transformarea inegalităţii care defineşte domeniul D şi să determinăm de aici valorile lui ρ.

$$x^2 + y^2 \leq 2ax \implies \rho^2 \leq 2a\rho\cos\theta \implies \rho \leq 2a\cos\theta.$$

Domeniul D se transformă atunci în domeniul D_1 definit prin

$$D_1 = \left\{(\rho, \theta); 0 \leq \rho \leq 2a\cos\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right\}.$$

Urmează că

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} \left((\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2\right)\rho d\rho\right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\theta} \rho^3 d\rho\right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^4\cos^4 d\theta \\
&= 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta
\end{aligned}$$

$$= a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta.$$

Atunci

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta + 2a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta + a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\theta}{2} d\theta$$
$$= \pi a^4 + 0 + \frac{\pi a^4}{2} = \frac{3\pi a^4}{2}.$$

5.4 Legătura între integrala dublă şi integrala curbilinie de specia II. Formula Riemann-Green

În cele ce urmează vom preciza legătura între integrala curbilinie de specia II pe o curbă închisă netedă pe porţiuni şi o anumită integrală dublă pe domeniul plan delimitat de acea curbă.

Teorema 5.14. *Fie D un domeniu de integrare simplu în raport atât cu Ox cât şi cu Oy şi fie C frontiera acestuia, orientată pozitiv. Fie de asemenea $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe D pentru care derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt de asemenea continue pe D. Atunci*

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} (x,y)dxdy$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy.$$

De remarcat faptul că în membrul drept apariţia celei de-a doua integrale (trecerea de la integrala curbilinie la integrala dublă) se produce numai în condiţiile apariţiei în acel membru şi a operaţiei inverse, derivarea.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi că, dacă D este simplu în raport cu Oy, iar celelalte condiţii din enunţul teoremei sunt îndeplinite, atunci

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_C P(x,y)dx.$$

Într-adevăr, deoarece D este simplu în raport cu Oy,

$$D = \{(x,y); \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), x \in [a,b]\},$$

urmează că

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy \right) dx.$$

Cum

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy = -P(x,y)\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} = -P(x,\varphi_2(x)) + P(x,\varphi_1(x)),$$

urmează că

$$\begin{aligned}\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy &= \int_a^b -P(x,\varphi_2(x)) + P(x,\varphi_1(x))dx \\ &= \int_a^b -P(x,\varphi_2(x))dx + \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx \\ &= -\int_{\overset{\frown}{A_2B_2}} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx \\ &= \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx.\end{aligned}$$

Deoarece pe segmentele $\overline{A_2A_1}$ şi $\overline{B_1B_2}$ coordonata x este constantă, urmează că $dx = 0$ pe aceste segmente, deci

$$\int_{\overline{A_2A_1}} P(x,y)dx = \int_{\overline{B_1B_2}} P(x,y)dx = 0,$$

iar atunci

$$\begin{aligned}\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy &= \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} P(x,y)dx + \int_{\overline{A_2A_1}} P(x,y)dx \\ &\quad + \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx + \int_{\overline{B_1B_2}} P(x,y)dx \\ &= \int_C P(x,y)dx.\end{aligned}$$

Similar se poate demonstra că

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int_C Q(x,y)dy,$$

de unde concluzia. ■

În fapt, se poate demonstra că nu este neapărat necesar ca D să fie simplu în raport atât cu Ox cât şi cu Oy, formula Riemann-Green având loc şi dacă D este doar simplu conex. Demonstraţia depăşeşte însă cadrul acestui curs.

Cu ajutorul acestei observaţii, putem demonstra următoarea proprietate, care finalizează demonstraţia Teoremei 4.11 privind independenţa de drum a integralelor curbilinii în plan.

Teorema 5.15. *Fie $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue pe D şi derivabile parţial, cu derivatele parţiale continue pe domeniul simplu conex D. Dacă are loc egalitatea*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{în } D,$$

atunci $\displaystyle\int_C Pdx + Qdy = 0$ pentru orice curbă închisă netedă pe porţiuni (C) conţinută în D.

Formula de integrare prin părţi în integrala dublă

Pentru $P \equiv 0$ şi $Q = uv$, unde $u, v : D \to \mathbb{R}$ sunt continue pe D şi derivabile parţial în raport cu variabila x, obţinem că

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(uv)dxdy = \int_C uvdy \implies \iint_D \frac{\partial u}{\partial x} vdxdy = \int_C uvdy - \iint_D u\frac{\partial v}{\partial x}dxdy.$$

O formulă similară de integrare prin părţi are loc şi pentru derivate parţiale în raport cu variabila y.

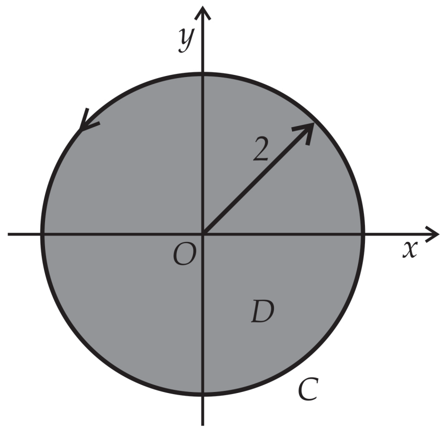
Exemplu. Cu ajutorul formulei Riemann-Green, calculaţi

$$\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy,$$

unde Γ este cercul cu centrul în origine şi de rază 2, parcurs în sens trigonometric.

Soluţie. Observăm că sunt îndeplinite ipotezele formulei Riemann-Green. Urmează că

$$\int_\Gamma (y^2 - y)dx + (2xy + x)dy = \iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ y^2 - y & 2xy + x \end{vmatrix} dxdy,$$



unde D este discul determinat de Γ. Atunci

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (y^2-y)dx+(2xy+x)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy+x)-\frac{\partial}{\partial y}(y^2-y)\right)dxdy\\ &= \iint_D ((2y+1)-(2y-1))\,dxdy = \iint_D 2dxdy\\ &= 2\iint_D dxdy = 2\text{aria}(D) = 2\cdot\pi 2^2 = 8\pi.\end{aligned}$$

5.5 Aplicaţii ale integralei duble

5.5.1 Centrul de masă al unei plăci plane

Plăci neomogene

Teorema 5.16. *Fie o placă plană* **neomogenă** *cu grosime neglijabilă, asimilabilă unui domeniu de integrare D, cu densitate variabilă $\rho(x,y)$. Atunci masa plăcii este*

$$m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$$

iar coordonatele centrului de masă al plăcii sunt

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy, \quad y_{CM} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy.$$

Să notăm că formulele corespunzătoare obţinute cu ajutorul integralei definite sunt cazuri particulare ale celor de mai sus, atât din punctul de vedere al formei plăcii (un subgrafic al unei funcţii integrabile), cât şi al densităţii sale, placa fiind asumată a fi omogenă (cu densitate constantă).

Plăci omogene

Pentru plăci omogene, cu $\rho(x,y) = \rho =$ constant, urmează că

$$m = \iint_D \rho dxdy = \rho \iint_D 1dxdy = \rho \,\text{aria}(D),$$

şi similar

$$x_{CM} = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D 1dxdy} = \frac{\iint_D xdxdy}{\text{aria}(D)}, \qquad y_{CM} = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D 1dxdy} = \frac{\iint_D ydxdy}{\text{aria}(D)}.$$

5.5.2 Momentele de inerţie ale unei plăci plane

Teorema 5.17. *Fie o placă plană* **neomogenă** *cu grosime neglijabilă, asimilabilă unui domeniu de integrare D, cu densitate variabilă $\rho(x,y)$. Atunci momentele de inerţie ale plăcii în raport cu axele de coordonate sunt*

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy$$

iar momentul de inerţie al plăcii în raport cu originea este

$$I_O = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy.$$

Aplicaţii

5.1. *Determinaţi valorile următoarelor integrale pe domenii dreptunghiulare*

1) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,1]} \frac{y}{1+x^2}dxdy$; 2) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-y^2)}}dxdy$;

3) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \frac{\sin x}{\cos^2 y}dxdy$; 4) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[1,2]} x^2y^3e^{x^3+y^4}dxdy$;

5) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{x+\sin y}\cos y dxdy$; 6) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{4}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} [\sin(x+y)+\sin(x-y)]dxdy.$

5.2. *Determinaţi valorile următoarelor integrale pe domenii dreptunghiulare*

1) $\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{1+xy} dxdy$; 2) $\iint_{[0,1]\times[1,2]} \ln(x+y) dxdy$.

5.3. *Determinaţi aria domeniului plan mărginit de dreapta* $(D): y = x$ *şi de parabola* $(P): y^2 = x$.

5.4. *Determinaţi aria domeniului plan mărginit de parabolele* $(P_1): y = x^2$ *şi* $(P_2): y^2 = x$.

5.5. *Determinaţi aria domeniului D,*

$$D = \left\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\right\}.$$

5.6. *Determinaţi*

$$\iint_D x dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de parabola $(P): y = x^2$ *şi dreapta* $(D): y = x + 6$.

5.7. *Determinaţi*

$$\iint_D (x^2 + y) dxdy,$$

unde D este domeniul mărginit de parabolele $(P_1): y = x^2$ *şi* $(P_2): x^2 = y$.

5.8. *Determinaţi*

$$\iint_D \frac{x^3}{y^2} dxdy, \qquad D = \left\{(x, y); \frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\right\}.$$

5.9. *Determinaţi*

$$\iint_D y dxdy, \qquad D = \left\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 5, y \geq 2x^2\right\}.$$

5.10. *Determinaţi*

$$\iint_D (2x - y) dxdy, \qquad D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 2\}.$$

1. *folosind faptul că D este simplu în raport cu Oy;*
2. *folosind faptul că D este simplu în raport cu Ox.*

5.11. *Determinaţi*

$$\iint_D \frac{y}{1+x^2} dxdy, \qquad D = \left\{(x,y), x \geq 0, y \geq x^2, y \leq 1\right\},$$

folosind eventual faptul că D este simplu în raport cu Oy.

5.12. *Determinaţi*

$$\iint_D (6x - 5 - x^2 - y^2) dxdy, \qquad D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 - 6x + 5 \leq 0\right\},$$

folosind eventual (după o argumentaţie a necesităţii) schimbarea de variabilă

$$x = 3 + \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

5.13. *Determinaţi*

$$\iint_D xydxdy, \qquad D = \left\{(x,y); x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 \leq 0\right\},$$

folosind eventual (după o argumentaţie a necesităţii) schimbarea de variabilă

$$x = 2 + 2\rho\cos\theta, \quad y = 1 + \rho\sin\theta.$$

5.14. *Cu ajutorul coordonatelor polare, determinaţi*

1. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy, \quad D = \left\{(x,y); 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$

2. $\displaystyle\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dxdy, \quad D = \left\{(x,y); x^2 + y^2 \leq 9;\ x \leq 0, y \geq 0\right\}.$

3. $\displaystyle\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy, \quad D = \left\{(x,y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4;\ x \geq 0, y \leq 0\right\}.$

5.15. *Determinaţi*

$$\iint_D x^2 ydxdy, \qquad D = \left\{(x,y), x^2 + y^2 \leq 2x, x \leq 1, y \geq 0\right\},$$

1. *folosind faptul că D este simplu în raport cu Oy,*

2. *folosind schimbarea de variabilă*

$$x = 1 + \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

5.16. *Cu ajutorul formulei Riemann-Green, determinaţi*

1. $\int_C (xy-y)dx + (xy+x)dy$,

2. $\int_C x^2 dx + y^2 dy$,

3. $\int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy)$,

unde (C) *este cercul unitate (cercul cu centrul în origine şi rază egală cu* 1*), orientat pozitiv.*

5.17. *Cu ajutorul formulei Riemann-Green, determinaţi*

1. $\int_C (y-\sin x)dx + \cos x dy$, *unde* $D = \left\{(x,y); 0 \le y \le x;\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$, *iar* (C) *este frontiera lui* D, *orientată pozitiv.*

2. $\int_C (x^3 - 2xy)dx + (x^3y + 4y^3)dy$, *unde* $D = \left\{(x,y); y^2 \le 2x, x \in [0,2]\right\}$, *iar* (C) *este frontiera lui* D, *orientată pozitiv.*

3. $\int_C e^x(1+\cos x)dx + e^y(1+\sin x)dx$, *unde* $D = \{(x,y); 0 \le y \le \sin x, x \in [0,\pi]\}$, *iar* (C) *este frontiera lui* D, *orientată pozitiv.*

5.18. *Cu ajutorul coordonatelor polare generalizate, determinaţi*

$$\iint_D \sqrt{5 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy, \quad D = \left\{(x,y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}, \quad a, b > 0.$$

5.19. *Determinaţi*

$$\iint_D \sqrt{x-y}dxdy,$$

unde D *este domeniul mărginit de triunghiul cu vârfurile* $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(1,1)$, *folosind eventual faptul că* D *este simplu în raport cu* Ox.

5.20. *Cu ajutorul unei schimbări potrivite de variabile, determinaţi*

$$\iint_D (x+y)^2(x-y)dxdy,$$

D *fiind pătratul mărginit de dreptele* $(D_1) : x+y = -2$, $(D_2) : x+y = 2$, $(D_3) : x-y = -1$, $(D_4) : x-y = 3$.

5.21. *Cu ajutorul unor schimbări potrivite de variabile, de tipul*

$$x = \rho^m \cos^n \theta, \quad y = \rho^m \sin^n \theta,$$

(găsind valorile potrivite ale lui m, n pentru fiecare caz), determinaţi

1. $\iint_D y\,dxdy$, $D = \left\{(x, y), \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$.
2. $\iint_D x\,dxdy$, $D = \left\{(x, y), \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$.